

考虑混合间隙的空间并联机构非线性动力学特性分析

陈修龙 郭景尧 王景庆 赵飞跃

(山东科技大学机械电子工程学院, 青岛 266590)

摘要: 为了掌握同时考虑球面副间隙和三维转动副间隙的空间并联机构的非线性动力学特性,研究考虑混合间隙的空间并联机构多体系统动力学特性分析方法。首先以4-UPS/RPU空间并联机构为研究对象,建立三维转动副间隙和球面副间隙的模型,推导同时考虑球面副间隙和三维转动副间隙的4-UPS/RPU空间并联机构动力学方程;然后利用龙格库塔法对动力学方程进行数值求解,分析不同间隙类型、间隙、驱动速度和摩擦因数对并联机构动力学响应的影响,通过ADAMS虚拟样机仿真验证动力学模型和数值计算的正确性;最后利用相轨迹图、庞加莱映射图和分岔图等分析考虑混合间隙的4-UPS/RPU并联机构的非线性特性。该研究为考虑混合运动副间隙的空间并联机构动力学建模和非线性动力学特性分析提供了依据。

关键词: 空间并联机构; 混合间隙; 动力学模型; 动力学响应; 非线性特性

中图分类号: TH113 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2023)12-0431-18

OSID:



Dynamic Characteristics Analysis of Spatial Parallel Mechanism with Compound Clearances

CHEN Xiulong GUO Jingyao WANG Jingqing ZHAO Feiyue

(College of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

Abstract: In order to grasp the nonlinear dynamic characteristics of space parallel mechanism considering spherical joint clearances and three-dimensional revolute joint clearances, the dynamic characteristics analysis method of space parallel mechanism multi-body system considering compound clearances was studied. Firstly, taking 4-UPS/RPU spatial parallel mechanism as research object, the models of three-dimensional revolute joint clearances and spherical joint clearances were established, and the dynamic equation of 4-UPS/RPU spatial parallel mechanism considering both spherical joint clearances and three-dimensional revolute joint clearance was derived. Then the dynamic equation was solved numerically by Runge-Kutta method, and the effects of different clearance types, clearance values, driving speed and friction coefficient on the dynamic response of parallel mechanism were analyzed. The correctness of dynamic model and numerical calculation was verified by simulation of ADAMS virtual prototype. Finally, nonlinear characteristics of 4-UPS/RPU parallel mechanism with compound clearances were considered by phase diagram, Poincare map and bifurcation diagram. The research provided a basis for dynamic modeling and nonlinear dynamic analysis of spatial parallel mechanism considering compound joint clearances.

Key words: spatial parallel mechanism; compound clearance; dynamic model; dynamic response; nonlinear characteristics

0 引言

空间并联机构是由定平台、动平台和多条运动支链组成的空间闭环机构多体系统,机构各构件之间往往通过各种不同类型的空间运动副(如球面

副、转动副等)连接,由于加工制造精度和装配误差等原因,运动副间隙不可避免^[1-3]。混合运动副间隙的存在(同时存在各种不同类型的空间运动副间隙)会严重恶化空间并联机构的非线性动力学行为,降低并联机构稳定性和工作精度,缩短并联机构

的使用寿命^[4-5]。因此亟需研究考虑混合运动副间隙的空间并联机构的非线性动力学特性。

目前国内外学者对含间隙平面机构动力学响应研究较多^[6-8],对考虑运动副间隙空间并联机构动力学特性的研究相对较少^[9-11],涉及含混合间隙空间并联机构非线性动力学特性研究还很鲜见。张健等^[12]以平面四杆冗余约束机构为例,描述了转动副间隙处的接触状态,并基于拉格朗日方程建立机构含间隙动力学方程,分析了不同间隙和间隙位置时机机构动力学响应。FARAHAN等^[13]推导了考虑转动副间隙的平面四杆机构动力学方程,基于相轨迹图和庞加莱映射图判断了系统周期和混沌运动状态。FLORES等^[14]建立考虑转动副间隙的曲柄摇杆机构动力学方程,分析了间隙和摩擦因数变化对机构动力学响应的影响,并通过相轨迹图和庞加莱映射图发现,随间隙的增大及摩擦因数的减小,运动副间隙处由周期状态转变为混沌状态。VAREDI-KOULAEI等^[15]以3-RRR平面并联机构为例,分析了不同间隙和驱动速度时机机构的动态性能,并研究了考虑6个转动副间隙3-RRR并联机构的动力学特性。ZHANG等^[16]基于牛顿-欧拉法建立3-RRR平面并联机构的刚体动力学模型,结合接触力模型建立考虑运动副间隙的动力学模型,分析了间隙效应对机构动力学特性的影响,然后以一种三自由度冗余驱动4-RRR平面并联机构为例,建立其考虑多间隙的动力学模型,通过对比两种并联机构的动力学响应,发现具有冗余驱动支链的机构可以有效控制关节间隙引起的迟滞误差。为探究转动副间隙尺寸对机构整体性能的影响,燕卫亮^[17]通过ADAMS建立曲柄群机构的仿真模型,仿真结果表明,间隙越大,机构运行稳定性越差。王庚祥等^[18]以4-SPS/CU空间并联机构为例,基于连续接触力模型和达朗贝尔原理建立考虑球面副间隙的动力学模型,并求解驱动支链与运动关节处的驱动力和关节力,分析了球面副间隙对驱动力的影响。HOU等^[19]以一种双转动解耦并联机构为例,结合转动副间隙模型建立其含间隙动力学模型,研究了间隙对并联机构动力学特性的影响,并对机构中弹簧的属性进行优化,很大程度上改善了机构运动性能。曹毅等^[20]运用正态分布统计模型对并联机构考虑转动副间隙,采用拉格朗日方程建立了含转动副间隙的3-CPaRR空间并联机构动力学模型,并通过样机仿真对含间隙并联机构动力学模型进行验证。HOU等^[21]以一种二自由度解耦并联机构为研究对象,采用牛顿-欧拉法建立考虑转动副间隙的并联机构动力学模型,发现转动副间隙对并联机构的运动

性能有较大影响,并且随着摩擦因数的增大,机构由混沌状态变为周期状态。侯雨雷等^[22]以一种具有三自由度的并联机构为研究对象,采用拉格朗日法建立含间隙并联机构动力学模型,通过相轨迹图和最大李雅普诺夫指数判断机构的混沌状态,发现随驱动速度和间隙的增大,机构混沌现象愈加明显。JIA等^[23]推导了具有径向和轴向间隙的球面副间隙和转动副间隙的三维模型,分析了复合间隙和轴承轴线初始错位对系统动力学响应的影响,并利用ADAMS和牛顿-欧拉方法对动力学模型进行了验证。SHAN等^[24]为研究不规则间隙对机构动力学特性的影响,将2(3PUS+S)并联机构中的球面副近似为椭球体,建立并联机构的动力学模型,分析了含间隙机构的动力学响应,并通过仿真和实验证明了关节效应有可能使机构产生混沌现象。CHEN等^[25]提出了含平面转动副间隙的动力学模型,分析了驱动速度和间隙尺寸对平面双转动副间隙曲柄滑块机构运动性能的影响,并搭建实验平台验证了理论结果的正确性。MA等^[26]对平面曲柄滑块机构的3个关节均考虑转动副间隙,分析了3个间隙对平面曲柄滑块机构总体性能的综合影响。CHEN等^[27]建立了考虑平面多间隙的破岩机构模型,并通过动力学求解分析了不同参数对机构输出响应的影响。JIANG等^[28]建立了具有复合间隙的平面2自由度9杆刚柔耦合机构的动力学模型,对具有复合间隙的刚性机构和具有复合间隙刚性-柔性耦合机构的动力学响应和非线性特性进行了比较研究,并进行了试验研究。ISAAC等^[29]提出了空间转动副间隙的动态建模方法,该方法考虑了径向和轴向间隙,并通过空间曲柄滑块机构验证了该方法的有效性。BAI等^[30]在考虑径向间隙的基础上,探讨了轴向间隙对卫星天线系统工作精度的影响,分析结果表明空间转动副轴向间隙不容忽视。YANG等^[31]以典型的串联机械手为研究对象,通过分析可知,间隙位置越靠近末端执行器,对机构输出响应的影响越大。LIU等^[32]在仅考虑径向间隙的平面转动副模型的基础上提出了一种转动副误差等效模型,该模型将轴向间隙的影响考虑在内,分析了空间转动副两个方向间隙的内在作用。

综上所述,虽然机构中大都存在混合间隙,但迄今含混合间隙机构的动力学特性研究较少,特别是考虑混合间隙的空间并联机构动力特性研究极少。本文拟建立球面副间隙模型和三维转动副间隙模型,利用拉格朗日乘法推导考虑混合间隙(球面副间隙和三维转动副间隙)的4-UPS/RPU空间并联机构动力学模型;采用龙格库塔法求解动力学方

程,分析不同间隙类型、间隙、驱动速度和摩擦因数对并联机构动力学响应的影响,以及同时考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 空间并联机构的非线性特性。

1 考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构动力学建模

1.1 球面副间隙模型建立

球面副由球体和球套组成,实际应用情况下,球体和球套间存在间隙,球体可在球套内自由运动并发生接触。球面副间隙的几何模型如图 1 所示。

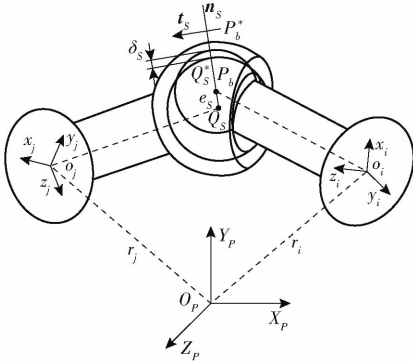


图 1 球面副间隙几何模型

Fig. 1 Geometric model of spherical joint clearance

球体中心点和球套中心点在定坐标系下的位置矢量可以表示为

$$\boldsymbol{r}_{Pb} = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{r}_p \quad (1)$$

$$\boldsymbol{r}_{Qs} = \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{r}_q \quad (2)$$

式中 $\boldsymbol{r}_p$ —— P_b 的位置矢量

$\boldsymbol{r}_q$ —— Q_s 的位置矢量

$\boldsymbol{R}_i$ ——球体所在杆件质心坐标的旋转矩阵

$\boldsymbol{R}_j$ ——球套所在杆件质心坐标的旋转矩阵

$\boldsymbol{r}_i$ ——球体所在杆件质心在定坐标系下的位置矢量

$\boldsymbol{r}_j$ ——球套所在杆件质心在定坐标系下的位置矢量

球体与球套之间的偏心矢量为

$$\boldsymbol{e}_s = \boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{r}_q \quad (3)$$

此时嵌入深度可以表示为

$$\delta_s = \boldsymbol{e}_s - c \quad (4)$$

式中 $\boldsymbol{e}_s$ ——球体与球套之间偏心矢量

c ——球体与球套之间的间隙, m

根据嵌入深度 δ_s 可以判断球体与球套之间是否发生接触:当 $\delta_s < 0$ 时,球体在球套内自由运动,不发生接触;当 $\delta_s = 0$ 时,球体与球套开始接触或开始分离;当 $\delta_s > 0$ 时,球体与球套发生接触。

当发生接触时,潜在碰撞点 P_b^* 和 Q_s^* 在定坐标系下的位置矢量可以表示为

$$\boldsymbol{r}_{P^*} = \boldsymbol{r}_p + R_p \boldsymbol{n}_s \quad (5)$$

$$\boldsymbol{r}_{Q^*} = \boldsymbol{r}_q + R_q \boldsymbol{n}_s \quad (6)$$

式中 $\boldsymbol{n}_s$ ——接触面的法向接触矢量

R_s, R_b ——球套和球体半径, m

将式(5)、(6)等号两边分别对时间求一阶偏导,得到球体和球套上的潜在碰撞点 P_b^* 和 Q_s^* 在定坐标系下的速度矢量

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{P^*} = \dot{\boldsymbol{r}}_p + R_p \dot{\boldsymbol{n}}_s \quad (7)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{Q^*} = \dot{\boldsymbol{r}}_q + R_q \dot{\boldsymbol{n}}_s \quad (8)$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{n}}_s = \frac{\dot{\boldsymbol{e}}_s \boldsymbol{e}_s + \boldsymbol{e}_s \dot{\boldsymbol{e}}_s}{e_s^2} \quad (9)$$

式中 $\dot{\boldsymbol{r}}_p$ —— P_b 在定坐标系下的速度矢量

$\dot{\boldsymbol{r}}_q$ —— Q_s 在定坐标系下的速度矢量

碰撞点法向速度矢量和切向速度矢量可以表示为

$$\boldsymbol{v}_n = [(\dot{\boldsymbol{r}}_p - \dot{\boldsymbol{r}}_q)^T \boldsymbol{n}_s] \dot{\boldsymbol{n}}_s \quad (10)$$

$$\boldsymbol{v}_t = \dot{\boldsymbol{r}}_p - \dot{\boldsymbol{r}}_q - \boldsymbol{v}_n \quad (11)$$

则碰撞点所在平面的切向单位矢量 $\boldsymbol{t}_s$ 可以表示为

$$\boldsymbol{t}_s = \frac{\boldsymbol{v}_t}{v_t} \quad (12)$$

1.2 转动副间隙模型建立

转动副由轴体和轴套组成,在实际应用情况下,轴体和轴套间不仅存在径向间隙,还会存在轴向间隙,在运动的过程中轴体和轴套可能会发生相对倾斜,出现多种接触形式。转动副间隙的几何模型如图 2 所示,轴向间隙 C_a 和径向间隙 C_r 分别为

$$\begin{cases} C_a = (L_j - L_b)/2 \\ C_r = R_{B1} - R_j \end{cases} \quad (13)$$

式中 L_j ——轴径长度, m

L_b ——轴套长度, m

R_{B1} ——轴套内径, m

R_j ——轴内径, m

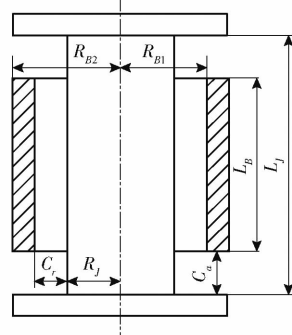


图 2 转动副间隙几何模型

Fig. 2 Geometric model of revolute joint clearance

1.2.1 径向接触状态

转动副在运动过程中最常发生的接触为径向接触状态,图 3 为转动副间隙径向接触状态的几何模

型,在定坐标中轴体和轴套上、下顶点位置矢量为

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{Ja} = \boldsymbol{r}_{Jc} + L_J \boldsymbol{e}_J / 2 \\ \boldsymbol{r}_{Jd} = \boldsymbol{r}_{Jc} - L_J \boldsymbol{e}_J / 2 \\ \boldsymbol{r}_{Ba} = \boldsymbol{r}_{Bc} + L_B \boldsymbol{e}_B / 2 \\ \boldsymbol{r}_{Bd} = \boldsymbol{r}_{Bc} - L_B \boldsymbol{e}_B / 2 \end{cases} \quad (14)$$

式中 $\boldsymbol{r}_{Ja}$ ——轴上顶点位置矢量
 $\boldsymbol{r}_{Jd}$ ——轴下顶点位置矢量
 $\boldsymbol{r}_{Ba}$ ——轴套上顶点位置矢量
 $\boldsymbol{r}_{Bd}$ ——轴套下顶点位置矢量
 $\boldsymbol{r}_{Jc}$ ——轴中心位置矢量
 $\boldsymbol{r}_{Bc}$ ——轴套中心位置矢量
 $\boldsymbol{e}_J$ ——轴方向的单位向量
 $\boldsymbol{e}_B$ ——轴套方向的单位向量

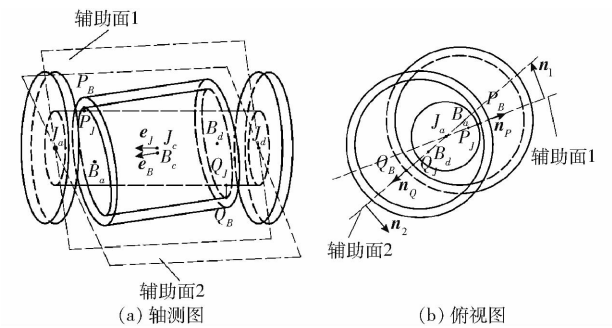


图3 径向接触状态几何模型

Fig.3 Geometric models of radial contact state

考虑径向接触状态时,轴体和轴套有可能发生 P 和 Q 两点的接触,为方便分析碰撞点的运动状态,建立辅助面 1 和辅助面 2,辅助面 1 由 J_a 、 J_d 和 B_a 3 点确定,辅助面 2 由 J_a 、 J_d 和 B_d 3 点确定。则辅助面 1 和辅助面 2 的法向单位向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 可以表示为

$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{\boldsymbol{e}_J \times \boldsymbol{l}_{BaJa}}{|\boldsymbol{e}_J \times \boldsymbol{l}_{BaJa}|} \quad (15)$$

$$\boldsymbol{n}_2 = \frac{\boldsymbol{e}_J \times \boldsymbol{l}_{BdJd}}{|\boldsymbol{e}_J \times \boldsymbol{l}_{BdJd}|} \quad (16)$$

其中

$$\boldsymbol{l}_{BaJa} = \boldsymbol{r}_{Ja} - \boldsymbol{r}_{Ba} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{l}_{BdJd} = \boldsymbol{r}_{Jd} - \boldsymbol{r}_{Bd} \quad (18)$$

以点 P 为例对径向接触状态进行分析,则碰撞点 P 处的法向单位向量 $\boldsymbol{n}_p$ 可以表示为

$$\boldsymbol{n}_p = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{e}_J \quad (19)$$

轴套上的潜在碰撞点 P_B 可以表示为

$$\boldsymbol{r}_{PB} = \boldsymbol{r}_{Ba} + R_{B1} \boldsymbol{e}_{BP} \quad (20)$$

其中

$$\boldsymbol{e}_{BP} = \frac{\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{e}_B}{|\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{e}_B|} \quad (21)$$

式中 $\boldsymbol{e}_{BP}$ ——点 B_a 到点 P_B 的单位向量
碰撞点 P 处的嵌入深度 δ_p 可以表示为

$$\delta_p = R_J - \boldsymbol{n}_p^T \boldsymbol{l}_{JaPB} \quad (22)$$

$$\boldsymbol{l}_{JaPB} = \boldsymbol{r}_{PB} - \boldsymbol{r}_{Ja} \quad (23)$$

根据嵌入深度 δ_p 可以判断轴体与轴套在径向方向是否发生接触:当 $\delta_p < 0$ 时,轴体与轴套在径向方向自由运动,不发生接触;当 $\delta_p = 0$ 时,轴体与轴套在径向方向开始接触或开始分离;当 $\delta_p > 0$ 时,轴体与轴套在径向方向发生接触。

轴体上的潜在碰撞点 P_J 可以表示为

$$\boldsymbol{r}_{PJ} = \boldsymbol{r}_{PB} + \delta_p \boldsymbol{n}_p \quad (24)$$

轴体上潜在碰撞点 P_J 的速度矢量可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{PJ} = \dot{\boldsymbol{r}}_{Jc} + \boldsymbol{\omega}_J \boldsymbol{l}_{JcPJ} \quad (25)$$

$$\text{其中} \quad \boldsymbol{l}_{JcPJ} = \boldsymbol{r}_{PJ} - \boldsymbol{r}_{Jc} \quad (26)$$

式中 $\dot{\boldsymbol{r}}_{Jc}$ ——轴体中心点 J_c 速度矢量

$\boldsymbol{\omega}_J$ ——轴体角速度矢量

轴套上潜在碰撞点 P_B 的速度矢量可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{PB} = \dot{\boldsymbol{r}}_{Bc} + \boldsymbol{\omega}_B \boldsymbol{l}_{BcPB} \quad (27)$$

$$\text{其中} \quad \boldsymbol{l}_{BcPB} = \boldsymbol{r}_{PB} - \boldsymbol{r}_{Bc} \quad (28)$$

式中 $\dot{\boldsymbol{r}}_{Bc}$ ——轴套中心点 B_c 速度矢量

$\boldsymbol{\omega}_B$ ——轴套角速度矢量

则碰撞点 P 处轴体和轴套的相对碰撞速度为

$$\Delta \dot{\boldsymbol{r}}_p = \dot{\boldsymbol{r}}_{PJ} - \dot{\boldsymbol{r}}_{PB} \quad (29)$$

将碰撞点 P 处的相对碰撞速度向法向碰撞向量 $\boldsymbol{n}_p$ 方向投影,可得到碰撞点的法向速度,即嵌入深度速度可以表示为

$$\dot{\delta}_p = (\Delta \dot{\boldsymbol{r}}_p)^T \boldsymbol{n}_p \quad (30)$$

碰撞点 P 处切向速度矢量可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}_p = \Delta \dot{\boldsymbol{r}}_p - \dot{\delta}_p \boldsymbol{n}_p \quad (31)$$

碰撞点 P 处切向速度单位矢量可以表示为

$$\boldsymbol{t}_p = \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}_p}{|\dot{\boldsymbol{\tau}}_p|} \quad (32)$$

当 $\boldsymbol{e}_J$ 与 $\boldsymbol{e}_B$ 平行时,轴体与轴套发生径向接触时为两个圆柱侧面的线接触,碰撞点的分析与上述轴向接触状态分析类似。同理,也可以求得轴体与轴套上潜在碰撞点 Q_J 和 Q_B 的理论接触模型。

1.2.2 轴向接触状态

在以往对转动副间隙的研究中,大多数学者通常只考虑了径向间隙,而忽略了轴向间隙。为进一步完善转动副间隙模型,分析转动副轴向接触状态时的间隙模型是有必要的,图 4 为转动副间隙轴向接触状态的几何模型。

考虑轴向接触状态时,轴体和轴套有可能发生点 M 和点 N 接触,为方便分析碰撞点的运动状态,建立辅助面 3 来辅助分析,辅助面 3 经过点 B_a 、点 B_d 且与 $\boldsymbol{e}_J$ 平行。则辅助面 3 的法向单位向量 $\boldsymbol{n}_3$ 可以表示为

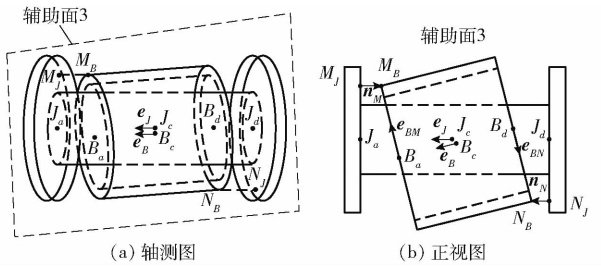


图 4 轴向接触状态几何模型

Fig. 4 Geometric models of axial contact state

$$\mathbf{n}_3 = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_B}{|\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_B|} \quad (33)$$

以点 M 为例对轴向接触状态进行分析,则碰撞点 M 处的法向单位向量 $\mathbf{n}_M$ 为

$$\mathbf{n}_M = -\mathbf{e}_j \quad (34)$$

轴套上的潜在碰撞点 M_B 可以表示为

$$\mathbf{r}_{MB} = \mathbf{r}_{Ba} + R_{B2} \mathbf{e}_{BM} \quad (35)$$

$$\mathbf{e}_{BM} = \mathbf{n}_B \times \mathbf{e}_3 \quad (36)$$

其中 $\mathbf{e}_{BM}$ ——点 B_a 到点 M_B 的单位向量

碰撞点 M 处嵌入深度 δ_M 可以表示为

$$\delta_M = \mathbf{n}_M^T \mathbf{l}_{MBJ_a} \quad (37)$$

$$\mathbf{l}_{MBJ_a} = \mathbf{r}_{Ja} - \mathbf{r}_{MB} \quad (38)$$

根据嵌入深度 δ_M 可以判断轴体与轴套在径向方向是否发生接触:当 $\delta_M < 0$ 时,轴体与轴套在径向方向自由运动,不发生接触;当 $\delta_M = 0$ 时,轴体与轴套在径向方向开始接触或开始分离;当 $\delta_M > 0$ 时,轴体与轴套在径向方向发生接触。

轴体上的潜在碰撞点 M_J 可以表示为

$$\mathbf{r}_{MJ} = \mathbf{r}_{MB} + \delta_M \mathbf{n}_M \quad (39)$$

轴体上潜在碰撞点 M_J 的速度矢量可以表示为

$$\dot{\mathbf{r}}_{MJ} = \dot{\mathbf{r}}_{Jc} + \boldsymbol{\omega}_j \mathbf{l}_{JcM_J} \quad (40)$$

$$\mathbf{l}_{JcM_J} = \mathbf{r}_{MJ} - \mathbf{r}_{Jc} \quad (41)$$

轴套上潜在碰撞点 M_B 的速度矢量可以表示为

$$\dot{\mathbf{r}}_{MB} = \dot{\mathbf{r}}_{Bc} + \boldsymbol{\omega}_B \mathbf{l}_{BcM_B} \quad (42)$$

$$\mathbf{l}_{BcM_B} = \mathbf{r}_{MB} - \mathbf{r}_{Bc} \quad (43)$$

则碰撞点 M 处轴体和轴套的相对碰撞速度为

$$\Delta \dot{\mathbf{r}}_M = \dot{\mathbf{r}}_{MJ} - \dot{\mathbf{r}}_{MB} \quad (44)$$

将碰撞点 M 处的相对碰撞速度向法向碰撞向量 $\mathbf{n}_M$ 方向投影,可得到碰撞点的法向速度,即嵌入深度速度可以表示为

$$\dot{\delta}_M = (\Delta \dot{\mathbf{r}}_M)^T \mathbf{n}_M \quad (45)$$

碰撞点 M 处切向速度矢量可以表示为

$$\dot{\mathbf{t}}_M = \Delta \dot{\mathbf{r}}_M - \dot{\delta}_M \mathbf{n}_M \quad (46)$$

碰撞点 M 处的切向速度单位矢量可以表示为

$$\mathbf{t}_M = \frac{\dot{\mathbf{t}}_M}{|\dot{\mathbf{t}}_M|} \quad (47)$$

当 $\mathbf{e}_j$ 与 $\mathbf{e}_B$ 平行时,轴体与轴套发生轴向接触

时为两个轴向端面的碰撞,碰撞点的分析与上述轴向接触状态分析类似。同理,也可求得轴体与轴套上潜在碰撞点 N_j 和 N_B 的理论推导模型。

1.3 接触力模型

Hertz 模型是较早提出的一种接触力模型,该模型基于纯弹性力模型,没有考虑到碰撞时产生的能量耗散, LANKARANI 和 NIKRAVESH 在此基础上引入恢复系数,既考虑到了碰撞时能量损失,又引入恢复系数来描述构件弹性变形,能够较为真实地描述运动副间隙处的接触力。通过 L-N 法向接触力模型对含间隙机构动力学建模,运动副间隙处的法向接触力表达式为

$$F_N = K_N \delta^n \left[1 + \frac{3(1-c_e^2)}{4} \frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}_0} \right] \quad (48)$$

其中

$$K_N = \frac{4}{3(\eta_j + \eta_B)} \sqrt{\frac{R_B R_j}{R_B - R_j}} \quad (49)$$

$$\begin{cases} \eta_j = \frac{1 - \zeta_j^2}{E_j} \\ \eta_B = \frac{1 - \zeta_B^2}{E_B} \end{cases} \quad (50)$$

式中 K_N ——刚度系数 δ ——嵌入深度, mm

n ——金属表面幂指数,取 1.5

c_e ——恢复系数

$\dot{\delta}$ ——相对碰撞速度, m/s

$\dot{\delta}_0$ ——初始相对碰撞速度, m/s

η_j, η_B ——轴体和轴套的材料参数

R_j, R_B ——轴体和轴套半径

ζ_j, ζ_B ——轴体和轴套泊松比

E_j, E_B ——轴体和轴套弹性模量, GPa

修正的 Coulomb 摩擦力模型在求解切向摩擦力时的使用较为广泛,并且通过引入动态修正系数,解决了速度接近 0 时仿真结果发散的问题,较为准确地描述了运动副间隙处的摩擦现象^[9]。采用修正的 Coulomb 切向摩擦力模型进行含间隙动力学的建模,运动副间隙处切向摩擦力表达式为

$$F_T = c_f c_d F_N \frac{v_t}{|v_t|} \quad (51)$$

其中

$$c_d = \begin{cases} 0 & (|v_t| < v_0) \\ \frac{|v_t| - v_0}{v_1 - v_0} & (v_0 \leq |v_t| \leq v_1) \\ 1 & (|v_t| > v_1) \end{cases} \quad (52)$$

式中 c_f ——滑动摩擦因数

v_t ——切向速度标量, m/s

c_d ——动态修正系数

v_0, v_1 ——给定的速度极限值, m/s

通过对接触力模型求解,可得到运动副间隙处产生的接触力为

$$\boldsymbol{F}_f = F_N \boldsymbol{n}_n + F_T \boldsymbol{t}_t \quad (53)$$

式中 $\boldsymbol{n}_n$ 、 $\boldsymbol{t}_t$ ——法向、切向单位矢量

1.4 考虑混合间隙的并联机构动力学建模

4-UPS/RPU 并联机构可用于加工机器人、坐标测量机等精密装备的主体机构,机构中运动副的存在会直接影响机构的动力学特性,导致装备工作精度降低,故研究间隙对机构动力学影响十分必要。考虑运动副间隙时,采用接触力替代铰链处的约束方程,对球面副 S_2 、 S_5 和转动副 R_1 处考虑间隙,其他铰链处均为理想运动副。考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构结构示意图如图 5 所示。

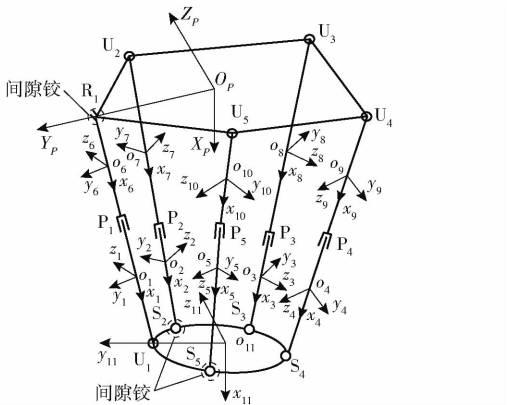


图 5 考虑混合间隙的并联机构示意图
Fig.5 Schematic of parallel mechanism considering hybrid clearance

4-UPS/RPU 并联机构共有 11 个活动构件,则机构整体的广义坐标表示为

$$\boldsymbol{q}_s = [\boldsymbol{q}_{s1}^T \quad \boldsymbol{q}_{s2}^T \quad \boldsymbol{q}_{s3}^T \quad \boldsymbol{q}_{s4}^T \quad \boldsymbol{q}_{s5}^T \quad \boldsymbol{q}_{s6}^T \quad \boldsymbol{q}_{s7}^T \quad \boldsymbol{q}_{s8}^T \quad \boldsymbol{q}_{s9}^T \quad \boldsymbol{q}_{s10}^T \quad \boldsymbol{q}_{s11}^T]^T \quad (54)$$

对球面副 S_2 、 S_5 和转动副 R_1 处考虑间隙,则铰链处对应的约束方程被去掉,此时考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}_h^S(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{U2}^S & \boldsymbol{\Phi}_{U3}^S & \boldsymbol{\Phi}_{U4}^S & \boldsymbol{\Phi}_{U5}^S & \boldsymbol{\Phi}_{U1}^S & \boldsymbol{\Phi}_{S3}^S \\ \boldsymbol{\Phi}_{S4}^S & \boldsymbol{\Phi}_{P1}^S & \boldsymbol{\Phi}_{P2}^S & \boldsymbol{\Phi}_{P3}^S & \boldsymbol{\Phi}_{P4}^S & \boldsymbol{\Phi}_{P5}^S & \boldsymbol{\Phi}_d^S \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{O}_{56 \times 1} \quad (55)$$

将式(55)对时间求一阶和二阶偏导,得到系统速度和加速度约束方程

$$\boldsymbol{\Phi}_{hq}^S \dot{\boldsymbol{q}}_S = -\boldsymbol{\Phi}_{hi}^S \equiv \boldsymbol{v}_{56 \times 1} \quad (56)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{hq}^S \ddot{\boldsymbol{q}}_S = -(\boldsymbol{\Phi}_{hq}^S \dot{\boldsymbol{q}}_S)_q \dot{\boldsymbol{q}}_S - 2\boldsymbol{\Phi}_{hqt}^S \dot{\boldsymbol{q}}_S - \boldsymbol{\Phi}_{hii}^S \equiv \boldsymbol{\varepsilon}^S \quad (57)$$

建立考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构带有拉格朗日乘子的动力学方程为

$$\boldsymbol{M}_h^S \ddot{\boldsymbol{q}}_S + (\boldsymbol{\Phi}_{hq}^S)^T \boldsymbol{\lambda}^S = \boldsymbol{Q}_h^S \quad (58)$$

式中 $\boldsymbol{M}_h^S$ ——并联机构质量矩阵

$\boldsymbol{\lambda}^S$ ——拉格朗日乘子矢量

$\boldsymbol{Q}_h^S$ ——广义力矢量,包括广义力和广义力矩

由于运动副间隙处的约束方程被接触力所取代,因此需将间隙处的接触力引入到广义力矢量 $\boldsymbol{Q}_h^S$ 中。

4-UPS/RPU 并联机构的球面副 S_2 、 S_5 和转动副 R_1 处间隙模型图如图 6 所示,根据球面副间隙和转动副间隙几何模型以及接触力模型,计算运动副间隙处的接触力和力矩。

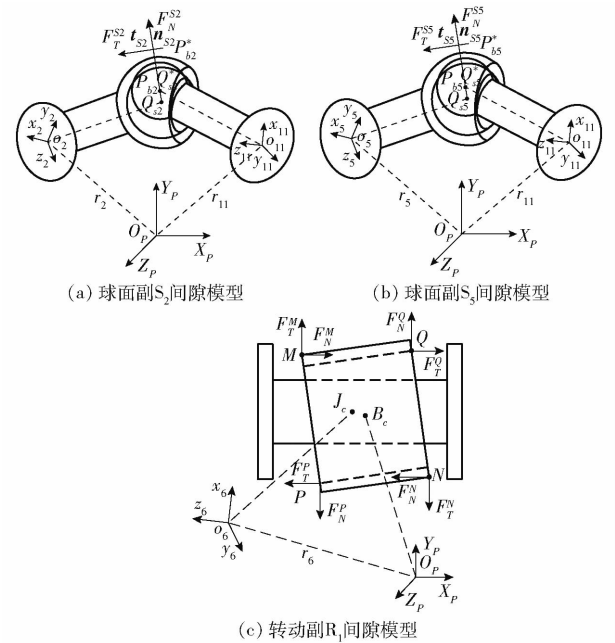


图 6 运动副间隙模型图
Fig.6 Model diagrams of joint clearances

根据球面副 S_2 、 S_5 处间隙模型,得到伸缩杆 2、伸缩杆 5 和动平台所受的接触力为

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{11}^{S2} = F_N^{S2} \boldsymbol{n}_{S2} + F_T^{S2} \boldsymbol{t}_{S2} \\ \boldsymbol{F}_2^{S2} = -\boldsymbol{F}_{11}^{S2} \\ \boldsymbol{F}_{11}^{S5} = F_N^{S5} \boldsymbol{n}_{S5} + F_T^{S5} \boldsymbol{t}_{S5} \\ \boldsymbol{F}_5^{S5} = -\boldsymbol{F}_{11}^{S5} \end{cases} \quad (59)$$

式中 F_N^{S2} ——球副 S_2 中的法向力, N

F_T^{S2} ——球副 S_2 中的切向力, N

$\boldsymbol{F}_{11}^{S2}$ ——球副 S_2 中球头给球套的力, N

$\boldsymbol{F}_2^{S2}$ ——球副 S_2 中球套给球头的力, N

F_N^{S5} ——球副 S_5 中的法向力, N

F_T^{S5} ——球副 S_5 中的切向力, N

$\boldsymbol{F}_{11}^{S5}$ ——球副 S_5 中球头对球套的力, N

$\boldsymbol{F}_5^{S5}$ ——球副 S_5 中球套对球头的力, N

$\boldsymbol{n}_{S2}$ 、 $\boldsymbol{n}_{S5}$ ——球副 S_2 和 S_5 碰撞点法向向量

$\boldsymbol{t}_{S2}$ 、 $\boldsymbol{t}_{S5}$ ——球副 S_2 和 S_5 碰撞点切向向量

球面副 S_2 、 S_5 间隙处接触点所受接触力在伸缩杆 2、伸缩杆 5 和动平台质心处产生的力矩为

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11}^{S_2} = (\mathbf{r}_{Q_{s2}}^* - \mathbf{r}_{11}) \times \mathbf{F}_{11}^{S_2} \\ \mathbf{M}_2^{S_2} = (\mathbf{r}_{pb2}^* - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{11}^{S_2} \\ \mathbf{M}_{11}^{S_5} = (\mathbf{r}_{Q_{s5}}^* - \mathbf{r}_{11}) \times \mathbf{F}_{11}^{S_5} \\ \mathbf{M}_5^{S_5} = (\mathbf{r}_{pb5}^* - \mathbf{r}_5) \times \mathbf{F}_{11}^{S_5} \end{cases} \quad (60)$$

式中 $\mathbf{r}_{Q_{s2}}^*$ ——球副 S_2 球套上潜在碰撞点位置矢量
 $\mathbf{r}_{pb2}^*$ ——球副 S_2 球头上潜在碰撞点位置矢量
 $\mathbf{r}_{Q_{s5}}^*$ ——球副 S_5 球套上潜在碰撞点位置矢量
 $\mathbf{r}_{pb5}^*$ ——球副 S_5 球头上潜在碰撞点位置矢量
 $\mathbf{r}_{11}$ ——构件 11 质心位置矢量
 $\mathbf{r}_2$ ——构件 2 质心位置矢量
 $\mathbf{r}_5$ ——构件 5 质心位置矢量
 $\mathbf{M}_{11}^{S_2}$ ——球副 S_2 对构件 11 产生的力矩, $\text{N} \cdot \text{m}$
 $\mathbf{M}_2^{S_2}$ ——球副 S_2 对构件 2 产生的力矩, $\text{N} \cdot \text{m}$
 $\mathbf{M}_{11}^{S_5}$ ——球副 S_5 对构件 11 产生的力矩, $\text{N} \cdot \text{m}$
 $\mathbf{M}_5^{S_5}$ ——球副 S_5 对构件 5 产生的力矩, $\text{N} \cdot \text{m}$

根据转动副 R_1 处间隙模型, 以径向碰撞点 P 为例计算间隙处的接触力和力矩, 则接触力和力矩可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1^P = F_N^P \mathbf{n}_p + F_T^P \mathbf{t}_p \\ \mathbf{M}_1^P = (\mathbf{r}_{p1} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_1^P \end{cases} \quad (61)$$

式中 $\mathbf{F}_1^P$ ——转动副 R_1 间隙处摆动杆 1 受到的接触力, N
 $\mathbf{M}_1^P$ ——转动副 R_1 间隙处的接触力在摆动杆 1 质心处产生的力矩, $\text{N} \cdot \text{m}$
 $\mathbf{r}_{p1}$ ——摆动杆 1 间隙处的碰撞点位置矢量

考虑到转动副间隙的径向接触状态和轴向接触状态, 转动副 R_1 间隙处摆动杆 1 受到的接触力和力矩可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1^{R1} = \mathbf{F}_1^P + \mathbf{F}_1^Q + \mathbf{F}_1^M + \mathbf{F}_1^N \\ \mathbf{M}_1^{R1} = \mathbf{M}_1^P + \mathbf{M}_1^Q + \mathbf{M}_1^M + \mathbf{M}_1^N \end{cases} \quad (62)$$

则考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构广义力矢量 $\mathbf{Q}_h^S$ 可以表示为

$$\mathbf{Q}_h^S = [\mathbf{Q}_1^S \quad \mathbf{Q}_2^S + \mathbf{Q}_{2h}^S \quad \mathbf{Q}_3^S \quad \mathbf{Q}_4^S \quad \mathbf{Q}_5^S + \mathbf{Q}_{5h}^S \quad \mathbf{Q}_6^S + \mathbf{Q}_{6h}^S \quad \mathbf{Q}_7^S \quad \mathbf{Q}_8^S \quad \mathbf{Q}_9^S \quad \mathbf{Q}_{10}^S \quad \mathbf{Q}_{11}^S + \mathbf{Q}_{11h}^S]^T \quad (63)$$

$$\text{其中} \quad \mathbf{Q}_{2h}^S = [(\mathbf{F}_2^{S_2})^T \quad (\mathbf{M}_2^{S_2})^T]^T \quad (64)$$

$$\mathbf{Q}_{5h}^S = [(\mathbf{F}_5^{S_5})^T \quad (\mathbf{M}_5^{S_5})^T]^T \quad (65)$$

$$\mathbf{Q}_{6h}^S = [(\mathbf{F}_1^{R1})^T \quad (\mathbf{M}_1^{R1})^T]^T \quad (66)$$

$$\mathbf{Q}_{11h}^S = [(\mathbf{F}_{11}^{S_2} + \mathbf{F}_{11}^{S_5})^T \quad (\mathbf{M}_{11}^{S_2} + \mathbf{M}_{11}^{S_5})^T]^T \quad (67)$$

建立考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构动力学方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^S & (\boldsymbol{\Phi}_{hq}^S)^T \\ \boldsymbol{\Phi}_{hq}^S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_h^S \\ \boldsymbol{\lambda}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_h^S \\ \boldsymbol{\epsilon}^S - 2\alpha^* \boldsymbol{\Phi}_h^S - (\beta^*)^2 \boldsymbol{\Phi}_h^S \end{bmatrix} \quad (68)$$

2 考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构动力学响应分析

2.1 动力学方程求解

对于考虑运动副间隙的并联机构动力学方程, 求解流程如图 7 所示。

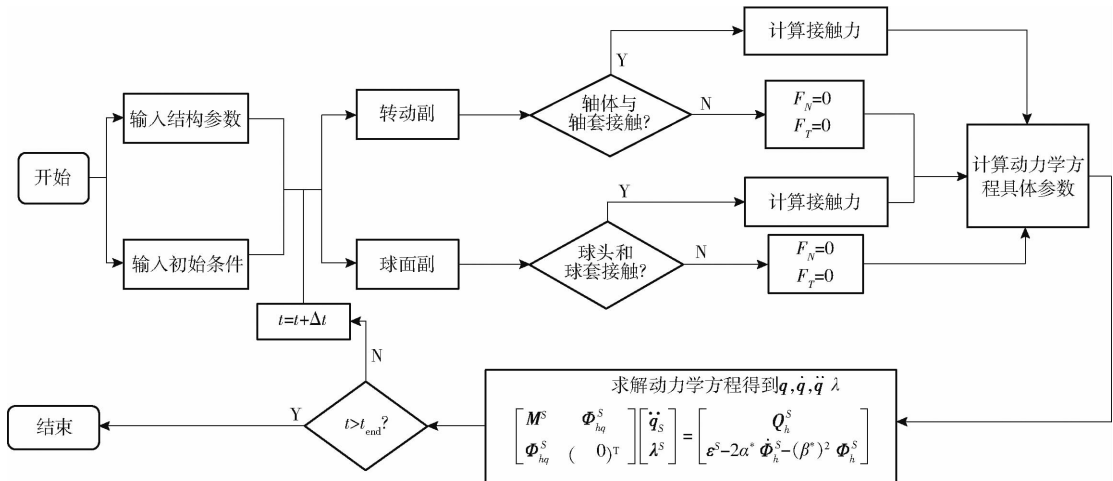


图 7 考虑运动副间隙的并联机构动力学方程求解流程图

Fig. 7 Solution flow of dynamic equation of parallel mechanism considering clearances

动力学方程求解流程具体操作步骤为:

(1) 定义并联机构的结构参数及 $t=0$ 时的广义坐标 $\mathbf{q}$ 、广义速度 $\dot{\mathbf{q}}$, 确定摩擦因数 μ_d 、间隙 c 和恢复系数 c_e 等参数。

(2) 判断间隙元素是否接触。若发生接触, 则根据接触力模型计算接触力; 若没有发生接触, 则接

触力为 0。

(3) 计算动力学方程中的质量矩阵 $\mathbf{M}$ 、雅可比矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_q$ 和广义力矢量 $\mathbf{Q}$ 。

(4) 求解动力学方程, 得到时间 t 时的广义坐标 $\mathbf{q}$ 、广义速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 和广义加速度 $\ddot{\mathbf{q}}$ 。

(5) 判断仿真时间是否到达终止时间, 若到达

终止时间则运算结束,若未到达终止时间则更新时间返回步骤(2)继续运算。

采用龙格库塔法对考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构动力学方程进行数值求解,得到动平台的动力学响应曲线和间隙处的碰撞力及轴心轨迹曲线。为研究运动副间隙对 4-UPS/RPU 并联机构动力学响应的影响,使得并联机构动平台有较好的周期性,选取并联机构动平台运动轨迹为

$$\begin{cases} X = 1.21 - 0.03\cos(\omega t) \\ Y = 0.03\sin(\omega t) \\ Z = 0 \end{cases} \quad (69)$$

考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构结构参数如表 1 所示,动力学仿真参数如表 2 所示。

表 14-UPS/RPU 并联机构结构参数

Tab. 1 Structural parameters of 4-UPS/RPU parallel mechanism

参数	数值
伸缩杆质量 $m_1^s \sim m_5^s/\text{kg}$	8.57
摆动杆质量 $m_6^s \sim m_{10}^s/\text{kg}$	10.54
动平台质量 m_{11}^s/kg	18.64
伸缩杆长度 $l_1 \sim l_5/\text{m}$	0.840
摆动杆长度 $l_6 \sim l_{10}/\text{m}$	0.760
定平台参数 r_p/m	0.645
定平台参数 l_{R1}/m	0.710
动平台参数 r_{11}/m	0.202
动平台参数 l_{U1x}/m	0.059
动平台参数 l_{U1y}/m	0.229
伸缩杆转动惯量 $I_{x1}^s \sim I_{x5}^s/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	1.71×10^{-3}
伸缩杆转动惯量 $I_{y1}^s \sim I_{y5}^s/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.550
伸缩杆转动惯量 $I_{z1}^s \sim I_{z5}^s/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.550
摆动杆杆转动惯量 $I_{x6}^s \sim I_{x10}^s/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	6.50×10^{-3}
摆动杆杆转动惯量 $I_{y6}^s \sim I_{y10}^s/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.643
摆动杆杆转动惯量 $I_{z6}^s \sim I_{z10}^s/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.643
动平台转动惯量 $I_{x11}^s/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.458
动平台转动惯量 $I_{y11}^s/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.237
动平台转动惯量 $I_{z11}^s/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.237

对动力学仿真过程运行两个周期以更好地观察并联机构的运动状态,分析间隙类型、驱动速度、间隙和摩擦因数对机构动力学响应的影响,并利用 ADAMS 软件对并联机构进行虚拟样机仿真,通过与 Matlab 数值计算结果对比分析做进一步验证。

2.2 间隙类型对机构动力学响应的影响

4-UPS/RPU 并联机构中含有多个球面副和一个转动副,现对球面副 S_2 、 S_5 和转动副 R_1 处考虑间隙,分别分析 4-UPS/RPU 并联机构考虑多球面副间隙(考虑球面副 S_2 和 S_5 处间隙)和混合间隙(考虑

表 2 考虑间隙的 4-UPS/RPU 并联机构动力学仿真参数

Tab. 2 Dynamic simulation parameters of 4-UPS/RPU parallel mechanism considering clearance

参数	数值
弹性模量 E_j 、 E_b/GPa	207
恢复系数 c_e	0.9
轴套长度 l_B/m	0.180
轴套外径 R_{B2}/m	0.014
极限速度 $v_0/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	0.000 1
Baumrate 修正系数 α^*	5
Baumrate 修正系数 β^*	5
泊松比 ζ_j 、 ζ_b	0.3
摩擦因数 c_f	0.05
轴套内径 R_{B1}/m	0.010
球体半径 R_b/m	0.015
极限速度 $v_1/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	0.01
积分时长/s	0.000 1

球面副 S_2 、 S_5 和转动副 R_1 处间隙)时的动力学响应。取间隙 c 为 0.3 mm(转动副间隙中径向间隙与轴向间隙尺寸相同),驱动角速度 ω 为 3.14 rad/s,其他仿真参数如表 2 所示。

不同间隙类型时动平台的响应曲线如图 8 所示。从图 8a、8b 可以看出,不同间隙类型下 X 方向位移基本一致,但 Y 方向位移产生了偏差,考虑混合间隙时 Y 方向位移偏差为 3.4 mm,考虑多球面副间隙时位移偏差为 2.1 mm。分析其可能原因为:并联机构 5 条支链沿 X 轴成角度分布,因此会限制动平台 X 方向位移,且 Y 方向负方向均为理想铰链,使得动平台往 Y 方向正方向产生偏移。从图 8c、8d 可以看出,在运动初始阶段速度曲线发生了波动,且 Y 方向速度波动幅值较大,考虑混合间隙时速度波动幅值为 0.175 m/s,考虑多球面副间隙时速度波动幅值为 0.127 m/s。从图 8e、8f 可以看出,运动副间隙对加速度曲线影响较大,在运动初始阶段,加速度发生突变,且 Y 方向加速度突变较大,考虑多球面副间隙时加速度突变值达到 -36.68 m/s^2 ,考虑混合间隙时加速度突变值达到 122.7 m/s^2 。运动稳定后,考虑多球面副间隙时加速度曲线与理想曲线基本一致,但考虑混合间隙时加速度曲线出现波动,波动幅值约 0.435 m/s^2 。

考虑混合间隙时运动副间隙处的碰撞力曲线如图 9 所示。从图 9 可以看出,在初始运动阶段,碰撞力发生了突变,球面副 S_2 、 S_5 和转动副 R_1 处碰撞力突变峰值分别为 7.534×10^3 、 2.274×10^4 、 $1.062 \times 10^4 \text{ N}$,突变时间均发生在 0.07 s 时。运动稳定后,运动副间隙处的碰撞力稳定在一定范围内,稳定时间发生在 0.62 s 左右,球面副 S_2 、 S_5 和转动副 R_1 间

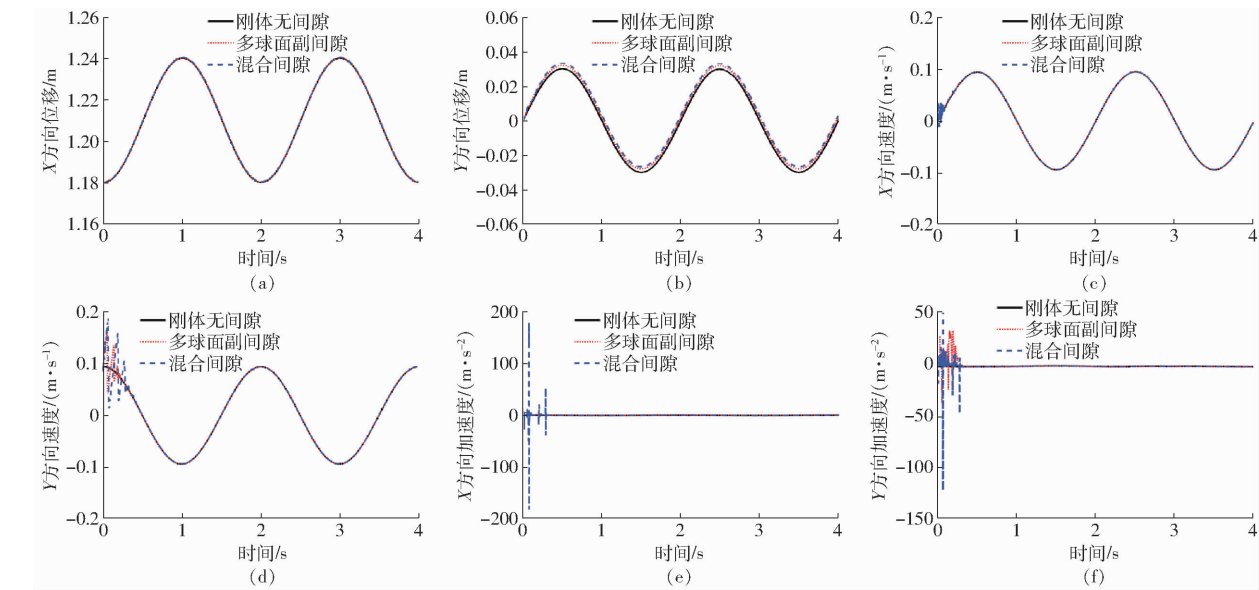


图 8 不同间隙类型动平台响应曲线

Fig. 8 Response curves of moving platform with different clearance types

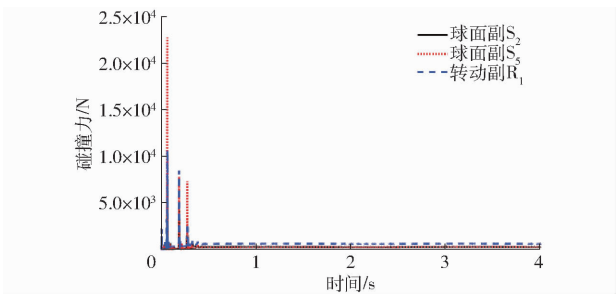


图 9 间隙处碰撞力曲线

Fig. 9 Collision force curves at clearance

隙处碰撞力分别稳定在 230、230、580 N 左右。碰撞力曲线均出现了一定幅值的振动,球面副 S_2 和 S_3 间隙处碰撞力最大振动幅值为 58.6 N,转动副 R_1 间隙处碰撞力最大振动幅值为 89.8 N。

考虑混合间隙时运动副间隙处轴心轨迹如图 10 所示。从图 10a ~ 10d 中可以看出,在运动初始阶段,球体与球套发生碰撞,使得碰撞力发生突变,0.6 s 后机构运行稳定,此时球体的运动轨迹趋于很小范围内,球体与球套处于连续接触状态。从图 10e、10f 中可以看出,轴体上顶点和下顶点的运动轨迹基本一致,且在运动初始阶段轴体与轴套发生碰撞,0.6 s 后机构运动稳定,轴体与轴套处于连续接触状态。

由图 8 ~ 10 可知,考虑运动副间隙后,动平台位移和速度曲线基本没有太大变化,而动平台加速度曲线和间隙处的碰撞力发生了较大改变,且考虑混合间隙比考虑多球面副间隙时对动平台响应的影响大。在运动初始阶段,碰撞力曲线发生突变,3 个运动副间隙处碰撞力突变时间一致,但球面副 S_3 处碰撞力峰值最高,运动稳定后,碰撞力稳定在一定范围

内,但出现小幅度振动。分析其可能原因为:考虑混合间隙后,3 个运动副间隙处的碰撞力会相互影响,且动平台发生了 Y 方向的偏移,增加了间隙处运动状态的不确定性,机构运行稳定后,由于转动副间隙处的接触形式较多,因此碰撞力相对较大。

2.3 间隙对机构动力学响应的影响

并联机构为适应不同的运动状态通常会选用不同的装配公差进行装配,因此运动副间隙也不同,在正常工作过程中,运动副间隙还会随着运动副元素的磨损而变大,因此研究不同间隙对并联机构动力学响应的影响是有必要的。取驱动角速度 $\omega = 3.14 \text{ rad/s}$,其他仿真参数如表 2 所示,分别取间隙 $c_1 = 0.2 \text{ mm}$ 、 $c_2 = 0.3 \text{ mm}$ 、 $c_3 = 0.4 \text{ mm}$,分析考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构动力学响应。

不同间隙时动平台响应曲线如图 11 所示。从图 11a、11b 可看出,间隙对机构动平台位移影响较小,随着间隙的增大,动平台 X 方向位移基本没有变化,但 Y 方向位移偏差变大,随间隙增大, Y 方向位移偏差分别为 2.28、3.35、4.43 mm。从图 11c、11d 可看出,在运动初始阶段速度曲线发生了振动,随间隙的增大振动幅值略有变化,且 Y 方向振动幅值相对较大, Y 方向振幅分别为 0.144、0.175、0.201 m/s。从图 11e、11f 可以看出,间隙对动平台加速度的影响较大,在运动初始阶段,加速度发生较大变化。间隙越大加速度峰值越大,加速度曲线越晚趋于稳定, Y 方向加速度突变幅值分别为 -41.2、-122.7、-215.4 m/s^2 ,稳定时间分别为 0.537、0.592、0.653 s。运动稳定后,随着间隙尺寸的改变,动平台加速度曲线的波动幅值没有发生明显变化, X 方向加速度波动幅值为 0.233 5 m/s^2 左

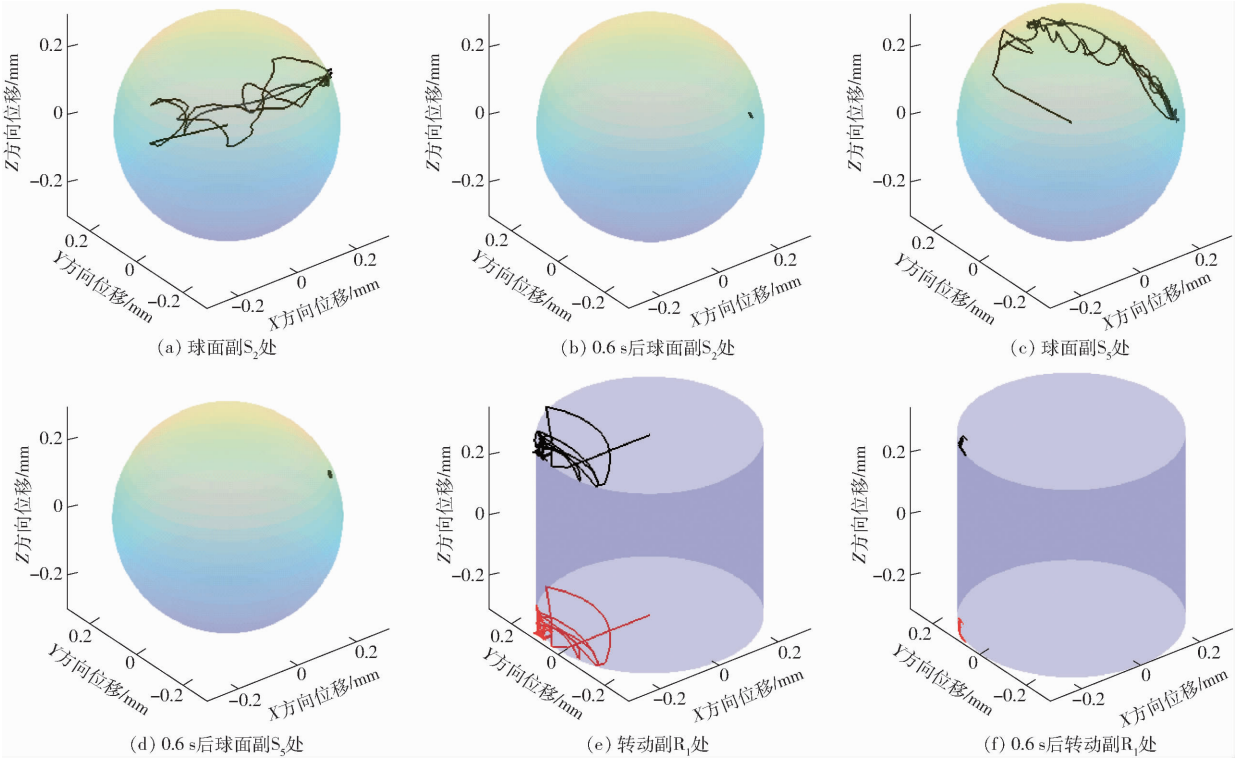


图 10 间隙处轴心轨迹曲线
Fig. 10 Trajectory curves of axis at clearance

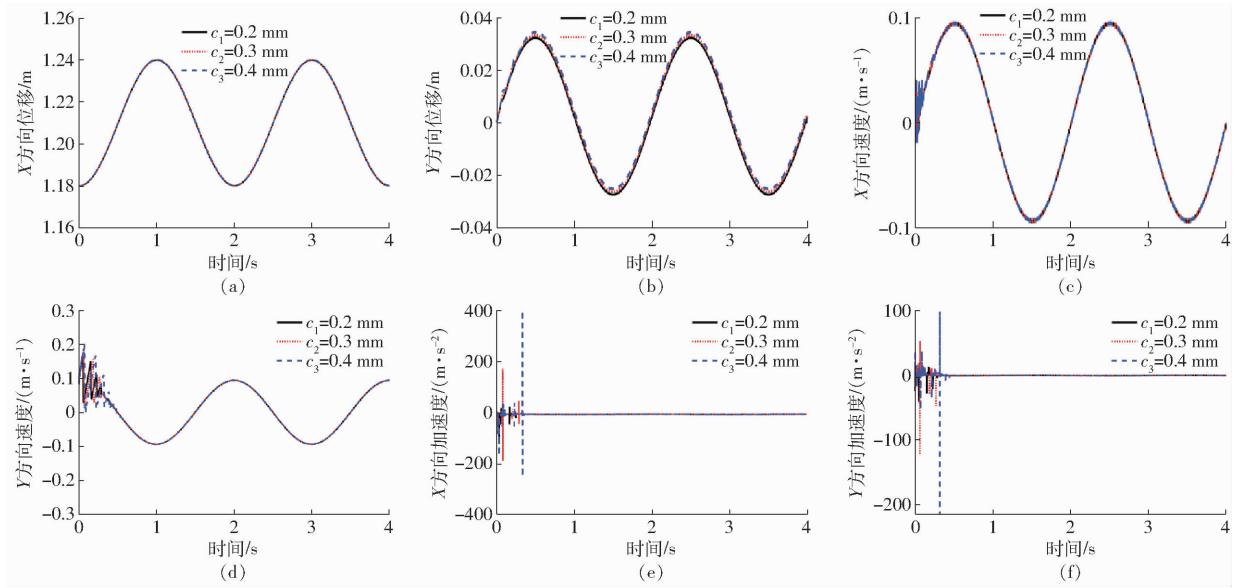


图 11 不同间隙尺寸动平台响应曲线
Fig. 11 Response curves of moving platform with different clearance sizes

右, Y 方向加速度波动幅值为 0.364 m/s^2 左右, 且波动的时间一致。

不同间隙时运动副间隙处碰撞力曲线如图 12 所示。从图 12 可以看出, 在运动初始阶段, 运动副间隙处的碰撞力发生突变。随着间隙的增大, 碰撞力突变峰值也随之增大, 球面副 S_2 处碰撞力峰值分别为 7.346×10^3 、 7.534×10^3 、 $9.429 \times 10^3\text{ N}$, 球面副 S_5 处碰撞力峰值分别为 7.341×10^3 、 2.274×10^4 、 $4.067 \times 10^4\text{ N}$, 转动副 R_1 处碰撞力峰值分别为

1.008×10^4 、 1.062×10^4 、 $1.180 \times 10^4\text{ N}$ 。间隙越大碰撞力曲线越晚趋于稳定, 稳定时间分别为 0.539 、 0.592 、 0.655 s , 3 个运动副间隙处的碰撞力稳定时间基本一致。运动稳定后, 碰撞力曲线在一定范围内波动, 运动副 S_2 、 S_5 、 R_1 间隙处的碰撞力分别稳定在 230 、 230 、 580 N 左右。

对比图 11、12 可知, 随间隙的增大, 碰撞力和加速度突变峰值变大, 且碰撞力和加速度稳定下来的时间越长。运动稳定后, 不同间隙尺寸下的碰撞力

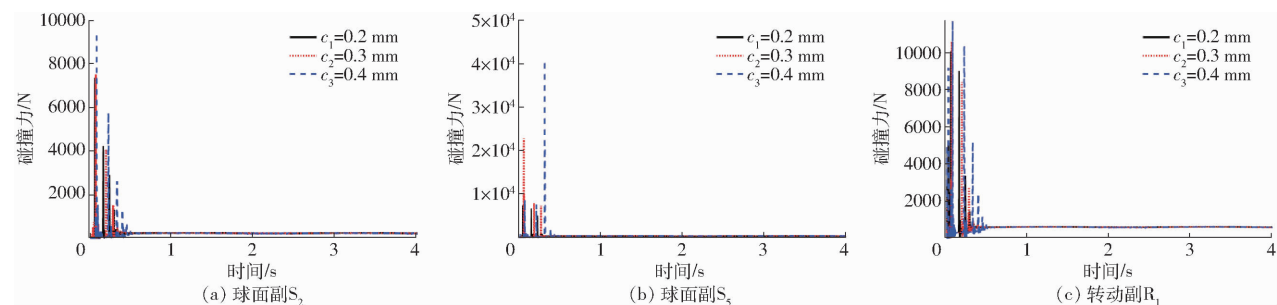


图 12 不同间隙时间隙处碰撞力曲线

Fig. 12 Collision force curves at clearance with different clearance sizes

曲线没有明显差异。分析其可能原因为：运动副间隙越大，间隙处的构件接触越剧烈，使得初始时刻的碰撞力有较大变化，因此需要更长时间稳定。当运动稳定后，轴体与轴套处于连续接触状态，因此碰撞力不会随间隙的改变而变化。

2.4 驱动速度对机构动力学响应的影响

并联机构在工作过程中需适应不同的工作场合，因此机构的驱动速度也会发生变化。因此分析不同驱动速度对并联机构动力学响应的影响，可以一定程度上改善并联机构的运动性能。

取间隙 $c = 0.3 \text{ mm}$ ，其他仿真参数如表 2 所示，分别取 $\omega_1 = 1.57 \text{ rad/s}$ ， $\omega_2 = 3.14 \text{ rad/s}$ ， $\omega_3 = 4.71 \text{ rad/s}$ 时的运动轨迹，分析考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构动力学响应。

不同驱动角速度下动平台的响应曲线如图 13 所示。从图 13a、13b 可看出，运动副间隙对并联机构动平台位移的影响不大，不同驱动速度下动平台位移幅值不变，驱动速度增大时运动周期变短，符合运动规律。从图 13c、13d 可看出，在运动初始阶段，Y 方向速度曲线波动幅值相比 X 方向较大，随驱动速度

增大波动峰值略有增加，X 方向速度波动幅值分别为 0.008 、 0.040 、 0.047 m/s ，Y 方向速度波动峰值分别为 0.149 、 0.185 、 0.232 m/s 。从图 13e、13f 可以看出，在初始运动阶段，加速度发生突变，突变峰值没有随驱动速度的增大产生明显规律，X 方向加速度突变峰值分别为 129.1 、 180.4 、 -70.6 m/s^2 ，Y 方向加速度突变峰值分别为 -89.6 、 -122.7 、 -48.72 m/s^2 。驱动速度越大加速度曲线越早趋于稳定，稳定时间分别为 0.774 、 0.652 、 0.502 s 。运动稳定后，随驱动速度的增大，加速度波动幅值略有增加。

不同驱动角速度时运动副间隙处碰撞力曲线如图 14 所示。从图 14 可看出，在运动初始阶段，随驱动速度的增大，3 个运动副间隙处的碰撞力峰值变化并不一致，球面副 S_2 处碰撞力峰值分别为 8.160×10^3 、 7.534×10^3 、 $7.712 \times 10^3 \text{ N}$ ，球面副 S_5 处碰撞力峰值分别为 1.437×10^4 、 2.274×10^4 、 $8.927 \times 10^3 \text{ N}$ ，转动副 R_1 处碰撞力峰值分别为 9.648×10^3 、 1.062×10^4 、 $1.099 \times 10^4 \text{ N}$ 。驱动速度越大碰撞力曲线越早趋于稳定，稳定时间分别为 0.767 、 0.641 、 0.503 s ，与加速度曲线稳定时间较为

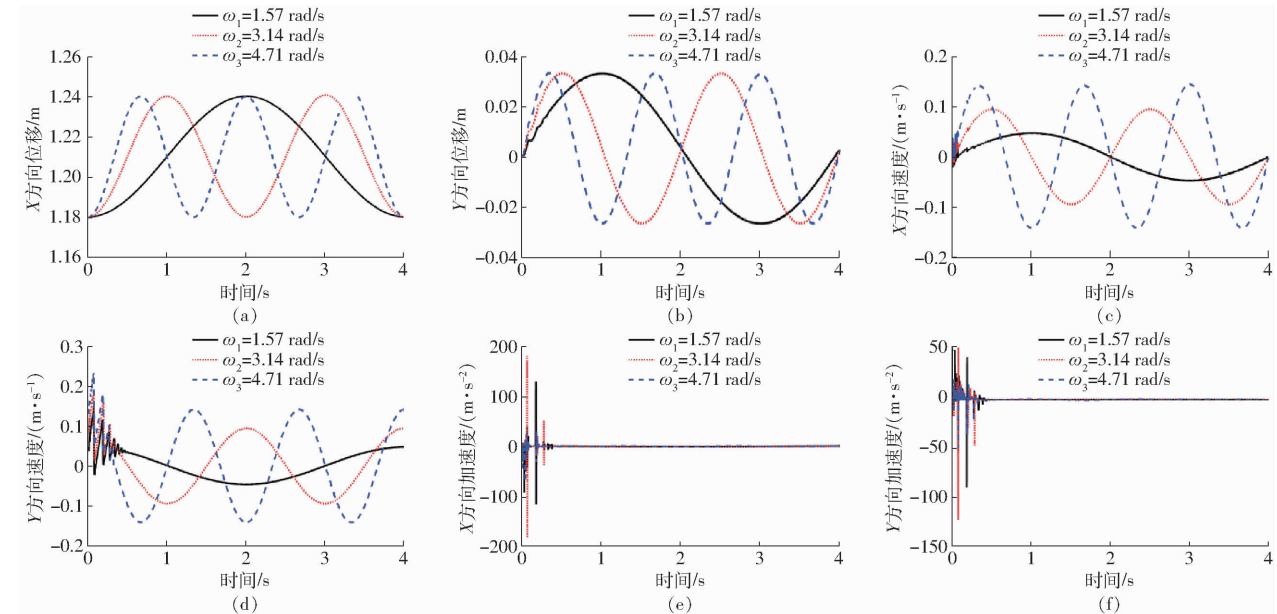


图 13 不同驱动角速度下动平台响应曲线

Fig. 13 Response curves of moving platform at different driving speeds

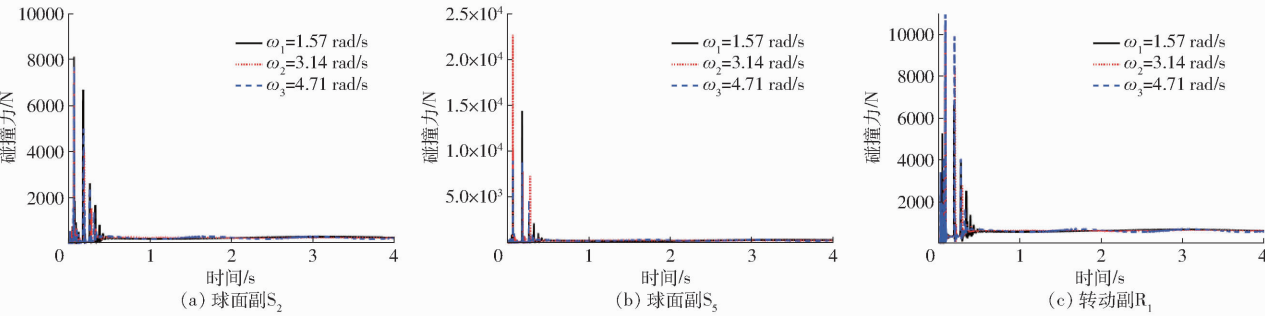


图 14 不同驱动角速度下间隙处碰撞力曲线

Fig. 14 Collision force curves at clearance at different driving speeds

吻合。运动稳定后,随着驱动速度的增大,球面副 S_2 和 S_5 间隙处的碰撞力曲线波动幅值分别为 8.2、58.6、74.8 N,转动副 R_1 间隙处的碰撞力波动幅值分别为 8.5、89.8、116.9 N。

由图 13、14 可知,随驱动速度的增大,间隙处的碰撞力峰值变化并不一致,但碰撞力越早趋于稳定。运动稳定后,碰撞力波动幅值随驱动速度的增大而增大。分析其可能原因为:运动开始后,间隙处两元素发生接触,驱动速度越大则接触频率越快,使得间隙处的运动状态越早趋于稳定,而作用于动平台上的 3 个运动副间隙处的碰撞力会相互影响,增加了间隙处运动状态的不确定性,导致间隙处的碰撞力变化不一致,运动稳定后,间隙处的接触状态变为连续接触状态,驱动速度越大则碰撞力的振动幅值越大。

2.5 摩擦因数对机构动力学响应的影响

并联机构在运动过程中间隙处会产生摩擦力,而不同材料由于摩擦因数不同产生的摩擦力也会有差别。

4-UPS/RPU 并联机构动平台轨迹如式(69)所示,取驱动角速度 $\omega = 3.14 \text{ rad/s}$,间隙 $c = 0.3 \text{ mm}$,其他仿真参数如表 2 所示,分别取摩擦因数 $c_{f1} =$

0.04 、 $c_{f2} = 0.05$ 、 $c_{f3} = 0.06$,分析考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构动力学响应。

不同摩擦因数时动平台响应曲线如图 15 所示。从图 15a、15b 可以看出,摩擦因数对动平台位移影响不大,不同摩擦因数下动平台的位移曲线基本不变。从图 15c、15d 可以看出,随摩擦因数的增大,速度曲线波动幅值略有减小,运动平稳后不同摩擦因数时的速度曲线基本一致。从图 15e、15f 可看出,摩擦因数对动平台加速度的影响较大,在运动初始阶段加速度曲线发生较大突变,但摩擦因数越大加速度曲线越早趋于稳定,稳定时间分别为 0.628、0.605、0.578 s。运动稳定后,随摩擦因数的改变加速度曲线波动幅值变化较大,X 方向加速度曲线波动幅值分别为 0.862、0.224、0.074 m/s^2 ,Y 方向加速度曲线波动幅值分别为 0.426、0.384、0.036 m/s^2 。

不同摩擦因数时运动副间隙处的碰撞力曲线如图 16 所示。从图 16 可以看出,在运动初始阶段,随摩擦因数的增大,球面副 S_2 处的碰撞力峰值分别为 8.672×10^3 、 7.528×10^3 、 $5.146 \times 10^3 \text{ N}$,转动副 R_1 处的碰撞力峰值分别为 1.057×10^4 、 1.047×10^4 、 $9.128 \times 10^3 \text{ N}$,但球面副 S_5 处的碰撞力峰值在摩擦因数为 0.05 时出现了较大突变,达到 $2.3 \times 10^4 \text{ N}$ 。

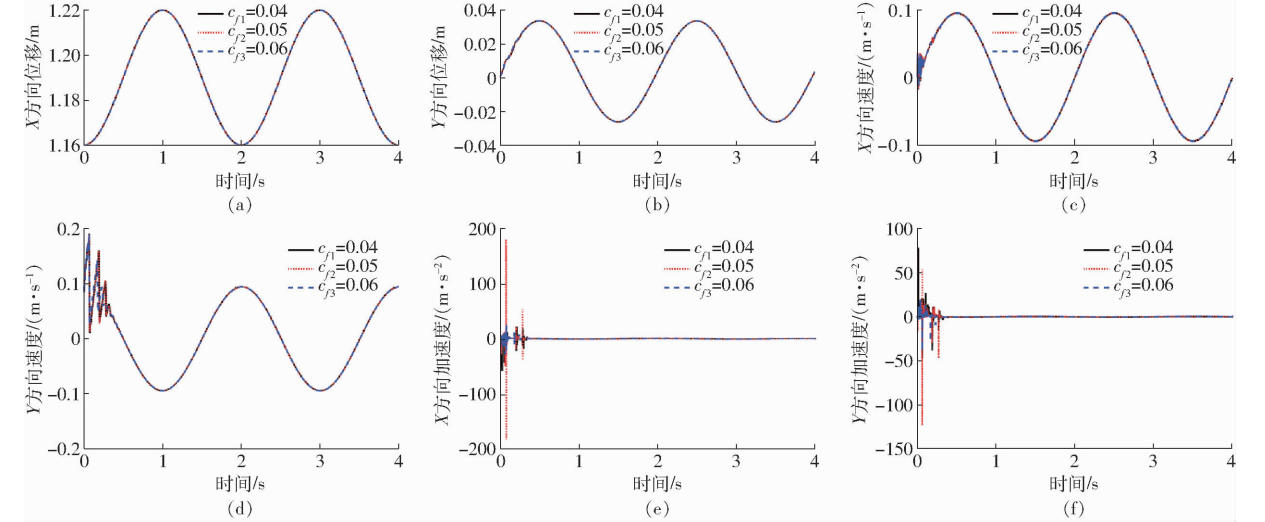


图 15 不同摩擦因数动平台响应曲线

Fig. 15 Response curves of moving platform with different friction coefficients

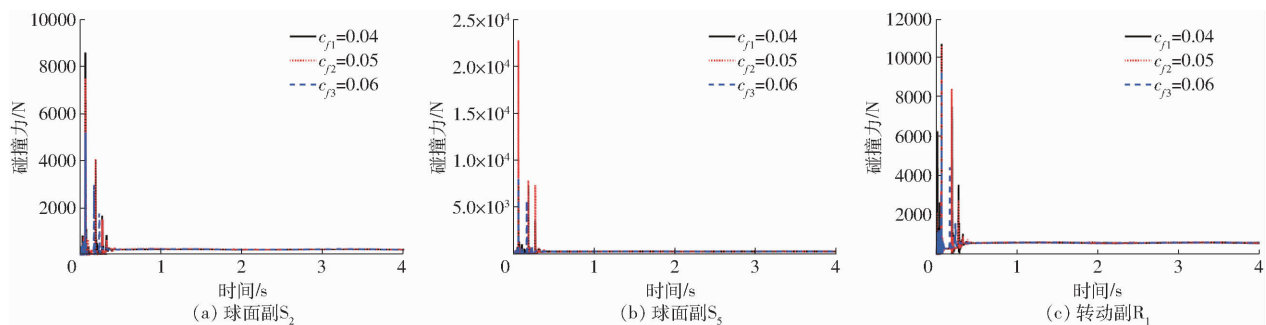


图 16 不同摩擦因数下间隙处碰撞力曲线

Fig. 16 Collision force curves at clearance with different friction coefficients

随着摩擦因数的增大,3 个运动副间隙处碰撞力曲线均越早趋于稳定,稳定时间分别为 0.612、0.596、0.565 s,与加速度曲线较为吻合。运动稳定后,摩擦因数越大碰撞力波动幅值越小,球面副 S_2 和 S_5 间隙处的碰撞力波动幅值一致,分别为 53.6、42.3、6.4 N,转动副 R_1 间隙处的碰撞力波动幅值分别为 90.7、56.1、8.7 N。

由图 15、16 可知,随摩擦因数的增大,3 个运动副间隙处的碰撞力峰值变化并不一致,但摩擦因数越大碰撞力曲线稳定时间越早,运动稳定后,摩擦因数越大碰撞力波动幅值越小。

分析其可能原因为:在运动初始阶段,间隙处两元素的接触以法向接触为主,此时摩擦因数对碰撞力的影响相对较小,且 3 个运动副间隙处的碰撞力相互影响,增大了间隙处运动状态的不确定性,导致运动副间隙处的碰撞力变化不一致。机构运行稳定后,摩擦因数越大则间隙处的滑动摩擦力越大,使得运动副磨损加剧、系统能量损耗增加,因此碰撞力波动变小。

2.6 虚拟样机仿真验证

建立 4-UPS/RPU 并联机构的三维模型并利用 ADAMS 软件进行样机仿真,对球面副 S_2 、 S_5 和转动副 R_1 处引入接触力替代运动副约束,对考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构进行动力学样机仿真,如图 17 所示。对于转动副而言,将轴套和轴设置为两个接触面,法向力选定为碰撞,力指数设定为 1.5;对于球面副而言,将球头和球套的法向接触力选定为碰撞,力指数设定为 1.5;其余参数如表 2 所示。4-UPS/RPU 并联机构动平台运动轨迹如式(69)所示,取驱动角速度 $\omega = 3.14 \text{ rad/s}$,间隙 $c = 0.3 \text{ mm}$,其他仿真参数如表 2 所示,分析并联机构动平台的响应和间隙处的碰撞力。将 ADAMS 样机仿真结果与 Matlab 数值计算结果进行对比,验证含间隙机构动力学模型的正确性。

由于引入了混合间隙,ADAMS 样机仿真在前期相对不稳定,从第 2 个周期进行对比验证,动平台响

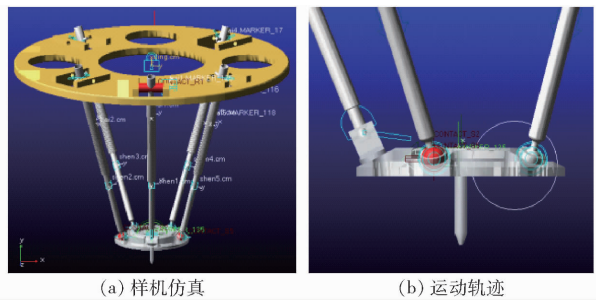


图 17 考虑间隙的 4-UPS/RPU 并联机构 ADAMS 仿真

Fig. 17 ADAMS simulation of 4-UPS/RPU parallel mechanism considering clearance

应对比结果如图 18 所示。从图 18 可以看出,Matlab 数值计算与 ADAMS 样机仿真的位移曲线和速度曲线偏差较小,且没有出现波动, X 方向位移偏差为 $4.8 \times 10^{-4} \text{ m}$, Y 方向位移偏差为 $9.6 \times 10^{-4} \text{ m}$, X 方向速度偏差为 $1.6 \times 10^{-4} \text{ m/s}$, Y 方向速度偏差为 $1.21 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ 。动平台加速度曲线出现了较明显的波动,Matlab 数值计算结果相对 ADAMS 样机仿真结果的加速度曲线波动幅值较大,但 Matlab 数值计算与 ADAMS 样机仿真的加速度曲线趋势和整体数值基本吻合。Matlab 计算结果中,动平台 X 方向加速度的最大波动幅值为 0.229 m/s^2 ,动平台 Y 方向加速度最大波动幅值为 0.401 m/s^2 ,波动时间较长。ADAMS 仿真结果中,动平台 X 方向加速度最大波动幅值为 0.243 m/s^2 ,动平台 Y 方向加速度最大波动幅值为 0.421 m/s^2 ,波动时间相对较短。

运动副间隙处 Matlab 与 ADAMS 碰撞力对比曲线如图 19 所示。从图 19 可以看出,Matlab 数值计算结果中,球面副 S_2 和 S_5 间隙处的碰撞力曲线基本一致,碰撞力稳定在 181.2 ~ 257.4 N 范围内,最大波动幅值为 72.6 N,且碰撞力出现了较长时间的波动。ADAMS 样机仿真结果的碰撞力曲线数值和趋势与 Matlab 计算结果基本吻合,但碰撞力波动时间较短、波动幅值较大,最大波动幅值达到 88.4 N。转动副 R_1 间隙处的碰撞力相对较大,Matlab 数值计算结果与 ADAMS 样机仿真结果的碰撞力均稳定在 517.1 ~ 604.5 N,且碰撞力曲线的趋势基本一致,但

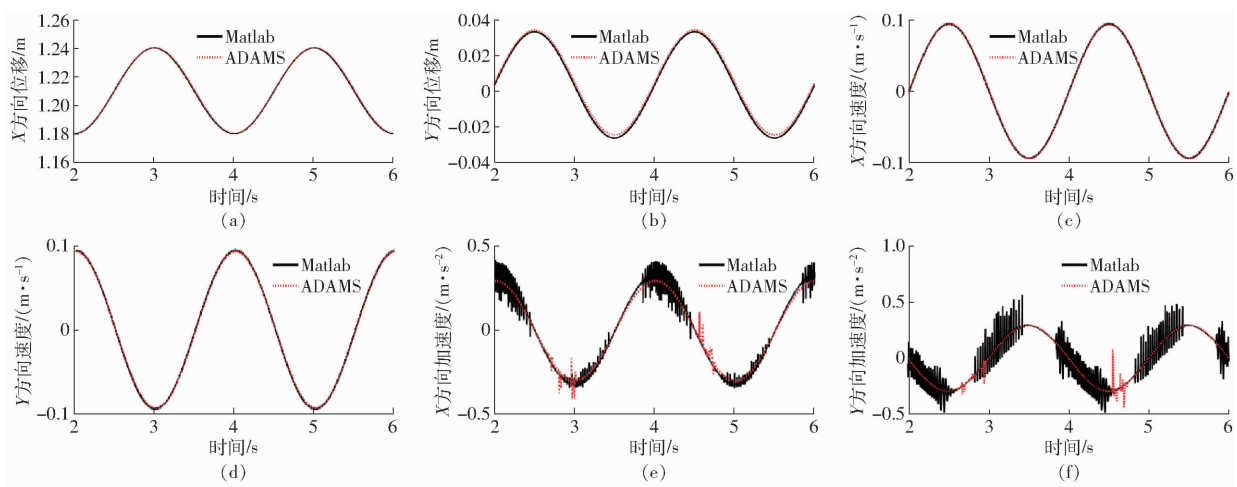


图 18 Matlab 与 ADAMS 动平台响应曲线对比

Fig. 18 Comparisons of dynamic platform response curves between Matlab and ADAMS

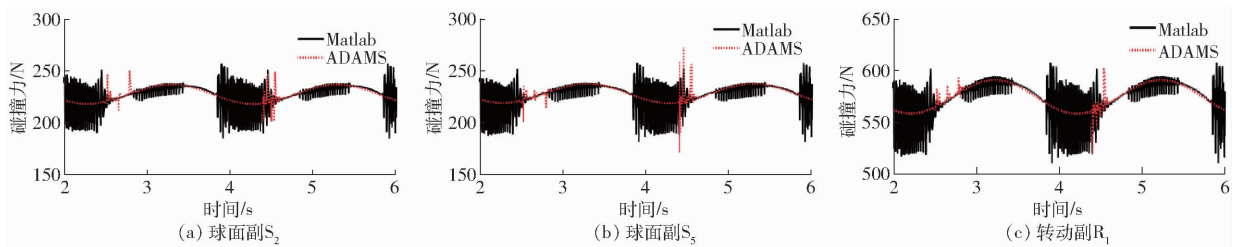


图 19 Matlab 与 ADAMS 碰撞力对比

Fig. 19 Comparisons of collision force curves between Matlab and ADAMS

Matlab 计算结果的碰撞力波动时间较长,ADAMS 仿真结果的碰撞力波动时间较短。

结合图 18 和图 19 可知,考虑混合间隙时对并联机构动平台的加速度影响较大,观察动平台加速度曲线和运动副间隙处碰撞力曲线,Matlab 数值计算结果与 ADAMS 样机仿真结果在数值和趋势上基本一致,但 Matlab 计算结果发生波动的时间较长。分析出现差异可能原因为:Matlab 与 ADAMS 的求解方法不同,Matlab 基于龙格库塔法进行求解,ADAMS 基于自带仿真求解器进行求解,且间隙仿真具有不确定性,机构初始姿态的细微差异都有可能造成碰撞力出现很大变化。考虑混合间隙后,不同运动副间隙处的碰撞力相互影响,使得碰撞力波动不稳定,从而对动力学响应曲线造成一定影响。

3 考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构非线性特性分析

4-UPS/RPU 并联机构动平台轨迹如式(69)所示,取驱动角速度 $\omega = 3.14 \text{ rad/s}$,其他仿真参数如表 2 所示。采用龙格库塔法对考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构动力学方程进行求解,仿真过程运行 50 个周期,通过相轨迹图、庞加莱映射图和分岔图分析动平台和间隙处的非线性特性。

图 20 为动平台 Y 方向的相轨迹图和庞加莱映

射图,选取间隙为 0.3、0.5、0.7 mm 进行对比分析。从图 20 可以看出,间隙为 0.3 mm 时,动平台的相轨迹图表现为众多圆环状重叠在一起,说明在 50 个运行周期中,动平台 Y 方向的位移和速度关系基本没有发生变化,而动平台的庞加莱映射图表现为较集中。当间隙增大时,相轨迹图和庞加莱映射图基本没有变化,通过庞加莱映射图的放大图可以看出,映射点的分布范围略微变大,且分布杂乱没有规律。因此动平台仍为周期运动状态,随间隙的改变,动平台没有出现混沌现象。

图 21 为动平台分岔图。从图 21 可看出,动平台 X 方向和 Y 方向的分岔图表现为众多点连成的水平直线,且水平直线没有出现上下波动,因此动平台在该间隙范围内一直处于周期运动状态。结合图 20 可知,动平台未出现混沌现象,且间隙改变时动平台的运动状态也没有发生明显变化,体现了驱动冗余并联机构的优势。

图 22 为球面副 S_2 间隙处 Y 方向的相轨迹图和庞加莱映射图,选取间隙为 0.3、0.5、0.7 mm 进行对比分析。从图 22 可以看出,间隙为 0.3 mm 时间隙处的相轨迹图表现为扁平椭圆状,此时横坐标的范围为 $-5.78 \times 10^{-5} \sim -4.22 \times 10^{-5} \text{ m}$,纵坐标的范围为 $-2.01 \times 10^{-4} \sim 2.79 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ 。间隙处的庞加莱映射图表现为集中的点,可以判断此时间隙处

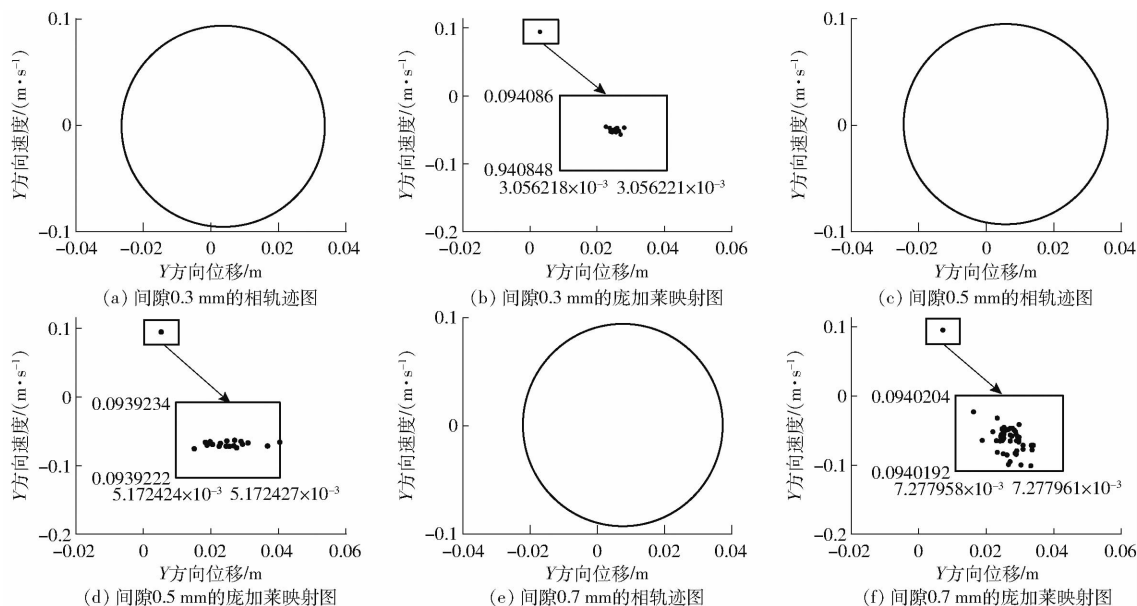


图 20 动平台相轨迹图和庞加莱映射图

Fig. 20 Phase trajectories and Poincaré maps of moving platform

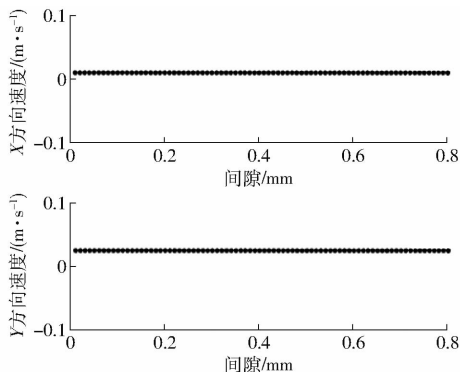


图 21 动平台分岔图

Fig. 21 Bifurcation diagrams of moving platform

为周期运动状态。随着间隙的增大,间隙处的相轨迹图范围增大,且线条表现的较为离散,但相轨迹图

形状没有发生太大变化,间隙为 0.7 mm 时相轨迹图横坐标范围为 $-1.28 \times 10^{-4} \sim -9.16 \times 10^{-5}$ m,纵坐标范围为 $-3.27 \times 10^{-4} \sim 4.16 \times 10^{-4}$ m/s。此时的庞加莱映射图仍表现为集中的一点,通过庞加莱映射图放大图可以看出,映射点的分布范围略微增大,且分布杂乱没有规律。可以判断此时球面副 S_2 间隙处仍为周期运动状态。

图 23 为转动副 R_1 间隙处 Y 方向的相轨迹图和庞加莱映射图,选取间隙为 0.3、0.5、0.7 mm 进行对比分析。从图 23 可以看出,间隙为 0.3 mm 时,间隙处的相轨迹图呈圆锥状和椭圆状,表现为众多曲线相互交织在一起,此时横坐标范围为 $7.02 \times 10^{-5} \sim 1.23 \times 10^{-4}$ m,纵坐标范围为 $-7.18 \times 10^{-4} \sim$

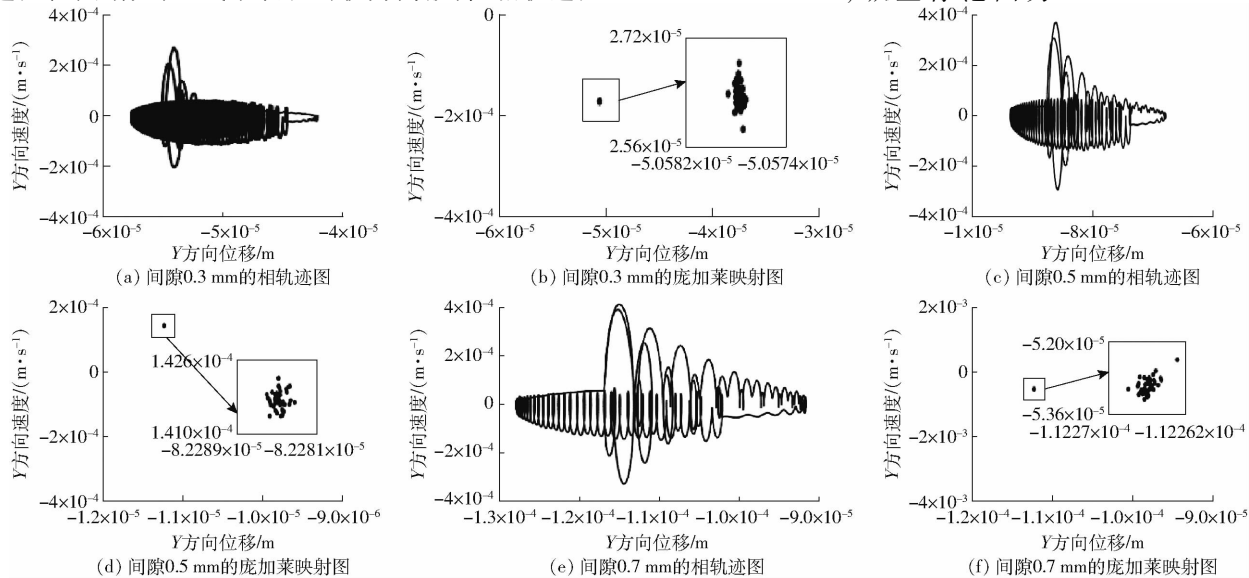


图 22 球面副 S_2 间隙处相轨迹图和庞加莱映射图

Fig. 22 Phase trajectories and Poincaré maps at S_2 clearance of spherical joint

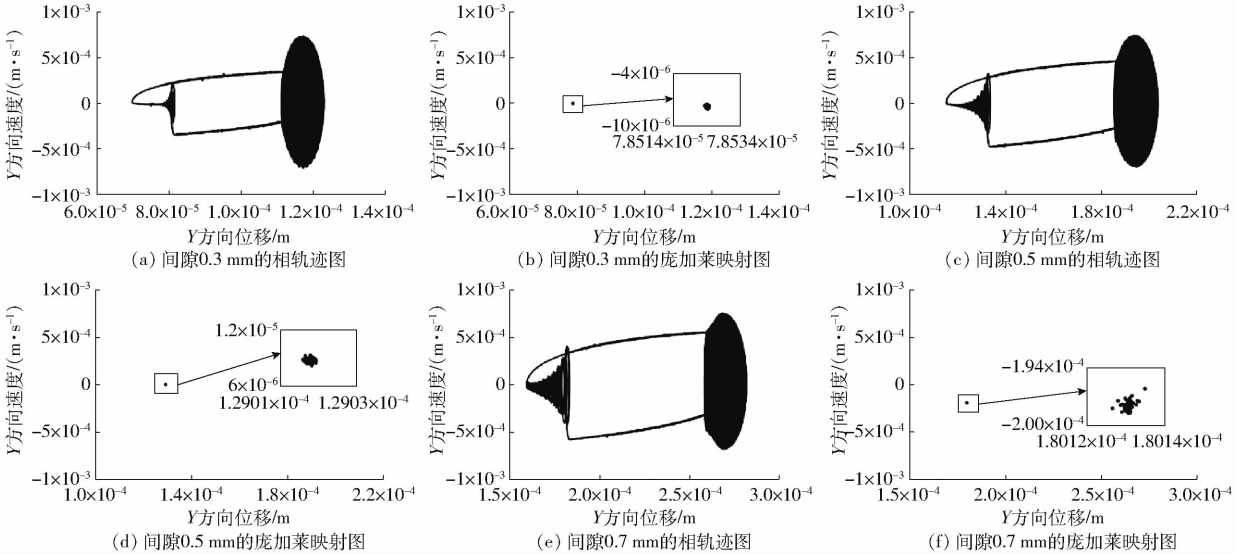


图 23 转动副 R_1 间隙处相轨迹图和庞加莱映射图

Fig. 23 Phase trajectories and Poincare maps at R_1 clearance of spherical joint

$7.23 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ 。间隙处的庞加莱映射图表现为集中的点,可以判断此时间隙处为周期运动状态。随着间隙的增大,间隙处的相轨迹图范围增大、形状不变,间隙为 0.7 mm 时相图横坐标范围为 $1.59 \times 10^{-4} \sim 2.83 \times 10^{-4} \text{ m}$,纵坐标范围为 $-6.89 \times 10^{-4} \sim 7.49 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ 。通过庞加莱映射图放大图可以看出,映射点的分布范围变广,但相对来说仍处于较小范围内。可以判断此时转动副 R_1 间隙处为周期运动状态。

图 24 为球面副 S_2 和转动副 R_1 间隙处分岔图。从图 24a、24b 中可以看出,间隙从 0 增大到 0.3 mm 的过程中,球面副 S_2 间隙处的分岔图变化不太明

显,间隙从 0.3 mm 增大到 0.8 mm 的过程中分岔图变得较为离散,在该间隙范围内 X 方向速度变化范围为 $-4.503 \times 10^{-4} \sim -2.991 \times 10^{-4} \text{ m/s}$, Y 方向速度变化范围为 $-2.375 \times 10^{-4} \sim 2.923 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ 。从图 24c、24d 中可以看出,转动副 R_1 间隙处的分岔图与球面副 S_2 间隙处的分岔图变化基本一致,在间隙为 0.3 mm 左右分岔图开始变得离散,此时 X 方向速度变化范围为 $-9.428 \times 10^{-5} \sim 6.897 \times 10^{-5} \text{ m/s}$, Y 方向速度变化范围为 $-3.503 \times 10^{-4} \sim 2.763 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ 。结合相轨迹图和庞加莱映射图可以判断,间隙处没有出现混沌现象,但随着间隙的增大转动副 R_1 间隙处的运动状态变得较不稳定。

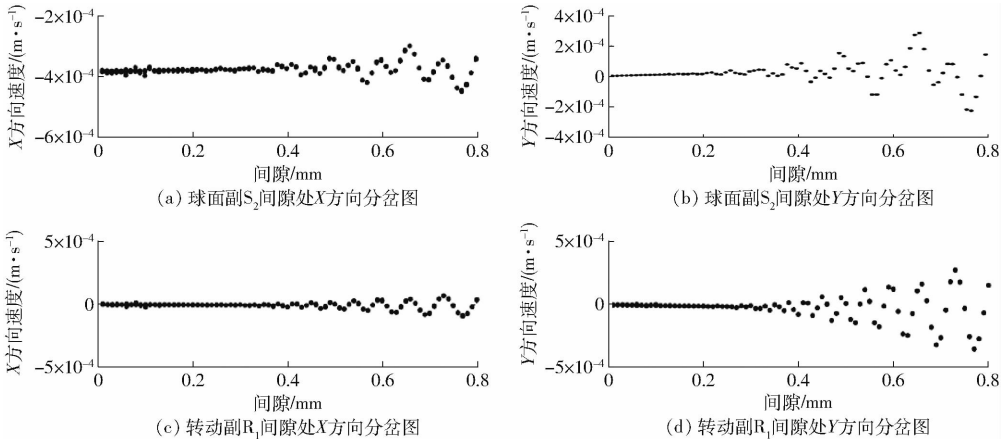


图 24 间隙处分岔图

Fig. 24 Bifurcation diagrams of clearance joint

4 结束语

建立了考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 空间并联机构动力学模型,并进行了动力学响应和非线性特性分析。根据球面副间隙的几何关系建立球

面副间隙的运动学模型,确定接触力模型,结合三维转动副间隙模型和机构刚体动力学模型建立了考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 空间并联机构动力学模型。通过龙格库塔法对动力学方程进行数值求解,分析了不同间隙类型、间隙、驱动角速度和

摩擦因数时机机构的动力学响应,并通过 ADAMS 样机仿真进行对比验证。利用相轨迹图、庞加莱映射图和分岔图研究了考虑混合间隙的 4-UPS/RPU 并联机构非线性特性。

参 考 文 献

- [1] TING K, HSU K, YU Zetao, et al. Clearance-induced output position uncertainty of planar linkages with revolute and prismatic joints[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 111: 66-75.
- [2] 王加春, 迟华瑞, 张万富, 等. 一种修正的含间隙转动副双弹性层接触力模型[J]. 机械设计, 2019, 36(12): 47-51.
WANG Jiachun, CHI Huarui, ZHANG Wanfu, et al. A modified contact-force model featuring double elastic layers of revolute joints with clearance[J]. Journal of Machine Design, 2019, 36(12): 47-51. (in Chinese)
- [3] BAI Zhengfeng, ZHAO Yang, CHEN Jun. Dynamics analysis of planar mechanical system considering revolute clearance joint wear[J]. Tribology International, 2013, 64: 85-95.
- [4] YAN Shaoze, XIANG Wuweikai, ZHANG Lin. A comprehensive model for 3D revolute joints with clearances in mechanical systems[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 80(1-2): 309-328.
- [5] ZHANG Zhenhua, XU Liang, FLORES P, et al. A Kriging model for dynamics of mechanical systems with revolute joint clearances[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2014, 9(3): 031013.
- [6] RAHMANIAN S, GHAZAVI M R. Bifurcation in planar slider-crank mechanism with revolute clearance joint[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 91: 86-101.
- [7] LI Pei, CHEN Wei, LI Desheng, et al. Wear analysis of two revolute joints with clearance in multibody systems[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2015, 11(1): 011009.
- [8] TIAN Qiang, ZHANG Yunqing, CHEN Liping, et al. Dynamics of spatial flexible multibody systems with clearance and lubricated spherical joints[J]. Computers and Structures, 2009, 87(13-14): 913-929.
- [9] XU Lixin, LI Yonggang. Investigation of joint clearance effects on the dynamic performance of a planar 2-DOF pick-and-place parallel manipulator[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2014, 30(1): 62-73.
- [10] CHEN Xiulong, JIANG Shuai, WANG Suyu, et al. Dynamics analysis of planar multi-DOF mechanism with multiple revolute clearances and chaos identification of revolute clearance joints[J]. Multibody System Dynamics, 2019, 47(4): 317-345.
- [11] JIA Yonghao, CHEN Xiulong. Application of a new conformal contact force model to nonlinear dynamic behavior analysis of parallel robot with spherical clearance joints[J]. Nonlinear dynamics, 2022(3): 108.
- [12] 张健, 余海东, 李琳, 等. 含间隙转动副冗余约束机构的动力学特性[J]. 机械设计与研究, 2018, 34(1): 76-81, 86.
ZHANG Jian, YU Haidong, LI Lin, et al. Dynamic performance analysis for over-constrained mechanisms with multiple revolute clearance joints[J]. Machine Design and Research, 2018, 34(1): 76-81, 86. (in Chinese)
- [13] FARAHAN S B, GHAZAVI M R, RAHMANIAN S. Bifurcation in a planar four-bar mechanism with revolute clearance joint [J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 87(2): 1-19.
- [14] FLORES P, AMBROSIO J, CLARO J C P, et al. Dynamic behaviour of planar rigid multi-body systems including revolute joints with clearance[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi Body Dynamics, 2007, 221(2): 161-174.
- [15] VAREDI-KOULAEI S M, DANILI H M, FARAJTABAR M. The effects of joint clearance on the dynamics of the 3RRR planar parallel manipulator[J]. Robotica, 2016, 35(6): 1223-1242.
- [16] ZHANG Xuchong, ZHANG Xianmin, CHEN Zhong. Dynamic analysis of a 3-RRR parallel mechanism with multiple clearance joints[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 78(78): 105-115.
- [17] 燕卫亮. 不同转动副间隙对曲柄群驱动机构的动力学特性影响研究[J]. 机械传动, 2021, 45(11): 41-45, 122.
YAN Weiliang. Research on dynamics characteristic influence of different clearance of rotating pair on crank-group driving mechanism[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2021, 45(11): 41-45, 122. (in Chinese)
- [18] 王庚祥, 刘宏昭, 邓培生. 考虑球面副间隙的并联机构动力学模型[J]. 振动与冲击, 2014, 33(10): 43-49.
WANG Gengxiang, LIU Hongzhao, DENG Peisheng. Dynamic modeling for a parallel mechanism considering spherical joint clearance[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(10): 43-49. (in Chinese)
- [19] HOU Yulei, JING Guoning, WANG Yi, et al. Dynamic response and stability analysis of a parallel mechanism with clearance in revolute joint[J]. Mechanism and Machine Science, 2017, 408: 1211-1224.
- [20] 曹毅, 王见, 刘俊辰, 等. 含关节间隙的 3-CPaRR 并联机构的动力学分析及自适应滑模控制[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2019, 40(11): 1917-1924.
CAO Yi, WANG Jian, LIU Junchen, et al. Dynamics analysis and adaptive sliding mode control of 3-CPaRR parallel mechanism with joint clearance[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2019, 40(11): 1917-1924. (in Chinese)
- [21] HOU Yulei, WANG Yi, JING Guoning, et al. Chaos phenomenon and stability analysis of RU-RPR parallel mechanism with clearance and friction[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2018, 10(1): 1-11.
- [22] 侯雨雷, 井国宁, 汪毅, 等. 一种含间隙并联机构动力学仿真与混沌响应分析[J]. 机械设计, 2018, 35(4): 21-31.
HOU Yulei, JING Guoning, WANG Yi, et al. Dynamic simulation and chaotic responses analysis of a parallel mechanism with

- clearance[J]. Journal of Machine Design, 2018, 35(4): 21–31. (in Chinese)
- [23] JIA Yonghao, CHEN Xiulong. Dynamic response analysis for multi-degrees-of-freedom parallel mechanisms with various types of three-dimensional clearance joints[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2021, 18(3):1–9.
- [24] SHAN Xianlei, CHENG Gang. Nonlinear dynamic behaviour of joint effects on a 2(3PUS + S) parallel manipulator[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 2019, 233(2): 470–484.
- [25] CHEN Yu, FENG Jun, PENG Xu, et al. An approach for dynamic analysis of planar multibody systems with revolute clearance joints[J]. Engineering with Computers, 2021, 37(3):2159–2172.
- [26] MA Jia, QIAN Linfang. Modeling and simulation of planar multibody systems considering multiple revolute clearance joints[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 90(3):1907–1940.
- [27] CHEN Ke, ZHANG Guojun, WU Rui, et al. Dynamic analysis of a planar hydraulic Rock-Breaker mechanism with multiple clearance joints[J]. Shock and Vibration, 2019, 2019:4718456.
- [28] JIANG Shuai, CHEN Xiulong. Test study and nonlinear dynamic analysis of planar multi-link mechanism with compound clearances[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2021, 88(2):104260.
- [29] ISAAC F, MARQUES F, DOURADO N, et al. A finite element model of a 3D dry revolute joint incorporated in a multibody dynamic analysis[J]. Multibody System Dynamics, 2019, 45(3):293–313.
- [30] BAI Zhengfeng, ZHAO Jijun. A study on dynamic characteristics of satellite antenna system considering 3D revolute clearance joint[J]. International Journal of Aerospace Engineering, 2020(4):1–15.
- [31] YANG Lixin, ZHANG Xianmin, HUANG Yanjiang. Dynamic analysis of open-loop mechanisms with multiple spatial revolute clearance joints[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2019, 233(2):593–610.
- [32] LIU Quan, LU Shengnan, DING Xilun. An error equivalent model of revolute joints with clearances for antenna pointing mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 31(2):9.