

(2-RPU + UPU) + (RR) 混联机构末端约束和运动耦合分析

胡波¹ 高添¹ 曾达幸² 卢文娟² 王帅² 王国永³

(1. 燕山大学机械工程学院, 秦皇岛 066000; 2. 东莞理工学院机械工程学院, 东莞 523808;

3. 河北石油职业技术大学机械工程系, 承德 067000)

摘要: 少自由度混联机构有特殊的末端约束形式,同时其末端六维运动参数存在高度耦合,而以往对此类机构的研究多针对并联和串联模块分别开展,导致混联机构的整机末端约束和运动耦合研究被忽视,此类机构的约束和运动分析存在缺陷。本文采用 Grassmann - Cayley 代数分析了 (2-RPU + UPU) + (RR) 机构的末端约束,基于该机构的约束方程建立了其末端运动耦合模型,并以此得到了该机构修正的运动学反解模型。末端约束分析结果表明 (2-RPU + UPU) + (RR) 机构的末端约束为一个螺旋(1H)型约束,其自由度形式为两转两移一螺旋(2R2T1H)型运动。运动耦合结果表明该机构 6 维位姿耦合关系表现为一个多元耦合方程,在给定其中的 5 个独立参数后,另一个参数可通过该耦合方程确定。本文建立的 (2-RPU + UPU) + (RR) 机构的约束分析和运动耦合模型可为少自由度混联机构的末端约束和运动耦合分析提供参考。

关键词: 混联机构; 末端约束; 运动耦合; 运动学; Grassmann - Cayley 代数

中图分类号: TG156 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2023)10-0416-05 **OSID:** 

Terminal Constraint and Kinematic Coupling of (2-RPU + UPU) + (RR) Hybrid Mechanism

HU Bo¹ GAO Tian¹ ZENG Daxing² LU Wenjuan² WANG Shuai² WANG Guoyong³

(1. School of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066000, China

2. School of Mechanical Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan 523808, China

3. Department of Mechanical Engineering, Hebei Petroleum University of Technology, Chengde 067000, China)

Abstract: The lower mobility hybrid mechanism has a special form of terminal constraints, and its terminal motion parameters are highly coupled. The parallel and serial modules of the hybrid mechanisms were often studied separately in the previous researches, resulting in the neglect of the research on the terminal constraint and motion coupling of the whole hybrid mechanism. There are defects in the constraint and motion analysis of this kind of mechanisms. The terminal constraint of the (2-RPU + UPU) + (RR) mechanism was analyzed by using the Grassmann - Cayley algebra. Based on the constraint equations, the terminal motion coupling model of this mechanism was established. Then the modified inverse kinematics of this mechanism was obtained subsequently. The result of terminal constraint analysis showed that the terminal constraint of the (2-RPU + UPU) + (RR) mechanism was a helical (1H) type constraint, and its degree of freedom was two rotational (2R), two translation (2T) and one 1H type motion. The result of motion coupling analysis showed that the 6-dimensional pose coupling relationship of the (2-RPU + UPU) + (RR) mechanism was expressed in the form of a multivariate coupling equation. The constraint analysis and motion coupling model of the (2-RPU + UPU) + (RR) mechanism established provided a reference for the terminal constraint and motion coupling analysis of lower mobility hybrid mechanisms.

Key words: hybrid mechanism; terminal constraint; kinematic coupling; kinematics; Grassmann - Cayley algebra

收稿日期: 2023-04-10 修回日期: 2023-06-05

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(52275033)、河北省中央引导地方科技发展资金项目(206Z7602G)、广东省普通高校机器人与智能装备重点实验室项目(2017KSYS009)、东莞理工学院机器人与智能装备创新中心项目(KCYCXP2017006)和东莞市科技特派员项目(20211800500242)

作者简介: 胡波(1982—),男,教授,博士生导师,主要从事并/混联机器人理论研究,E-mail: hubo@ysu.edu.cn

通信作者: 王国永(1978—),男,副教授,主要从事机械自动化装备研究,E-mail: guoyong0506@163.com

0 引言

混联机构是机器人机构的重要分支,其中以两转动一移动(2R1T)并联机构为重要组成部分的五自由度混联构型^[1-6]备受工业界青睐,以其为本体的混联机器人得到了广泛的应用,典型成功案例包括 Exechon^[1-2]、Tricept^[3-4]、Sprint Z3^[5-6] 混联机构等。这类机构中,Exechon 机构由 2-UPR + SPR 型并联模块和 RR 型串联机构组成。该机构运动副数目少且机构中存在过约束,这些特点带来了整体机构精度和刚度等性能的提升。受 Exechon 机构启发,诸多学者提出了新的构型方案。李秦川等^[7]提出了具有此类特点的含垂直交错转轴的 2R1T 机构,并综合出了大量新型 RPR 类并联机构构型^[8],其中包括多种具有此类特点的并联机构。JIN 等^[9]提了以 2-RPU + SPR 机构为并联模块的可用于飞机机翼装配的五自由度混联机构。路曼等^[10]研究了类 Exechon 机构构型综合、运动学和样机研制问题。胡波等^[11]提出了 2-RPU + UPU 机构,并证明了包括 2-RPU + UPU、2-RPU + UPR、2-RPU + SPR 等在内的 23 种机构实际上为运动学完全等效的并联机构^[12]。此类机构的研究也引起了其他学者的关注^[13-14]。由于运动等效性质的存在,这 23 种并联机构和 RR 模块组成混联机构时,其末端约束和运动特性具有共性,只需以其中一种 (2-RPU + UPU) + (RR) 机构研究为例即可。实际上,由 2-RPU + UPU 机构和 RR 模块组成的混联机构的研究还并不完善。

在少自由度混联机构的机构分析方面,以往研究通常将混联机构分成独立并联机构和串联机构分别研究,认为整体混联机构的理论模型是独立机构的简单叠加,忽视了对整体混联机构理论建模的研究和分析。末端约束分析是少自由度混联机构分析的重要内容^[15-18],是开展机构分析和综合的基础,针对串联机构和并联机构的约束分析一直是机构学的研究热点,并且其研究已经相当成熟。然而,针对混联机构的整机末端约束分析实际非常少见,仅见文献[17]分析了 5 自由度 Exechon 混联机构的整机末端约束。针对 (2-RPU + UPU) + (RR) 混联机构的末端约束分析尚未见报道。

末端运动耦合是少自由度机构的重要特性,与末端具有六自由度运动的机构不同,少自由度机构末端六维移动和转动参数之间存在着相互耦合关系,在计算反解过程中不能任意给定,必须首先通过体现末端位姿耦合关系的方程求解末端可行六维位姿参数。在这一问题的处理上,目前多结合伴随运

动^[19-20]的求解方式得到机构运动耦合关系。然而由于 (2-RPU + UPU) + (RR) 混联机构具有不同于传统并联机构的末端运动耦合形式,其末端运动耦合并未能妥善解决。

为解决 (2-RPU + UPU) + (RR) 混联机构中存在的末端约束和运动耦合问题,本文采用 Grassmann - Cayley 代数求解该机构的末端约束,并结合整体机构的约束方程,通过消元得到只含末端 6 维位姿参数的末端运动耦合模型,以期为 (2-RPU + UPU) + (RR) 机构提供解析化的末端约束和运动耦合模型。

1 (2-RPU + UPU) + (RR) 机构末端约束分析

1.1 混联机构描述

如图 1 所示,混联机构由 2-RPU + UPU 型并联模块和 RR 型串联模块组成。2-RPU + UPU 型并联模块由动平台 n_1 、定平台 n_0 、2 条结构相同的 RPU 分支 $r_i (i = 1, 3)$ 和 1 条 UPU 分支 r_2 组成。定平台 n_0 和动平台 n_1 均为三角形结构,其中心分别为 p_0 和 p_1 ,端点分别记为 a_i 和 $b_i (i = 1, 2, 3)$ 。3 条分支呈对称分布,并均将 P 副作为驱动副,RPU 分支 $r_i (i = 1, 3)$ 通过 R 副与定平台 n_0 上的 $a_i (i = 1, 3)$ 连接,并通过 U 副与动平台 n_1 上的 $b_i (i = 1, 3)$ 连接,UPU 分支 r_2 通过 U 副与定平台 n_0 上的 a_2 连接,并通过 U 副与动平台 n_1 上的 b_2 连接。并联模块中的每个 U 副均由转轴相互垂直且相交的 R 副组成,设 R_{lij} 表示第 i 条分支上的第 j 个 R 副。

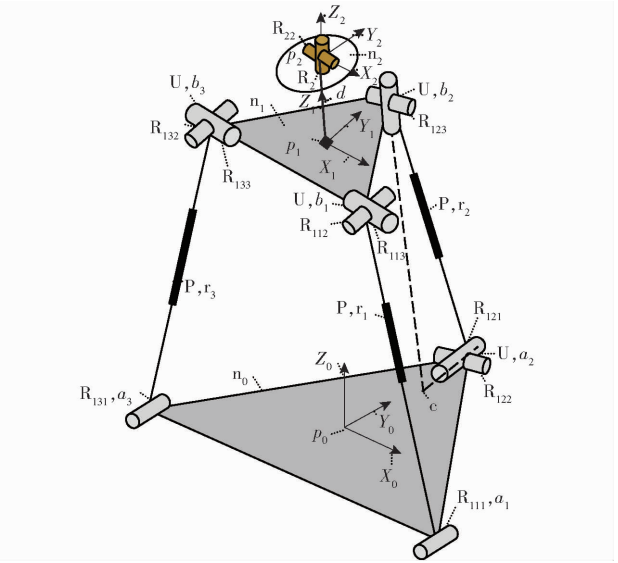


图 1 (2-RPU + UPU) + (RR) 型混联机构示意图
Fig. 1 Sketch of (2-RPU + UPU) + (RR) type hybrid mechanism

定义:并联模块中的各个运动副满足如下关系 $R_{1i1} \perp a_1 a_3, R_{1i1} \perp r_i, R_{1i1} \parallel R_{1i2}, R_{1i2} \perp R_{1i3} (i = 1, 2,$

3), $R_{1i3} \parallel b_1 b_3 (i = 1, 3), R_{121} \perp p_0 a_2, R_{121} \perp R_{122}, R_{122} \parallel R_{123}, R_{123} \perp r_i, R_{123} \perp R_{124}, R_{124} \perp n_1$ 。

RR 型串联模块由刚性连杆 d 、 R_{21} 和 R_{22} 组成, 连杆 d 始端与 p_1 固连, 末端点为 p_2 , R_{21} 和 R_{22} 相交于 p_2 。串联模块中的两个运动副和连杆、平台满足几何关系 $d \parallel R_{21}, R_{21} \perp n_1, R_{21} \perp R_{22}$ 。

1.2 混联机构末端耦合约束求解方法

设 A、B 分别表示并联和串联模块, 并联机构 A 的末端约束螺旋系为 S'_A , 串联机构 B 的末端约束螺旋系为 S'_B , 则混联机构末端约束 S' 可视为以上两螺旋系的交集, 表示为^[17]

$$S' = S'_A \cap S'_B \tag{1}$$

为解决式 (1) 的螺旋系求交问题, 在此引入 Grassmann - Cayley 代数。Grassmann - Cayley 代数是一个功能强大的数学工具, 在并联机构/混联机构运动学和奇异性分析领域已有多个成功案例^[21-22]。其交运算可应用于求解不同线性空间的交空间, 可将其应用于两个螺旋系的求交运算。

本文符号“ $\vee$ ”和“ $\wedge$ ”分别表示 Grassmann - Cayley 中的求并和求交运算。设 V 是实数域内的 l 维向量空间, W 是 V 的 k 维子向量空间, 其标准基向量为 $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ 。若 C 是 $\binom{l}{k}$ 维向量空间 V^k 中的 Plücker 坐标向量, C 可以通过对其子向量空间的标准基的外积运算表示为

$$C = w_1 \vee w_2 \vee \dots \vee w_k \tag{2}$$

在 Grassmann - Cayley 代数中, 将 C 称为 k 阶 extensor。

设 M 和 N 分别是两个 l 维空间内的 i 阶和 j 阶梯 extensor, $M = m_1 \vee m_2 \vee \dots \vee m_i (M = m_1 m_2 \dots m_i), N = n_1 \vee n_2 \vee \dots \vee n_j (N = n_1 n_2 \dots n_j)$ 。 M 和 N 的求并运算可由其 exterior product 表示为

$$M \vee N = m_1 m_2 \dots m_i n_1 n_2 \dots n_j \tag{3}$$

若 $i + j \geq d$, M 和 N 的求交运算结果是一个 $i + j - d$ 阶的 extensor

$$M \wedge N = \sum \text{sgn}(\sigma) [m_{\sigma(1)} m_{\sigma(2)} \dots m_{\sigma(d-j)} n_1 n_2 \dots n_j] \cdot m_{\sigma(d-j+1)} m_{\sigma(d-j+2)} \dots m_{\sigma(i)} \tag{4}$$

式 (4) 为 Grassmann - Cayley 代数的混续积公式, 其中 $[\cdot]$ 为行列式的简写, 和运算是 σ 的所有排列组合, 满足: $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(d-j), \sigma(d-j+1) < \sigma(d-j+2) < \dots < \sigma(i)$ 。

1.3 (2-RPU + UPU) + (RR) 机构末端约束及自由度

在点 p_0, p_1, p_2 处分别建立坐标系 $\{n_i\} (i = 0, 1, 2)$, 则 $\{n_0\}$ 和 $\{n_2\}$ 分别对应基坐标系和末端坐标系, 各

坐标轴满足的几何关系为: $X_0 \parallel a_1 a_3, Y_0 \perp a_1 a_3, Z_0 \perp n_0, X_1 \parallel b_1 b_3, Y_1 \perp b_1 b_3, Z_1 \perp n_1, X_2 \parallel R_{22}$ 。设 p_{xi}, p_{yi}, p_{zi} 为点 p_i 在基坐标系 $\{n_0\}$ 下的坐标。

由文献 [12] 知, 该机构的第 1、3 分支中, 存在一过 U 副中心平行于分支中 R 副的约束力 $F_{Ai} (i = 1, 3)$ 和垂直于 U 副平面的约束矩 T_{Ai} , 第 2 分支中存在过 R_{121} 和 R_{124} 交点 c 且平行于 R_{122} 的约束力 F_{A2} 。这 5 个约束螺旋线性相关, 可取 3 个独立的约束力构成其约束螺旋系, 3 个约束力螺旋可表示为

$$S'_{Ai} = [f_{Ai}^T (d_{Ai} \times f_{Ai})^T]^T \tag{5}$$

其中 $f_{Ai} = R_{1ji} \quad d_{Ai} = b_i - p_2 \quad (i = 1, 3)$

$$f_{A2} = R_{122} \quad d_{A2} = c - p_2$$

式中 R_{ijk} ——转动副 R_{ijk} 的方向矢量

b_i, c, p_i ——点 b_i, c, p_i 的位置矢量

f_{Ai} ——约束力 F_{Ai} 的方向矢量

d_{Ai} ——参考点 p_2 到 F_{Ai} 的矢径

同样, 在 RR 分支中, 由约束螺旋的观察法^[15] 知分支中存在过 R 副交点的 3 个约束力 $F_{Bi} (i = 1, 2, 3)$ 和一垂直于 R_{21} 和 R_{22} 的约束矩 T_{B1} , 对应的力螺旋可表示为

$$\begin{cases} S'_{B1} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ S'_{B2} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ S'_{B3} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ S'_{B4} = [0 \ 0 \ 0 \ (R_{21} \times R_{21})^T]^T \end{cases} \tag{6}$$

由独立螺旋组成的螺旋系可通过各独立螺旋的外积运算表示^[22], 则 2-RPU + UPU 机构约束螺旋系可表示为

$$S'_A = S'_{A1} \vee S'_{A2} \vee S'_{A3} \tag{7}$$

RR 机构约束螺旋系可表示为

$$S'_B = S'_{B1} \vee S'_{B2} \vee S'_{B3} \vee S'_{B4} \tag{8}$$

将式 (7)、(8) 代入式 (4), 则整体混联机构末端约束可表示为

$$S' = S'_A \wedge S'_B =$$

$$\begin{aligned} & [\dot{S}'_{A1} \dot{S}'_{A2} S'_B] \dot{S}'_{A3} = [S'_{A1} S'_{A2} S'_B] S'_{A3} - \\ & [S'_{A1} S'_{A3} S'_B] S'_{A2} + [S'_{A2} S'_{A3} S'_B] S'_{A1} = \\ & [S'_A \dot{S}'_{B1} \dot{S}'_{B2} \dot{S}'_{B3}] \dot{S}'_{B4} = [S'_A S'_{B1} S'_{B2} S'_{B3}] S'_{B4} - \\ & [S'_A S'_{B1} S'_{B2} S'_{B4}] S'_{B3} + [S'_A S'_{B1} S'_{B3} S'_{B4}] S'_{B2} - \\ & [S'_A S'_{B2} S'_{B3} S'_{B4}] S'_{B1} \end{aligned} \tag{9}$$

式 (9) 为通过 2 个约束螺旋系求并运算得到的混联机构末端约束的解析表达式。

从另一角度而言, 由于 S' 可同时表示为 $S'_A (S'_B)$ 各元素的叠加, 因此可得

$$\begin{aligned} S'_A \wedge S'_B &= \lambda_{A1} S'_{A1} + \lambda_{A2} S'_{A2} + \lambda_{A3} S'_{A3} = \\ & \lambda_{B1} S'_{B1} + \lambda_{B2} S'_{B2} + \lambda_{B3} S'_{B3} + \lambda_{B4} S'_{B4} \end{aligned} \tag{10}$$

式中 $\lambda_{Ai}、\lambda_{Bi}$ ——常数

基于螺旋理论可知^[23]， $S_{A1}^r、S_{A2}^r$ 和 S_{A3}^r 构成三阶螺旋系，由于这 3 个螺旋不共面，其线性组合在一般情况下为带有节距的螺旋，因此可判定该机构的末端约束为 1H 型约束，其末端自由度为 2R2T1H 型运动。

2 (2-RPU + UPU) + (RR) 机构末端运动耦合解析

设定 ${}^{n_0}_{n_i}\mathbf{R}$ 为坐标系 $\{n_i\}$ 相对于基坐标系 $\{n_0\}$ 的旋转矩阵， ${}^{n_0}_{n_i}\mathbf{R}$ 可表示为

$${}^{n_0}_{n_i}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x_{li} & y_{li} & z_{li} \\ x_{mi} & y_{mi} & z_{mi} \\ x_{ni} & y_{ni} & z_{ni} \end{bmatrix} \tag{11}$$

末端坐标系 $\{n_2\}$ 相对于基坐标系 $\{n_0\}$ 的旋转变化可表示为

$${}^{n_0}_{n_2}\mathbf{R} = {}^{n_0}_{n_1}\mathbf{R} {}^{n_1}_{n_2}\mathbf{R} \tag{12}$$

其中

$${}^{n_1}_{n_2}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1\cos\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

式中 ${}^{n_1}_{n_2}\mathbf{R}$ —— n_2 相对于 n_1 的旋矩阵

点 $a_i、b_i$ 在 $\{n_0\}$ 中可表示为

$$\mathbf{a}_i = E \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\mathbf{b}_i = {}^{n_0}_{n_1}\mathbf{R} \mathbf{b}_i + \mathbf{p}_1 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{15}$$

其中

$${}^{n_1}\mathbf{b}_i = e \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\theta = \pi/6 + (2\pi/3)(i - 1)$$

式中 E ——点 p_0 到点 a_i 的长度

e ——点 p_1 到点 b_i 的长度

2-RPU + UPU 并联机构的杆长计算式为

$$r_i = \|\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i\| \tag{16}$$

令 $p_{xi}、p_{yi}、p_{zi}$ 分别表示点 p_i 在坐标系 $\{n_0\}$ 的 3 个坐标值。在基坐标系 $\{n_0\}$ 中 p_2 可表示为

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + d\mathbf{Z}_1 \tag{17}$$

其中

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} z_{l1} & z_{m1} & z_{n1} \end{bmatrix}^T$$

2-RPU + UPU 机构的末端位姿耦合关系可表示为^[11]

$$p_{x1} = p_{z1}z_{l1}/z_{n1} \tag{18}$$

$$p_{y1} = (ey_{m1} - E)/2 \tag{19}$$

$$x_{m1} = 0 \tag{20}$$

旋转矩阵 ${}^{n_0}_{n_1}\mathbf{R}$ 各元素存在以下关系

$$x_{m1}^2 + y_{m1}^2 + z_{m1}^2 = 1 \tag{21}$$

$$z_{l1}^2 + z_{m1}^2 + z_{n1}^2 = 1 \tag{22}$$

由式(17)可知(2-RPU + UPU) + (RR)混联机构的末端位置可表示为

$$p_{x2} = p_{x1} + dz_{l1} \tag{23}$$

$$p_{y2} = p_{y1} + dz_{m1} \tag{24}$$

$$p_{z2} = p_{z1} + dz_{n1} \tag{25}$$

由该机构结构条件可知

$$z_{l1}x_{l2} + z_{m1}x_{m2} + z_{n1}x_{n2} = 0 \tag{26}$$

结合式(19)、(24)，可得

$$p_{y2} = ey_{m1}/2 + dz_{m1} - E/2 \tag{27}$$

结合式(20)、(21)，可得

$$y_{m1}^2 + z_{m1}^2 = 1 \tag{28}$$

结合式(18)、(23)、(25)，可得

$$z_{n1} = \frac{z_{l1}p_{z2}}{p_{x2}} \tag{29}$$

由式(27)、(28)可得

$$(4d^2 + e^2)z_{m1}^2 - 4d(2p_{y2} + E)z_{m1} + (2p_2 + E)^2 - e^2 = 0 \tag{30}$$

由式(26)、(29)可得

$$z_{m1} = -\frac{z_{l1}(p_{x2}x_{l2} + p_{z2}x_{n2})}{p_{x2}x_{m2}} \tag{31}$$

将式(29)、(31)代入式(22)，化简可得

$$z_{l1}^2 = \frac{p_{x2}^2x_{m2}^2}{(p_{x2}^2 + p_{z2}^2)x_{m2}^2 + (p_{x2}x_{l2} + p_{z2}x_{n2})^2} \tag{32}$$

由式(31)、(32)可得

$$z_{m1}^2 = \frac{(p_{x2}x_{l2} + p_{z2}x_{n2})^2}{(p_{x2}^2 + p_{z2}^2)x_{m2}^2 + (p_{x2}x_{l2} + p_{z2}x_{n2})^2} \tag{33}$$

由式(30)可得

$$z_{m1} = \frac{(4d^2 + e^2)z_{m1}^2 + (2p_{y2} + E)^2 - e^2}{4d(2p_{y2} + E)} \tag{34}$$

将式(33)代入式(34)，两边平方，消去 z_{m1} ，可得

$$\begin{aligned} & \{ (4d^2 + e^2)(p_{x2}x_{l2} + p_{z2}x_{n2})^2 + [(p_{x2}^2 + p_{z2}^2)x_{m2}^2 + \\ & (p_{x2}x_{l2} + p_{z2}x_{n2})^2] [(2p_{y2} + E)^2 - e^2] \}^2 - \\ & 16d^2(p_{x2}x_{l2} + p_{z2}x_{n2})^2 [(p_{x2}^2 + p_{z2}^2)x_{m2}^2 + \\ & (p_{x2}x_{l2} + p_{z2}x_{n2})^2] (2p_{y2} + E)^2 = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

式(35)描述了 5 自由度(2-RPU + UPU) + (RR)混联机构的末端位姿耦合关系，当给定 5 个独立位姿参数时，剩余的 1 个位姿参数可由式(35)求出。

在获得该机构的 6 维位姿后，由式(32)、(33)、(29)可求得 $z_{l1}、z_{m1}$ 和 z_{n1} ；由式(23)~(25)可求出 $p_{x1}、p_{y1}$ 和 p_{z1} ；由式(19)可求得 y_{m1} ，进而由旋转矩阵性质可求得 ${}^{n_0}_{n_1}\mathbf{R}$ 的其它元素，由式(12)、(13)可求得 θ_1 和 θ_2 ；结合式(14)、(15)可求得 $r_1、r_2$ 和 r_3 。至此，整体机构的反解求解完毕。

3 数值算例

设定(2RPU + UPU) + (RR) 机构中,各平台及连杆的尺寸为 $E = 1.20\text{ m}$, $e = 0.60\text{ m}$, $d = 0.75\text{ m}$ 。给定末端执行器 X 和 Z 方向的位置坐标为: $p_{x2} = -0.32\text{ m}$, $p_{z2} = 1.80\text{ m}$, 机构末端姿态按照 XYX 型欧拉角给定, 对应欧拉角分别给定为: $\alpha = 56^\circ$, $\beta = -40^\circ$, $\lambda = -80^\circ$, 在给定以上 5 个位姿参数的基础上求解未知位置参数 p_{y2} 。

将上述参数代入式(35), 可得到关于 p_{y2} 的高次方程为

$$11.274\,896\,6p_{y2}^4 + 15.622\,95p_{y2}^3 + 6.448\,95p_{y2}^2 + 0.718\,453p_{y2} - 0.033\,860\,46 = 0 \quad (36)$$

式(36) 求解可得 p_{y2} 为 $-0.792\,5$ 、 $0.099\,7$ 、 $-0.220\,5$ 、 $-0.472\,3\text{ m}$ 。

结果可在软件环境下构建机构的运动模拟机构得到验证^[24]。结果表明仿真结果与式(36) 计算结果的第 2 组结果吻合。

以上述得到的末端 6 维位姿参数为基础, (2-RPU + UPU) + (RR) 机构的反解计算可得: $r_1 = 1.337\,9\text{ m}$, $r_2 = 1.148\,0\text{ m}$, $r_3 = 1.133\,8\text{ m}$, $\theta_1 = -35.201\,2^\circ$, $\theta_2 = -4.579\,9^\circ$ 。

在该位姿下, 根据式(5)、(6) 计算可得各子机构中的约束螺旋为

$$\begin{aligned} S_{A_1}^r &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0.565 \quad 1 \quad 0 \quad 0.405 \quad 2]^T \\ S_{A_2}^r &= [0.984 \quad 6 \quad 0 \quad 0.175 \quad 0 \quad -0.066 \quad 4 \quad -1.828 \quad 2 \quad 0.373 \quad 5]^T \\ S_{A_3}^r &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0.670 \quad 1 \quad 0 \quad -0.185 \quad 6]^T \\ S_{B_4}^r &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.622 \quad 1 \quad 0.755 \quad 4 \quad -0.205 \quad 9]^T \end{aligned}$$

由式(9) 计算可得该混联机构的末端约束为 $S^r = [-0.403 \quad 8 \quad 0.912 \quad 0 \quad -0.071 \quad 8 \quad 0.617 \quad 4 \quad 0.749 \quad 7 \quad -0.204 \quad 4]^T$ 结果表明, 此位姿下(2-RPU + UPU) + (RR) 机构的末端约束为以 $0.449\,2\text{ m}$ 为节距的约束螺旋。

4 结论

(1) 得到了(2-RPU + UPU) + (RR) 混联机构的末端约束和位姿耦合模型, 为少自由度混联机构的整机末端约束和运动耦合分析提供了有效的思路和方法。

(2) 基于约束求交原理, 结合 Grassmann - Cayley 代数建立了(2-RPU + UPU) + (RR) 混联机构的末端约束求解模型。在一般位形下, 该机构的末端约束为一带有节距的约束螺旋, 其末端自由度形式为 2R2T1H 型运动。

(3) 结合(2-RPU + UPU) + (RR) 混联机构的约束方程, 通过消元建立了(2-RPU + UPU) + (RR) 机构的末端运动耦合模型, 从而获得了该机构的末端 6 维可行位姿, 并以此得到了该机构修正的反向运动学模型。

参 考 文 献

[1] BI Z M, WANG L H. Energy modeling of machine tools for optimization of machine setups[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2012, 9(3):607 - 613.

[2] BI Z M, JIN Y. Kinematic modeling of Exechon parallel kinematic machine[J]. Robot and Computer Integrated Manufacturing, 2011, 27(1):186 - 193.

[3] SICILIANO B. The Tricept robot: inverse kinematics, manipulability analysis and closed-loop direct kinematics algorithm[J]. Robotica, 1999, 17(4):437 - 455.

[4] JOSHI S, TSAI L W. A comparison study of two 3-DOF parallel manipulators: one with three and the other with four supporting legs[J]. IEEE Transactions of Robotics and Automation, 2003, 19(2):200 - 209.

[5] WAHL J. Articulated tool head: EPOWO/2000/025976[P]. 2000 - 11 - 05.

[6] CHEN X, LIU X J, XIE F G. A comparison study on motion/force transmissibility of two typical 3-DOF parallel manipulators: the sprint Z3 and A3 tool heads[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2014, 11(1):1 - 10.

[7] 李秦川, 陈巧红, 余旭锋, 等. 具有两条垂直交错转轴的三自由度并联机构: ZL201110357878.7[P]. 2012 - 03 - 07.

[8] LI Q, HERVE J M. Type synthesis of 3-DOF RPR-equivalent parallel mechanisms[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2014, 30(6):1333 - 1343.

[9] JIN Y, KONG X W, HIGGIN C, et al. Kinematic design of a new parallel kinematic machine for aircraft wing assembly[C]//Proc. 10th IEEE Int. Conf. Ind. Informat., 2012:669 - 674.

[10] 路曼, 赵艳芹. 类 Exechon 并联模块的结构设计与刚度建模[J]. 农业机械学报, 2015, 47(3):367 - 388. LU Man, ZHAO Yanqin. Structural design and stiffness modeling for exe-variant parallel kinematic machine[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 47(3):367 - 388. (in Chinese)

[11] 胡波, 路懿, 许佳音, 等. 新型过约束并联机构 2RPU + UPU 动力学模型[J]. 机械工程学报, 2011, 47(11):36 - 43. HU Bo, LU Yi, XU Jiayin, et al. Solving dynamics for a novel over-constrained 2UPR + UPU parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(11):36 - 43. (in Chinese)

[12] HU B, SHI D S, XIE T, et al. Kinematically identical manipulators derivation for the 2-RPU + UPR parallel manipulator and their constraint performance comparison[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2020, 12(6):061011.

(in Chinese)

[20] FRESIA P, RUNDO M, PADOVANI D, et al. Combined speed control and centralized power supply for hybrid energy-efficient mobile hydraulics[J]. Automation in Construction, 2022, 140: 104337.

[21] GONG J, ZHANG D Q, GUO Y, et al. Power control strategy and performance evaluation of a novel electro hydraulic energy-saving system[J]. Applied Energy, 2019, 233 – 234: 724 – 734.

[22] YU Y X, AHN K K. Energy regeneration and reuse of excavator swing system with hydraulic accumulator[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology, 2020(7): 859 – 873.

[23] WANG B, ZHAO X Y, QUAN L, et al. A method for improving flow control valve performance based on active differential pressure regulation[J]. Measurement, 2023, 219: 113271.

[24] 丁孺琦, 江来, 李刚, 等. 电液负载敏感负载口独立多模式切换控制能效研究[J]. 农业机械学报, 2021, 52(12): 433 – 442.

DING Ruqi, JIANG Lai, LI Gang, et al. Energy efficiency of electro-hydraulic load sensing independent metering multi-mode switching control system[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(12): 433 – 442. (in Chinese)

[25] 姜继海. 液驱及电动混合动力在挖掘机的运用(上) [J]. 建设机械技术与管理, 2010(10): 72 – 74.

JIANG Jihai. Hydraulic drive and electric hybrid power application on excavator[J]. Construction Machinery Technology & Management, 2010(10): 72 – 74. (in Chinese)

[26] LATAS W, STOJEK J. A new type of hydrokinetic accumulator and its simulation in hydraulic lift with energy recovery system [J]. Energy, 2018, 153: 836 – 848.

[27] JAMES D, VEN V D. Constant pressure hydraulic energy storage through a variable area piston hydraulic accumulator[J]. Applied Energy, 2013, 105: 262 – 270.

[28] 闫政. V/F 控制模式下恒压泵动力源特性研究[J]. 农业机械学报, 2022, 53(9): 451 – 458.

YAN Zheng. Dynamic characteristics of electro-hydraulic power source of constant pressure pump under V/F control mode[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(9): 451 – 458. (in Chinese)

(上接第 420 页)

[13] 鹿玲, 张东胜, 许允斗, 等. 五自由度混联机器人尺度与结构优化设计[J]. 农业机械学报, 2018, 49(4): 412 – 419.

LU Ling, ZHANG Dongsheng, XU Yundou, et al. Dimension and structure optimization design of 5-DOF hybrid manipulator [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(4): 412 – 419. (in Chinese)

[14] 刘晓飞, 刘洋, 何阳, 等. 2RPU + 2UPR + RPR 多冗余驱动并联机构运动学分析与优化[J]. 农业机械学报, 2023, 54(3): 440 – 450.

LIU Xiaofei, LIU Yang, HE Yang, et al. Kinematic analysis and dimension optimization of multi-redundantly actuated parallel mechanism 2RPU + 2UPR + RPR[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(3): 440 – 450. (in Chinese)

[15] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[16] JOSHI S, TSAI L W. Jacobian analysis of limited-DOF parallel manipulators[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2002, 124(2): 254 – 258.

[17] HU B, SHI Y G, XU L Z, et al. Reconsideration of terminal constraint/mobility and kinematics of 5-DOF hybrid manipulators formed by one 2R1T PM and one RR SM[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 149: 103837.

[18] HUO X, SUN T, SONG Y, A geometric algebra approach to determine motion/constraint, mobility and singularity of parallel mechanism[J]. Mech. Mach. Theory, 2017, 116: 273 – 293.

[19] CARRETERO J A, PODHORODESKI R P, NAHON M A, et al. Kinematic analysis and optimization of a new three degree-of-freedom spatial parallel manipulator[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2000, 122(1): 17 – 24.

[20] LU Y, HU B. Unification and simplification of velocity/acceleration of limited-DOF parallel manipulators with linear active legs [J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(9): 1112 – 1128.

[21] WHITE N L. Grassmann – Cayley algebra and robotics applications[M] // Handbook of geometric computing. Springer, 2005: 629 – 656.

[22] BEN-HORIN P, SHOHAM M. Application of Grassmann – Cayley algebra to geometrical interpretation of parallel robot singularities[J]. International Journal of Robotics Research, 2009, 28(1): 127 – 141.

[23] 戴建生. 机构学与机器人学的几何基础与旋量代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[24] 胡波, 张达, 高俊林, 等. 基于共形几何代数求解(4SPS + SPR) + (2RPS + SPR) 串并联机构位置正解[J]. 机械工程学报, 2021, 57(13): 102 – 113.

HU Bo, ZHANG Da, GAO Junlin, et al. CGA-based approach to solve the forward position solution of the (4SPS + SPR) + (2RPS + SPR) serial-parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(13): 102 – 113. (in Chinese)