

3T1R 解耦并联机构动力学与惯量耦合特性分析

朱小蓉 赵磊 沈惠平
(常州大学机械工程学院, 常州 213164)

摘要: 对一种 3T1R 解耦并联机构的动力学性能及其惯量耦合强度进行了分析。对机构进行运动学分析,给出了机构的位置正反解方程,得到动平台的雅可比矩阵,推导了机构各构件的速度、加速度;基于牛顿-欧拉法,考虑构件重力以及外负载,建立了机构逆向动力学模型,并用 ADAMS 软件进行了仿真实验;基于所建的逆向动力学模型,分析了加速度和动平台姿态角对支链驱动力的影响;基于关节空间的惯量矩阵,建立了惯量耦合强度评价指标,分析了其在工作空间内的分布规律,并与降耦前 Quadrupterion 机构的惯量耦合强度进行了对比分析。结果表明,结构降耦不仅降低了支链间的耦合强度,而且整个工作空间内惯量耦合强度的分布更为一致,提升了机构动态性能的各向同性。

关键词: 并联机构; 牛顿-欧拉法; 逆向动力学模型; 惯量耦合强度

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2023)09-0448-11 OSID: 

Dynamics Coupling Characteristics of 3T1R Decoupled Parallel Manipulator

ZHU Xiaorong ZHAO Lei SHEN Huiping
(School of Mechanical Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: The dynamic performance and inertia coupling strength of a 3T1R decoupling parallel mechanism (PM) were analyzed. Firstly, the kinematics of the mechanism was established, and the forward kinematics and inverse kinematics were given to obtain the Jacobian matrix of the moving platform, where the velocity and acceleration of each link and the moving platform were derived. Based on the Newton – Euler method, the inverse dynamics model of the mechanism was established considering the gravity of the components and the external load. The driving forces of the PM were solved, which was then verified by ADAMS dynamics simulation. At the same time, the influences of acceleration and the attitude angle of the moving platform on the driving force of the branch chain were analyzed based on the established dynamics model and the analysis results can provide theoretical basis for trajectory planning of the mechanism. Finally, an inertia coupling evaluation index was proposed based on the inertia matrix in the joint space, which represented the coupling strength of the driving branches when the PM worked at different poses in the workspace. Then the distribution law of the index in workspace was studied and compared with that of the Quadrupterion mechanism before decoupling. The results showed that the decoupling of the PM not only reduced the coupling strength between the branches, but also made the distribution of the coupling strength in the workspace more consistent, which improved the isotropy of the dynamic performance of the mechanism.

Key words: parallel mechanism; Newton – Euler method; inverse dynamic model; inertia coupling strength

0 引言

四自由度 (3CRR/R) &CRU 并联机构, 是对

Quadrupterion 机构进行结构降耦所得^[1-2], 机构具有运动解耦、耦合度低、工作空间大、转动能力强等特点, 在装配、包装及码垛等高速运动工程领域有较好

的应用前景。

良好的动力学性能是高速运动并联装备的重要保证。目前并联机构动力学建模主要有拉格朗日法^[3-4]、虚功原理^[5-8]、牛顿-欧拉法^[9-14]等方法,其中牛顿-欧拉法因为概念清晰、关节支反力/力矩可由平衡方程递推获得而得到了广泛应用。LI 等^[9]基于牛顿-欧拉法对一种4自由度 SCARA 型并联机构进行动力学建模,以单驱动关节的驱动力最小为优化目标实现了机构的尺寸综合。王庚祥等^[10]将机构的关节摩擦力视为非保守内力,采用牛顿-欧拉法建立了含恰约束支链4-SPS/CU 并联机构的动力学方程,推导出关节的约束反力/力矩,并讨论了关节摩擦对机构驱动力的影响。冯志友等^[11]采用牛顿-欧拉法对2UPS-2RPS 并联机构进行动力学建模,讨论了给定动平台运动规律和外力条件下的机构驱动力和约束力矩。CHEN 等^[12]基于牛顿-欧拉法,通过设置兼容方程,建立了一种过约束并联机构的动力学方程,并以驱动力最小为优化目标进行动力学性能优化。GUO 等^[13]考虑球关节、万向节和滚珠丝杠的摩擦效应,采用牛顿-欧拉法建立了5自由度混联机器人的显式动力学模型。

并联机构的闭环多分支结构特征导致了支链之间存在较强的耦合,影响机构高速、重载运动时的动态性能。TOURASSIS 等^[15]提出了机器人动力学方程中惯量矩阵的中心地位,解释了惯量矩阵的结构特征及物理意义,并以串联机器人为例引入惯量耦合系数对机构动力学特性进行评价。ASADA^[16]利用惯量椭圆来表征刚体的动力学特性。这种基于惯量的动态指标已逐渐推广到并联机器人的动力学性能评估和参数优化,研究工作主要集中在耦合惯性矩矩阵的分析方面。LIU 等^[17]对 Stewart 平台的惯性矩矩阵进行解耦,以惯性矩矩阵的最大特征值作为惯性指标,对 Stewart 平台进行尺寸优化。宋轶民等^[18]定义系统惯性矩矩阵条件数的倒数为评价系统动力学性能的局部指标,对非冗余3-RRR 和冗余4-RRR 平面并联机构的动力学性能进行了比较。王冬等^[19]定义机构惯量矩阵的非对角元素之和作为惯量耦合指标,以3-PRS 并联机构为例,分析了耦合指标在工作空间内的分布,并用实验进行了验证。文献[20-23]提出了统一量纲的惯量耦合强度指标,研究了评价指标随机构运动状况的变化规律。WU 等^[24]提出了任务空间中各向同性的动态性能指标,综合考虑了动力学模型中加速度、速度、重力等影响因素,并以4自由度机器人为例验证了性能指标的有效性。

本文基于牛顿-欧拉法,考虑构件重力以及外负载建立(3CRR/R)&CRU 并联机构的逆向动力学模

型,并利用有限元仿真验证模型的正确性。基于关节空间的惯量矩阵,建立支链间惯量耦合强度评价指标,分析其在工作空间内的分布规律,并与结构降耦前的机构进行对比分析。

1 机构描述及运动学分析

1.1 机构描述

(3CRR/R)&CRU 机构的结构简图如图1所示,可看成由两个子结构并联而成。动平台2一方面通过 $C_{41}R_{42}U_{43}$ 支链直接与静平台0相连;另一方面通过转动副 R_D 、中间平台1及3条CRR支链与静平台0相连,其中3条CRR支链相互正交,分别沿 x 、 y 、 z 轴安装。与 Quadrupteron 机构相比,该机构由两个基本运动链组成,不仅耦合度降低、运动学解耦,而且全工作空间内所有位置的转动能力一致^[1],克服了一般并联机构耦合度强、控制复杂的弱点。

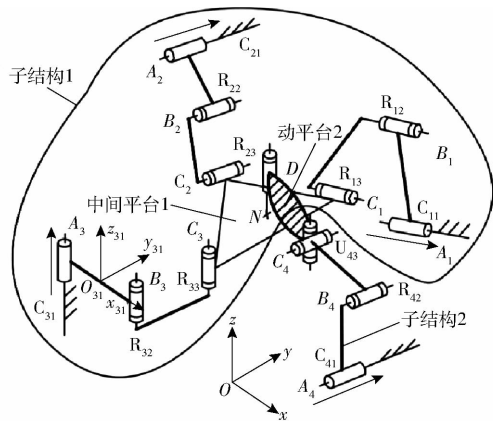


图1 (3CRR/R)&CRU 并联机构
Fig.1 (3CRR/R)&CRU PM

机构的4个驱动副分别安装在间距为 L 的4个轨道上。在固定轨道上点 O 建立静坐标系 $Oxyz$,该机构的末端动平台2能够实现 x 、 y 、 z 3个方向的移动以及绕垂直方向轴线的转动。

设机构输入矢量为 $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$,末端输出点 D 的位姿为 (x_D, y_D, z_D, φ) ,其中 φ 为动平台的姿态转角。 h 为中间平台和动平台之间的高度差,动平台长度为 l ,转动副 R_{13} 在中间平台的安装基点为点 C_i ,分布在半径为 r 的圆周上,以中间平台点 N 为原点建立图2所示坐标系 $Nuvw$, w 轴垂直于中间平台, NC_i 与 u 轴的安装角为 β_i 。机构定长杆 A_iB_i 、 B_iC_i 杆长分别为 l_{i1} 、 l_{i2} ($i=1,2,3,4$);杆件 A_iB_i 、 B_iC_i 转动角分别定义为 θ_{i1} 、 θ_{i2} ($i=1,2,3,4$)。

机构支链1、2、3、4存在的运动学关系分别为

$$\begin{cases} x_N = \rho_1 - rc\beta_3 \\ y_N = L - l_{11}c\theta_{11} - l_{12}c(\theta_{11} + \theta_{12}) - rs\beta_3 \\ z_N = l_{11}s\theta_{11} + l_{12}s(\theta_{11} + \theta_{12}) \end{cases} \quad (1)$$

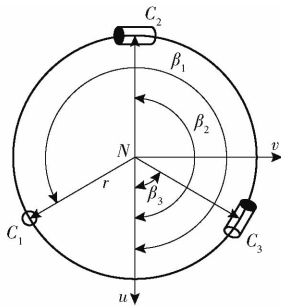


图2 运动副在中间平台 1 上的分布
Fig.2 Distribution of pairs on moving platform 1

$$\begin{cases} x_N = l_{21}c\theta_{21} + l_{22}c(\theta_{21} + \theta_{22}) - rc\beta_2 \\ y_N = \rho_2 - rs\beta_2 \\ z_N = L - l_{21}s\theta_{21} - l_{22}s(\theta_{21} + \theta_{22}) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_N = l_{31}c\theta_{31} + l_{32}c(\theta_{31} + \theta_{32}) - rc\beta_1 \\ y_N = l_{31}s\theta_{31} + l_{32}s(\theta_{31} + \theta_{32}) - rs\beta_3 \\ z_N = \rho_3 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_{C_4} = L - l_{41}c\theta_{41} - l_{42}c(\theta_{41} + \theta_{42}) = x_N + lc\varphi \\ y_{C_4} = \rho_4 = y_N + ls\varphi \\ z_{C_4} = L - l_{41}s\theta_{41} - l_{42}s(\theta_{41} + \theta_{42}) = z_N + h \end{cases} \quad (4)$$

式中,c 表示余弦函数;s 表示正弦函数。

1.2 机构位置正反解

由式(1)~(4)可得机构位置反解方程

$$\begin{cases} x_D = \rho_1 - rc\beta_3 \\ y_D = \rho_2 - rs\beta_2 \\ z_D = \rho_3 + h \\ s\varphi = \frac{\rho_4 - \rho_2 + rs\beta_2}{l} \end{cases} \quad (5)$$

机构位置正解方程为

$$\begin{cases} \rho_1 = x_D + rc\beta_3 \\ \rho_2 = y_D + rs\beta_2 \\ \rho_3 = z_D - h \\ \rho_4 = \rho_2 + rs\beta_1 + ls\varphi \end{cases} \quad (6)$$

由式(5)、(6)可知,机构 x 、 y 、 z 方向的移动输出与 3 支链的驱动输入 ρ_1 、 ρ_2 、 ρ_3 存在一一对应关系,且互相之间独立,转动输出仅与 ρ_2 、 ρ_4 相关,故机构具有运动学解耦特性。

1.3 动平台速度和加速度

设机构驱动支链的驱动速度为 $\dot{\boldsymbol{\rho}} = [\dot{\rho}_1 \quad \dot{\rho}_2 \quad \dot{\rho}_3 \quad \dot{\rho}_4]^T$,加速度为 $\ddot{\boldsymbol{\rho}} = [\ddot{\rho}_1 \quad \ddot{\rho}_2 \quad \ddot{\rho}_3 \quad \ddot{\rho}_4]^T$;动平台线速度 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_D \quad \dot{y}_D \quad \dot{z}_D \quad \dot{\varphi}]^T$,加速度 $\mathbf{a} = [\ddot{x}_D \quad \ddot{y}_D \quad \ddot{z}_D \quad \ddot{\varphi}]^T$,机构速度雅可比矩阵为 $\mathbf{J}$ 。

对式(6)关于时间求导,可得

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{x}} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & lc\varphi \end{bmatrix}$$

1.4 中间平台速度和加速度

根据动平台与中间平台的位置关系,以及机构的位置正反解方程式(5)、(6),可得中间平台几何中心在坐标系 $Oxyz$ 系下的矢量表示为 (x_1, y_1, z_1) ,其中

$$\begin{cases} x_1 = \rho_1 - rc\beta_3 \\ y_1 = \rho_2 - rs\beta_2 \\ z_1 = \rho_3 \end{cases} \quad (8)$$

对式(8)关于时间求一阶和两阶导数,可得中间平台几何中心输出速度 $\mathbf{v}_1 = [\dot{\rho}_1 \quad \dot{\rho}_2 \quad \dot{\rho}_3]^T$,加速度 $\mathbf{a}_1 = [\ddot{\rho}_1 \quad \ddot{\rho}_2 \quad \ddot{\rho}_3]^T$ 。另,由于中间平台仅做平动,其角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 和角加速度 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 均为 0。

1.5 驱动杆 A_iB_i 速度和加速度

由式(1)~(4)可推导得

$$M_i s\theta_{i1} + N_i c\theta_{i1} = K_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} M_1 = 2z_N l_{11} \\ N_1 = 2l_{11}(L - y_N - rs\beta_3) \\ K_1 = z_N^2 + (L - y_N - rs\beta_3)^2 + l_{11}^2 - l_{12}^2 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} M_2 = 2l_{21}(L - z_N) \\ N_2 = 2l_{21}(x_N + rc\beta_2) \\ K_2 = (L - z_N)^2 + (x_N + rs\beta_2)^2 + l_{21}^2 - l_{22}^2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} M_3 = 2(y_N + rs\beta_1)l_{31} \\ N_3 = 2(x_N + rc\beta_1)l_{31} \\ K_3 = (y_N + rs\beta_1)^2 + (x_N + rc\beta_1)^2 + l_{31}^2 - l_{32}^2 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} M_4 = 2l_{41}(L - z_N - h) \\ N_4 = 2l_{41}(L - x_N - lc\varphi) \\ K_4 = (L - z_N - h)^2 + (L - x_N - lc\varphi)^2 + l_{41}^2 - l_{42}^2 \end{cases} \quad (13)$$

对式(9)求解,可得杆 A_iB_i 转动角为

$$\theta_{i1} = 2\arctan \frac{M_i \pm \sqrt{M_i^2 + N_i^2 - K_i^2}}{N_i + K_i} \quad (14)$$

则杆件 A_iB_i 质心速度和角速度为

$$\mathbf{v}_{i1} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{Ai} + \mathbf{v}_{Bi}) \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{i1} = \frac{(\mathbf{v}_{Bi} - \mathbf{v}_{Ai}) \times \mathbf{e}_{AiBi}}{l_{i1}} \quad (16)$$

式中 $\mathbf{e}_{AiBi}$ ——点 A_i 到点 B_i 的单位向量

$\mathbf{v}_{Ai}$ 、 $\mathbf{v}_{Bi}$ ——点 A_i 、 B_i 在静坐标系中的速度

对式(15)、(16)求导,可得杆 $A_i B_i$ 质心加速度和角加速度为

$$\mathbf{a}_{i1} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{v}}_{Ai} + \dot{\mathbf{v}}_{Bi}) \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i1} = \frac{(\mathbf{a}_{Bi} - \mathbf{a}_{Ai}) \times \mathbf{e}_{AiBi}}{l_{i1}} + \frac{(\mathbf{v}_{Bi} - \mathbf{v}_{Ai}) \times \dot{\mathbf{e}}_{AiBi}}{l_{i1}} \quad (18)$$

1.6 被动杆 $B_i C_i$ 速度和加速度

同样,杆 $B_i C_i$ 质心的速度和角速度为

$$\mathbf{v}_{i2} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{Bi} + \mathbf{v}_{Ci}) \quad (i=1,2,3,4) \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{i2} = \frac{(\mathbf{v}_{Ci} - \mathbf{v}_{Bi}) \times \mathbf{e}_{BiCi}}{l_{i2}} \quad (20)$$

对式(19)、(20)求导,可得杆 $B_i C_i$ 质心加速度和角加速度为

$$\mathbf{a}_{i2} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{v}}_{Bi} + \dot{\mathbf{v}}_{Ci}) \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i2} = \frac{(\mathbf{a}_{Ci} - \mathbf{a}_{Bi}) \times \mathbf{e}_{BiCi}}{l_{i2}} + \frac{(\mathbf{v}_{Ci} - \mathbf{v}_{Bi}) \times \dot{\mathbf{e}}_{BiCi}}{l_{i2}} \quad (22)$$

2 并联机构动力学模型

采用牛顿-欧拉法建立机构的动力学模型,分别以运动构件和动平台为研究对象进行受力分析。为简化模型做如下假设:①构件及动平台为质量集中分布的刚体单元,构件几何中心与其重心重合,重力矢量在 z 轴负方向。②动平台所受外载荷简化为过其几何中心的力 F_{ex} 和力矩 M_{ex} 。③与机架相连的移动副为驱动副,采用伺服电机+减速器+滚珠丝杆副的驱动形式。

2.1 子结构 1 中各运动构件

子结构 1 由 3 条相同的 CRR 支链并联而成,应分别进行受力分析。

2.1.1 驱动杆 $A_i B_i$ 受力分析

驱动杆 $A_i B_i$ ($i=1,2,3$) 两端分别通过圆柱副和转动副与定平台(包括驱动装置)和被动杆 $B_i C_i$ 相连,受力如图 3 所示。

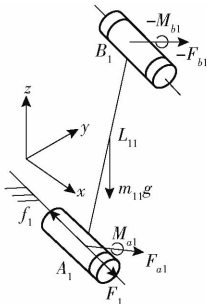


图 3 驱动杆 $A_i B_i$ 受力分析

Fig. 3 Force analysis of rod $A_i B_i$

在圆柱副处驱动杆受力 $\mathbf{F}_{ai} = (F_{aix}, F_{aiy}, F_{aiz})$ 和力矩 $\mathbf{M}_{ai} = (M_{aix}, M_{aiy}, M_{aiz})$ 作用,在转动副处受杆

$B_i C_i$ 的约束力 $\mathbf{F}_{bi} = (F_{bix}, F_{biy}, F_{biz})$ 和约束力矩 $\mathbf{M}_{bi} = (M_{bix}, M_{biy}, M_{biz})$,以及连架杆自重 $m_{i1}g$ 。其中, F_{aix} 、 F_{aiy} 、 F_{aiz} 分别为作用在支链 1、2、3 丝杆螺母上的主驱动力,记为 τ_1 、 τ_2 、 τ_3 。又根据支链布局,约束力矩可分别记为 $\mathbf{M}_{a1} = (0, M_{a1y}, M_{a1z})$ 、 $\mathbf{M}_{a2} = (M_{a2x}, 0, M_{a2z})$ 、 $\mathbf{M}_{a3} = (M_{a3x}, M_{a3y}, 0)$ 、 $\mathbf{M}_{b1} = (0, M_{b1y}, M_{b1z})$ 、 $\mathbf{M}_{b2} = (M_{b2x}, 0, M_{b2z})$ 、 $\mathbf{M}_{b3} = (M_{b3x}, M_{b3y}, 0)$ 。

则杆 $A_i B_i$ 力平衡方程为

$$\begin{bmatrix} F_{aix} \\ F_{aiy} \\ F_{aiz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{bix} \\ F_{biy} \\ F_{biz} \end{bmatrix} + m_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} - m_{i1} \begin{bmatrix} a_{i1x} \\ a_{i1y} \\ a_{i1z} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (23)$$

式中 $\mathbf{0}$ ——零矩阵

在固定坐标系下对杆 $A_i B_i$ 质心取矩,得力矩平衡方程为

$$\begin{bmatrix} M_{aix} \\ M_{aiy} \\ M_{aiz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{bix} \\ M_{biy} \\ M_{biz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{i1x} \\ r_{i1y} \\ r_{i1z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{aix} \\ F_{aiy} \\ F_{aiz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{i2x} \\ r_{i2y} \\ r_{i2z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{bix} \\ F_{biy} \\ F_{biz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{i1x} \\ M_{i1y} \\ M_{i1z} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (24)$$

其中

$$M_{i1} = I_{i1} \boldsymbol{\varepsilon}_{i1} + \boldsymbol{\omega}_{i1} I_{i1} \boldsymbol{\omega}_{i1}$$

式中 M_{i1} ——杆 $A_i B_i$ 惯性力矩

I_{i1} ——杆 $A_i B_i$ 相对于质心的转动惯量

$\mathbf{r}_{i1}$ 、 $\mathbf{r}_{i2}$ ——点 A_i 、点 B_i 相对杆质心的位置矢量

2.1.2 被动杆 $B_i C_i$ 受力分析

杆 $B_i C_i$ ($i=1,2,3$) 两端均以转动副与驱动杆 $A_i B_i$ 和中间平台连接,受到驱动杆的反力 $-F_{bi}$ 和反力矩 $-M_{bi}$,受到中间平台的约束力 $\mathbf{F}_{ci} = (F_{cix}, F_{ciy}, F_{ciz})$ 和约束力矩 $\mathbf{M}_{ci}$ (支链 1、2、3 分别记为 $\mathbf{M}_{c1} = (0, M_{c1y}, M_{c1z})$ 、 $\mathbf{M}_{c2} = (M_{c2x}, 0, M_{c2z})$ 、 $\mathbf{M}_{c3} = (M_{c3x}, M_{c3y}, 0)$),以及杆件自重 $m_{i2}g$,受力如图 4 所示。

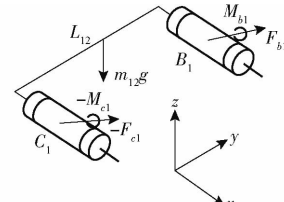


图 4 杆件 $B_i C_i$ 的受力分析

Fig. 4 Force analysis of rod $B_i C_i$

则杆 $B_i C_i$ 力平衡方程为

$$\begin{bmatrix} F_{bix} \\ F_{biy} \\ F_{biz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{cix} \\ F_{ciy} \\ F_{ciz} \end{bmatrix} + m_{i2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} - m_{i2} \begin{bmatrix} a_{i2x} \\ a_{i2y} \\ a_{i2z} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (25)$$

对杆 $B_i C_i$ 质心取矩,得力矩平衡方程

$$\begin{bmatrix} M_{cix} \\ M_{ciy} \\ M_{ciz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{bix} \\ M_{biy} \\ M_{biz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{i3x} \\ r_{i3y} \\ r_{i3z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{bix} \\ F_{biy} \\ F_{biz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{i4x} \\ r_{i4y} \\ r_{i4z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{cix} \\ F_{ciy} \\ F_{ciz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{i2x} \\ M_{i2y} \\ M_{i2z} \end{bmatrix} = \mathbf{O} \quad (26)$$

其中 $M_{i2} = I_{i2} \varepsilon_{i2} + \omega_{i2} I_{i2} \omega_{i2}$
式中 M_{i2} ——杆 $B_i C_i$ 惯性力矩
 I_{i2} ——杆 $B_i C_i$ 相对于质心的转动惯量
 $r_{i3}、r_{i4}$ ——点 B_i 、点 C_i 相对于质心的位置矢量

2.1.3 中间平台受力分析

中间平台受力包括 3 个转动副 R_{i3} 处的反力 $-F_{ci}$ 和约束反力矩 $-M_{ci}$ ，以及转动副 R_D 处的约束力 $F_{t1} = (F_{t1x}, F_{t1y}, F_{t1z})$ 和约束力矩 $M_{t1} = (M_{t1x}, M_{t1y}, 0)$ ，以及自身重力 $m_1 g$ ，见图 5。

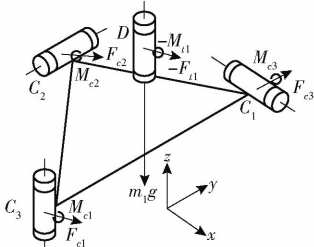


图 5 中间平台受力分析

Fig. 5 Force analysis of middle platform

中间平台力平衡方程为

$$\begin{bmatrix} F_{t1x} \\ F_{t1y} \\ F_{t1z} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} F_{cix} \\ F_{ciy} \\ F_{ciz} \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} - m_1 \begin{bmatrix} a_{i1x} \\ a_{i1y} \\ a_{i1z} \end{bmatrix} = \mathbf{O} \quad (27)$$

由于中间平台仅有移动，只产生惯性力，在定坐标系下对质心的力矩平衡方程为

$$\begin{bmatrix} M_{t1x} \\ M_{t1y} \\ 0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} M_{cix} \\ M_{ciy} \\ M_{ciz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{cix} \\ r_{ciy} \\ r_{ciz} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{cix} \\ F_{ciy} \\ F_{ciz} \end{bmatrix} = \mathbf{O} \quad (28)$$

式中 r_{ci} ——点 C_i 相对于中间平台质心点 D 的位置矢量

2.2 子结构 2 运动构件

2.2.1 驱动杆 $A_4 B_4$ 受力分析

驱动杆 $A_4 B_4$ 在圆柱副 C_{41} 处受力 $F_{a4} = (F_{a4x}, F_{a4y}, F_{a4z})$ 和约束力矩 $M_{a4} = (M_{a4x}, 0, M_{a4z})$ ；转动副 R_{42} 处受约束力 $F_{b4} = (F_{b4x}, F_{b4y}, F_{b4z})$ 和约束力矩 $M_{b4} = (0, M_{b4y}, M_{b4z})$ ，以及自重 $m_{41} g$ ，如图 6 所示。其中， F_{a4y} 为支链驱动力，记为 τ_4 。

则杆 $A_4 B_4$ 的力平衡方程为

$$\begin{bmatrix} F_{a4x} \\ F_{a4y} \\ F_{a4z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{b4x} \\ F_{b4y} \\ F_{b4z} \end{bmatrix} + m_{41} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} - m_{41} \begin{bmatrix} a_{41x} \\ a_{41y} \\ a_{41z} \end{bmatrix} = \mathbf{O} \quad (29)$$

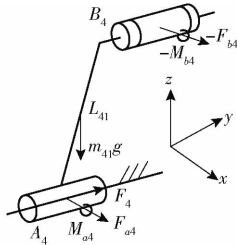


图 6 驱动杆 $A_4 B_4$ 受力分析

Fig. 6 Force analysis of rod $A_4 B_4$

对杆 $A_4 B_4$ 质心取矩，得力矩平衡方程为

$$\begin{bmatrix} M_{a4x} \\ 0 \\ M_{a4z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{b4x} \\ 0 \\ M_{b4z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{41x} \\ r_{41y} \\ r_{41z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{a4x} \\ F_{a4y} \\ F_{a4z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{42x} \\ r_{42y} \\ r_{42z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{b4x} \\ F_{b4y} \\ F_{b4z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{41x} \\ M_{41y} \\ M_{41z} \end{bmatrix} = \mathbf{O} \quad (30)$$

其中 $M_{41} = I_{41} \varepsilon_{41} + \omega_{41} I_{41} \omega_{41}$
式中 M_{41} ——杆 $A_4 B_4$ 惯性力矩
 I_{41} ——杆 $A_4 B_4$ 相对于质心的转动惯量
 $r_{41}、r_{42}$ ——点 A_4 、点 B_4 相对质心位置矢量

2.2.2 被动杆 $B_4 C_4$ 受力分析

被动杆 $B_4 C_4$ 在虎克铰 U_{43} 处受动平台的约束力 $F_{i2} = (F_{i2x}, F_{i2y}, F_{i2z})$ 和约束力矩 $M_{i2} = (M_{i2x}, 0, 0)$ ，在转动副 R_{42} 处受反力 $-F_{b4}$ 和约束反力矩 $-M_{b4}$ ，以及杆件自重 $m_{42} g$ ，如图 7 所示。

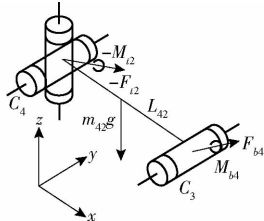


图 7 连杆 $B_4 C_4$ 的受力分析

Fig. 7 Force analysis of rod $B_4 C_4$

则杆 $B_4 C_4$ 的力平衡方程为

$$\begin{bmatrix} F_{i2x} \\ F_{i2y} \\ F_{i2z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{b4x} \\ F_{b4y} \\ F_{b4z} \end{bmatrix} + m_{42} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} - m_{42} \begin{bmatrix} a_{42x} \\ a_{42y} \\ a_{42z} \end{bmatrix} = \mathbf{O} \quad (31)$$

对杆 $B_4 C_4$ 质心取矩，得力矩平衡方程

$$\begin{bmatrix} M_{i2x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{b4x} \\ 0 \\ M_{b4z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{43x} \\ r_{43y} \\ r_{43z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{b4x} \\ F_{b4y} \\ F_{b4z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{44x} \\ r_{44y} \\ r_{44z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{i2x} \\ F_{i2y} \\ F_{i2z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{42x} \\ M_{42y} \\ M_{42z} \end{bmatrix} = \mathbf{O} \quad (32)$$

其中 $M_{42} = I_{42} \varepsilon_{42} + \omega_{42} I_{42} \omega_{42}$
式中 M_{42} ——杆 $B_4 C_4$ 惯性力矩

I_{42} ——杆 B_4C_4 相对于质心的转动惯量
 r_{43} 、 r_{44} ——点 B_4 、点 C_4 相对质心位置矢量

2.3 动平台受力分析

动平台两侧分别通过 R_D 和 U_{43} 与支链相连,受力如图 8 所示,包括转动副约束反力 $-F_{t1}$ 和约束反力矩 $-M_{t1}$;约束反力 $-F_{t2}$ 和约束反力矩 $-M_{t2}$,外力 $F_e = (F_{ex}, F_{ey}, F_{ez})$ 、外力矩 $M_e = (M_{ex}, M_{ey}, M_{ez})$;以及自身重力 mg 。

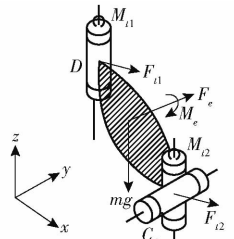


图 8 动平台受力分析

Fig. 8 Force analysis of moving platform

则动平台力/力矩平衡方程为

$$\begin{bmatrix} F_{ex} \\ F_{ey} \\ F_{ez} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{t1x} \\ F_{t1y} \\ F_{t1z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{t2x} \\ F_{t2y} \\ F_{t2z} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

(33)

$$\begin{bmatrix} M_{ex} \\ M_{ey} \\ M_{ez} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{t1x} \\ M_{t1y} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{t2x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{C4x} \\ r_{C4y} \\ r_{C4z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{t2x} \\ F_{t2y} \\ F_{t2z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{Dx} \\ r_{Dy} \\ r_{Dz} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{t1x} \\ F_{t1y} \\ F_{t1z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

(34)

其中 $M = I\epsilon + \omega I\omega$
式中 M ——动平台惯性力矩
 I ——动平台相对于质心的转动惯量
 r_D 、 r_{C4} ——点 D 和点 C_4 相对质心位置矢量

2.4 并联机构动力学方程

联立式 (23) ~ (34), 共 60 个方程, 60 个未知量, 方程可解。通过消元法消除内力/力矩, 可得到机构驱动力的显式表达式, 并记驱动力为

$$\tau = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4]^T = [F_{a1x} \quad F_{a2y} \quad F_{a3z} \quad F_{a4y}]^T$$

3 动力学数值算例

3.1 动力学模型仿真实验

为验证所建动力学模型的正确性, 采用 ADAMS 软件对机构进行仿真实验。通过设置环境参数和单位系统并添加相应的运动副约束, 虚拟样机模型如图 9 所示。

机构几何和惯性参数如表 1 所示。为提高理论建模精度, 杆件质心、质量和惯量均由仿真模型获

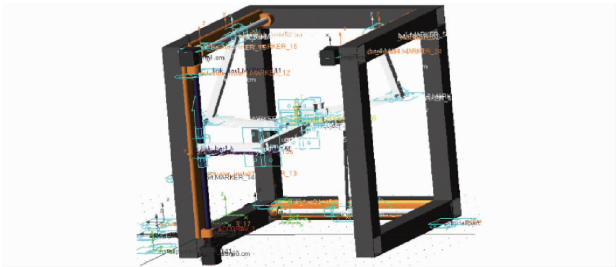


图 9 ADAMS 仿真模型

Fig. 9 ADAMS simulation model

表 1 机构的几何和物理参数

Tab. 1 Geometrical and inertial parameters

参数	数值
l_{11}/mm	170
l_{12}/mm	225
l_{21}/mm	237
l_{22}/mm	208
l_{31}/mm	223
l_{32}/mm	179
l_{41}/mm	166
l_{42}/mm	223
r/mm	40
h/mm	20
l/mm	67
L/mm	400
β_1/rad	$5\pi/3$
β_2/rad	π
β_3/rad	$\pi/3$
m/g	81
m_1/g	106
m_{11}/g	132
m_{12}/g	200
m_{21}/g	186
m_{22}/g	183
m_{31}/g	175
m_{32}/g	145
m_{41}/g	129
m_{42}/g	195
$^0I/(\text{g}\cdot\text{mm}^2)$	diag[21 551, 25 092, 44 108]
$^0I_1/(\text{g}\cdot\text{mm}^2)$	diag[33 760, 26 059, 12 493]
$^0I_{11}/(\text{g}\cdot\text{mm}^2)$	diag[620 835, 9 284, 618 116]
$^0I_{12}/(\text{g}\cdot\text{mm}^2)$	diag[266 183, 9 033, 267 136]
$^0I_{21}/(\text{g}\cdot\text{mm}^2)$	diag[9 843, 750 119, 747 244]
$^0I_{22}/(\text{g}\cdot\text{mm}^2)$	diag[11 360, 480 121, 478 923]
$^0I_{31}/(\text{g}\cdot\text{mm}^2)$	diag[7 027, 259 330, 261 420]
$^0I_{32}/(\text{g}\cdot\text{mm}^2)$	diag[12 439, 630 318, 631 628]
$^0I_{41}/(\text{g}\cdot\text{mm}^2)$	diag[6 868, 240 582, 242 628]
$^0I_{42}/(\text{g}\cdot\text{mm}^2)$	diag[11 910, 685 402, 684 143]

得; 中间平台和杆件采用碳纤维, 驱动系统采用 1FL6024-2AF 型直流伺服电机和 1605 型滚珠丝杆。

假设外负载为 0, 动平台姿态角不变 $\varphi = 0^\circ$, 初

始运动条件下动平台质心坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 给定动平台运动轨迹为

$$\begin{cases} x = x_0 + 10\sin(2\pi t) \\ y = y_0 + 10\cos(2\pi t) \\ z = z_0 + 10\sin(2\pi t) \end{cases} \quad (35)$$

将表 1 中参数值代入动力学方程, 利用 Matlab

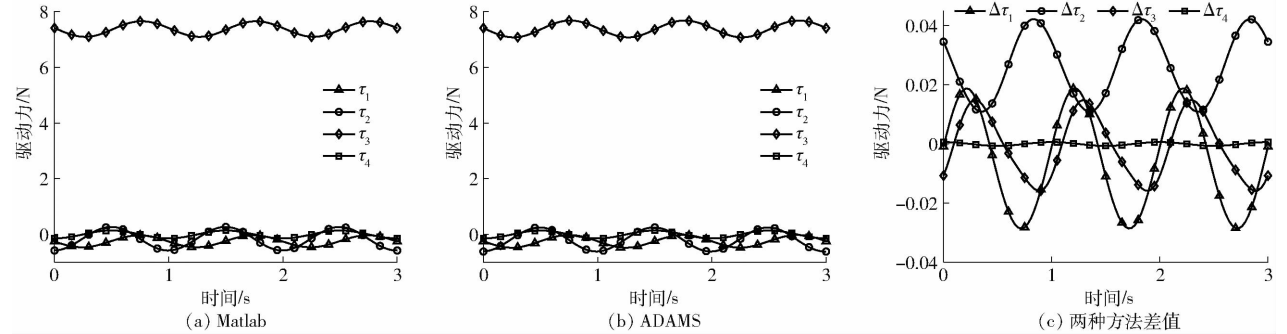


图 10 驱动力计算结果
Fig. 10 Driving forces of limbs

3.2 加速度对驱动力的影响

对高速并联机构, 主要承受来自高速运动产生的惯性力, 因此下面分析当动平台最大加速度为 3、7、11 m/s² 时机构驱动力的变化, 并假设外负载为 0, 动平台姿态角不变 $\varphi = 0^\circ$, 沿平行于坐标轴方向和空间直线运动(4 条轨迹如图 11 所示), 均采用五次多项式进行路径规划, 且初始位置的速度、加速度为 0, 驱动力计算结果如图 12 所示, 每条支链驱动力最大值见表 2。

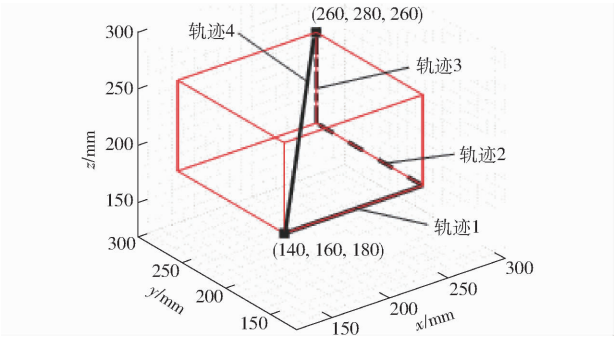


图 11 不同运动轨迹
Fig. 11 Different trajectories

由于机构沿 x 、 y 、 z 轴的运动分别由支链 1、2、3 的驱动控制, 因此当动平台平行于 x 、 y 、 z 轴运动时, 支链 1、2、3 分别定义为驱动支链, 其余支链定义为相应的锁定支链。

由图 12 和表 2 可得出:

(1) 无论沿哪个方向运动, 驱动力随动平台加速度的增加而增加。特别是平行于坐标轴方向运动时, 驱动支链的驱动力对加速度呈线性增加, 但锁定支链的驱动力增加幅度较小。

(2) 无论平面运动还是空间运动, 支链 3 的驱

动力值都较大。沿 x 、 y 轴运动时, 支链 3 的驱动力接近甚至超过驱动支链的驱动力, 特别是低加速度时更为明显, 因此机构结构设计时支链 3 是关键。

计算各支链驱动力, 计算结果与 ADAMS 仿真软件按同样轨迹仿真运动的结果进行对比, 结果如图 10 所示。由图 10c 可知, 理论值与仿真值基本吻合, 4 条驱动力曲线的最大相对误差分别为 5.49%、2.51%、8.26%、0.35%, 验证了动力学模型正确性。

(3) 动平台做定姿态运动时, 支链 4 仅与 y 轴方向的运动有关, 当动平台沿 x 、 z 轴运动时, 支链 4 的驱动力接近 0。

(4) 支链间驱动力存在耦合。相同的加速度条件下, 空间运动时的驱动力大于单轴运动时的驱动力, 且加速度越大, 差值越明显, 这也证明了惯量对机构动力学性能有较大影响。

3.3 动平台姿态角对驱动力的影响

为研究姿态角对机构驱动力的影响, 假设动平台中心点 D 按图 11 中轨迹 4 运动, 姿态角分别保持为 $\varphi = \pm 60^\circ$ 、 $\pm 30^\circ$ 、 0° 时, 计算支链的驱动力, 结果如图 13 所示。由图 13 可得: ①当运动轨迹相同时, 动平台姿态角的变化对驱动力 τ_1 、 τ_3 没有影响, 对 τ_2 、 τ_4 有影响, 且影响规律相同。②当姿态角为 -60° 时, 所需驱动力最小, 可以将此姿态设置为机构的初始姿态。

4 动力学耦合特性分析

并联机构笛卡尔空间逆动力学模型可表示为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}_x \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{H}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{F} \quad (36)$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ ——主动关节的驱动力
 $\mathbf{M}_x$ ——机构广义坐标下的惯性矩阵
 $\mathbf{H}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ ——重力、科氏力和离心力
 $\mathbf{F}$ ——外力

对高加减速机构而言, 与加速度有关的项 $\mathbf{M}_x$ 将起主导作用。对 (3CRR/R) & CRU 并联机构而

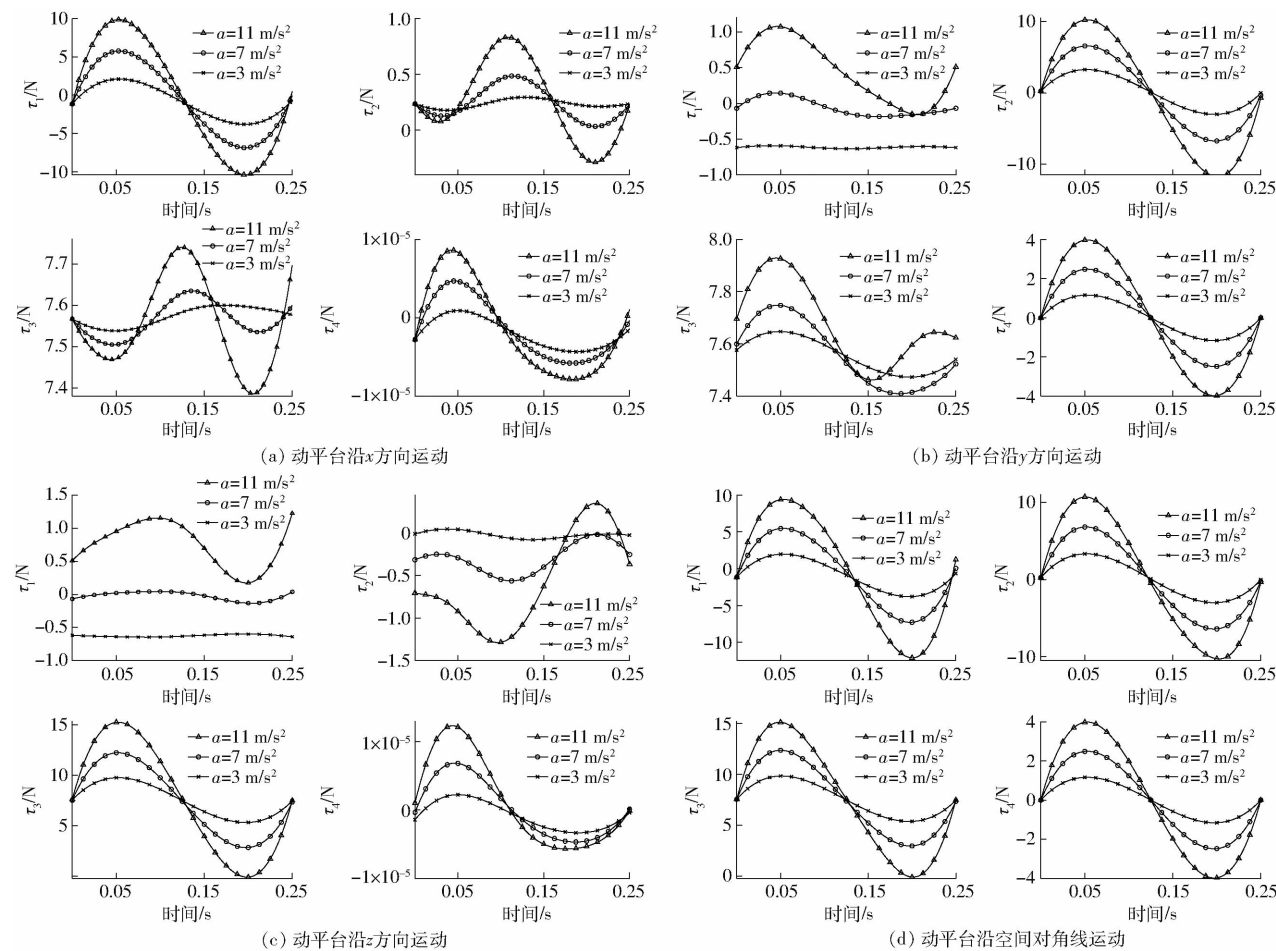


图 12 加速度对驱动力的影响

Fig. 12 Effects of acceleration on driving force

表 2 不同加速度时的驱动力

Tab. 2 Driving force at different accelerations N

加速度/ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)		x 方向	y 方向	z 方向	空间对角线
3	τ_1	3. 8	0. 63	0. 65	3. 81
	τ_2	0. 3	3. 27	0. 08	3. 32
	τ_3	7. 6	7. 65	9. 76	9. 85
	τ_4	$4. 2 \times 10^{-6}$	1. 16	$2. 3 \times 10^{-6}$	1. 16
7	τ_1	6. 86	0. 18	0. 13	7. 30
	τ_2	0. 49	6. 59	0. 56	6. 81
	τ_3	7. 63	7. 75	12. 22	12. 37
	τ_4	$5. 8 \times 10^{-6}$	2. 49	$6. 9 \times 10^{-6}$	2. 49
11	τ_1	10. 38	1. 08	1. 15	12. 12
	τ_2	0. 83	10. 25	1. 29	10. 68
	τ_3	7. 74	7. 93	15. 25	15. 12
	τ_4	$8. 6 \times 10^{-6}$	3. 98	$9. 8 \times 10^{-6}$	3. 98

言,广义坐标下的惯性矩阵为

$$\boldsymbol{M}_X = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_1 + \sum_{i=1}^4 (\boldsymbol{M}_{i1} + \boldsymbol{M}_{i2}) \quad (37)$$

式中 $\boldsymbol{M}$ ——动平台在广义坐标下的惯性矩阵

$\boldsymbol{M}_1$ ——中间平台广义坐标下的惯性矩阵

$\boldsymbol{M}_{i1}$ ——驱动杆在广义坐标下的惯性矩阵

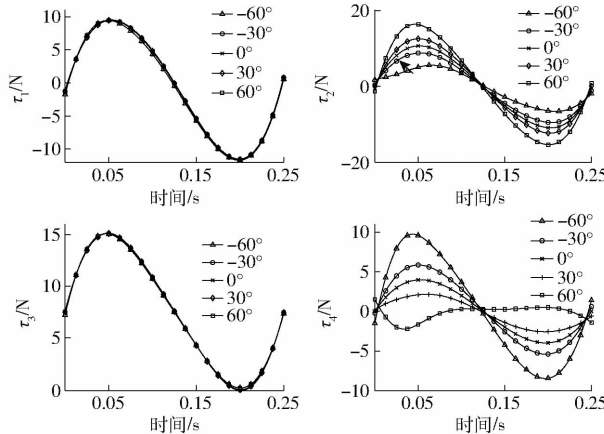


图 13 姿态角 φ 对驱动力的影响

Fig. 13 Effect of φ on driving force

$\boldsymbol{M}_{i2}$ ——被动杆在广义坐标下的惯性矩阵

为研究并联机构主动支链间的动力学耦合特性,需要建立其关节空间的驱动力模型。由于机构动能既能在关节空间下表示,又能在广义坐标下表示,则有

$$\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{M}_X \dot{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{M}_q \dot{\boldsymbol{q}} \quad (38)$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{J} \dot{\boldsymbol{q}} \quad (39)$$

将式(39)代入式(38),可得到笛卡尔坐标下的惯量矩阵 $\mathbf{M}_x$ 与关节空间的惯量矩阵 $\mathbf{M}_q$ 之间的关系为^[22]

$$\mathbf{M}_q = (\mathbf{J}^{-1})^T \mathbf{M}_x (\mathbf{J}^{-1})$$

(40)

根据文献[14],可计算出机构每个构件 j 在定坐标系下的广义惯量矩阵为

$$\mathbf{M}_x^j = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^j \mathbf{M}^j \mathbf{R}^{jT} - m^j \hat{\mathbf{c}}^2 & m^j \hat{\mathbf{c}} \\ m^j \hat{\mathbf{c}}^T & m^j \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

(41)

- 式中
- m ——构件 j 质量
- $\mathbf{R}$ ——构件 j 局部坐标系相对于定坐标系的旋转变换矩阵
- $\mathbf{I}$ ——单位矩阵
- $\mathbf{M}$ ——构件 j 局部坐标下的惯性矩阵
- $\hat{\mathbf{c}}$ ——构件 j 局部坐标原点相对定坐标系原点向量的反对称矩阵

机构关节空间的惯性矩阵 $\mathbf{M}_q$ 第 i 行除对角元素外的其他元素 $M_{ik} (i \neq k)$ 为第 i 支链对其余支链的耦合惯量,会产生耦合力矩从而影响支链的动态性能。基于此,文献[25]提出了并联机构支链间的动力学耦合强度指标 DCI_i ,计算式为

$$\text{DCI}_i = 1 - \frac{1}{e^{\delta_{d_i}}}$$

(42)

其中

$$\delta_{d_i} = \frac{\sum_{k=1, k \neq i}^m |\mathbf{M}_q(i, k)|}{|\mathbf{M}_q(i, i)|}$$

式中, δ_{d_i} 为耦合强度系数,是惯性矩阵 $\mathbf{M}_q$ 的非对角项相对对角项的占比,值越小表明机构受到的耦合力矩越小。耦合强度指标 DCI_i 是对 δ_{d_i} 的进一步处理,使其在 $[0, 1]$ 范围内变化。该值越接近 1,动力学耦合越严重,反之,动力学耦合强度越小。由式(42)可知, DCI_i 为机构位姿的函数。

将表 1 所示参数依次代入式(41)、(37)、(40)、(42),可得第 i 条支链的耦合强度指标 DCI_i 在工作空间的变化规律。为便于性能比较,采用同样的方法,对结构降耦前的 Quadrupterion 机构^[1]的耦合强度指标进行计算。图 14、15 分别为两个机构的 DCI 在工作空间内的分布,DCI 最大值见表 3。

由图 14、15 以及表 3 可知:

(1) 对所有支链而言, (3CRR/R)&CRU 降耦机构的耦合强度明显低于降耦之前的 Quadrupterion 机构。 DCI_1 的最大值从 0.7 降到 0.22, DCI_2 最大值从 0.6 降到 0.26, DCI_3 的最大值从 0.4 降到 0.24, DCI_4 的最大值从 0.86 降到 0.64。

(2) 运动学解耦可降低机构惯量耦合强度。由文献[26]可知,降耦前机构仅 z 向输出完全解耦,其

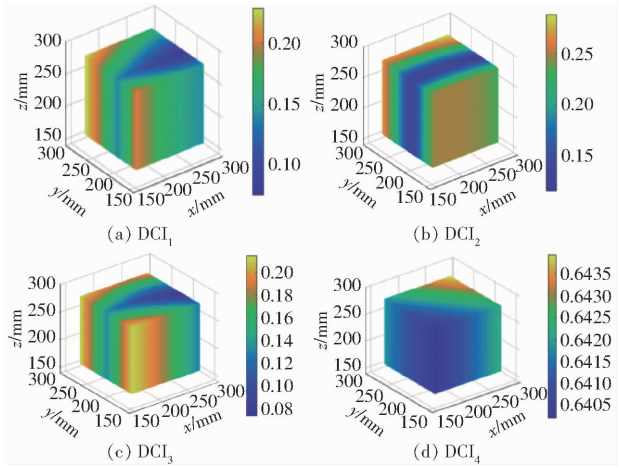


图 14 降耦后机构 (3CRR/R)&CRU 的 DCI
Fig. 14 DCI of (3CRR/R)&CRU

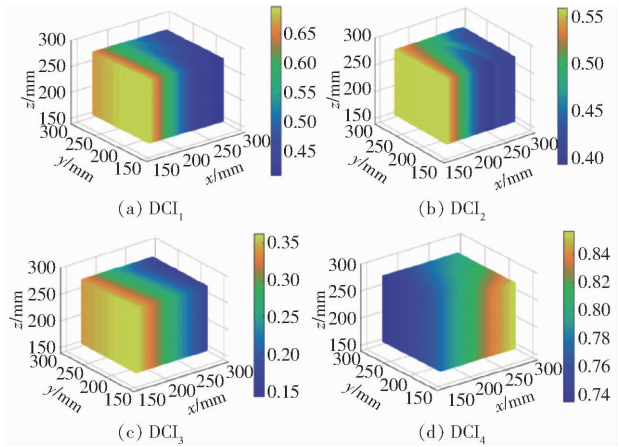


图 15 降耦前机构 Quadrupterion 的 DCI
Fig. 15 DCI of Quadrupterion

表 3 机构 DCI 的最大值
Tab. 3 Maximum DCI

机构	DCI ₁	DCI ₂	DCI ₃	DCI ₄
降耦后	0.22	0.26	0.24	0.64
降耦前	0.70	0.60	0.40	0.86

余输出为部分解耦,因此机构 DCI_3 明显低于 DCI_1 、 DCI_2 和 DCI_4 。而降耦后机构的 3 个移动输出完全解耦,转动部分解耦,输出与支链 2、4 的驱动相关,因此降耦后机构的 DCI_4 高于 DCI_1 、 DCI_2 和 DCI_3 。

为进一步分析降耦之后机构 DCI 的分布规律,绘制 $z = 260 \text{ mm}$ 时 DCI_i 在 xy 平面内的等高线图,结果如图 16 所示。由图 16 可知:

(1) 降耦机构 (3CRR/R) & CRU 所有支链的 DCI 值均很小, DCI_1 、 DCI_2 和 DCI_3 均低于 0.26,说明支链间耦合强度较弱,尤其工作空间中心位置的 DCI 值达最小。

(2) 整个 xy 平面内 DCI 值的变化幅度较小,说明机构具有较好的各向同性性能,对高速高精等工程应用更为有利。

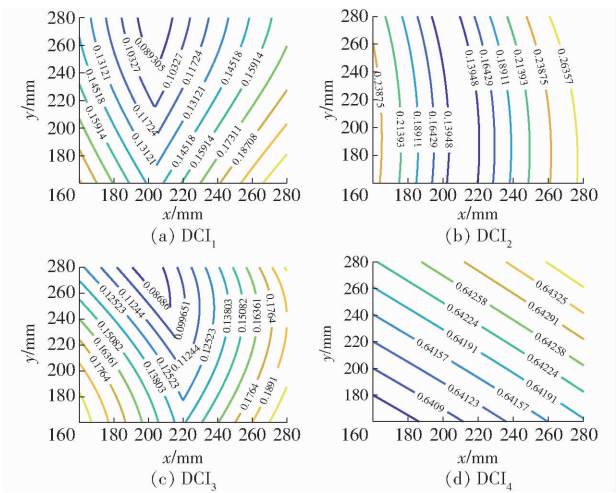


图 16 DCI 分布 ($z = 260\text{ mm}$)
Fig. 16 DCI in xy plane ($z = 260\text{ mm}$)

5 结论

- (1)考虑重力、外负载,利用牛顿-欧拉法建立了(3CRR/R)&CRU 并联机构的动力学模型,并用 ADAMS 进行了仿真验证。
- (2)基于所建动力学模型分析了加速度和动平台姿态角对机构驱动力的影响,为机构轨迹规划提供了理论依据。
- (3)建立了惯量耦合强度指标,分析了其在工作空间内的分布。结果表明,结构降耦明显降低了机构支链间的耦合强度,提高了机构的动态性能。
- (4)降耦之后的机构,不仅惯量耦合强度弱,而且整个工作空间内耦合强度变化较小,提升了机构的各向同性性能。

参 考 文 献

[1] 朱小蓉, 胡畅, 沈惠平, 等. 3T1R 并联机构降耦设计与分析[J]. 农业机械学报, 2018, 49(12): 393 – 401.
ZHU Xiaorong, HU Yang, SHEN Huiping, et al. Design and analysis of structure coupling reduction on novel 3T1R parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(12): 393 – 401. (in Chinese)

[2] 朱小蓉, 吴昊, 沈惠平. 基于虚关节法的 3T1R 混联机构静刚度特性分析[J]. 农业机械学报, 2021, 52(9): 400 – 409.
ZHU Xiaorong, WU Yu, SHEN Huiping. Static stiffness analysis of 3T1R hybrid manipulator based on virtual joint method[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(9): 400 – 409. (in Chinese)

[3] RAT N, NEAGOE M, GOGU G. Theoretical and experimental research on the dynamics of a 4-DOF Isoglide T3R1 parallel robot[C]//The 11th IFToMM International Symposium on Science of Mechanisms and Machines, 2010.

[4] TSAI M S, YUAN W H. Inverse dynamics analysis for a 3 – PRS parallel mechanism based on a special decomposition of the reaction forces[J]. Mech. Mach. Theory, 2010, 45(11): 1491 – 1508.

[5] 贾凯凯, 梅江平, 刘松涛, 等. 4 自由度并联机构刚体动力学模型[J]. 机械工程学报, 2016, 52(13): 10 – 16.
JIA Kaikai, MEI Jiangping, LIU Songtao, et al. Rigid-body dynamic model of a four-DOF parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(13): 10 – 16. (in Chinese)

[6] PEDRAMMEHR S, DANAIE B, ABDI H, et al. Dynamic analysis of Hexarot: axis-symmetric parallel manipulator[J]. Robotica, 2018, 36(2): 225 – 240.

[7] 刘晓飞, 唐艳华, 刘鑫, 等. 含约束支链的冗余驱动并联机构动力学性能优化[J]. 农业机械学报, 2021, 52(5): 378 – 385, 403.
LIU Xiaofei, TANG Yanhua, LIU Xin, et al. Dynamics performance optimization for redundantly actuated parallel manipulator with constraint branch[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(5): 378 – 385, 403. (in Chinese)

[8] CALLEGARI M, MARZETTI P. Inverse dynamics model of a parallel orienting device[C]//Proceedings 8th International IFAC Symposium on Robot Control: SYROCO, 2006.

[9] LI Y H, MA Y, LIU S T, et al. Integrated design of a 4-DOF high-speed pick-and-place parallel robot[J]. CIRP Annals, 2014, 63(1): 185 – 188.

[10] 王庚祥, 刘宏昭, 龚春园, 等. 考虑关节摩擦效应的并联机构动力学分析[J]. 农业机械学报, 2013, 44(11): 308 – 315.
WANG Gengxiang, LIU Hongzhao, GONG Chunyuan, et al. Dynamics analysis of parallel mechanism with joint friction[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(11): 308 – 315. (in Chinese)

[11] 冯志友, 张燕, 杨廷力, 等. 基于牛顿欧拉法的 2UPS – 2RPS 并联机构逆动力学分析[J]. 农业机械学报, 2009, 40(4): 193 – 197.
FENG Zhiyou, ZHANG Yan, YANG Tingli, et al. Dynamics of a 2UPS – 2RPS parallel mechanism by Newton – Euler formulation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(4): 193 – 197. (in Chinese)

[12] CHEN Miao, ZHANG Qing, QIN Xianrong, et al. Kinematic, dynamic, and performance analysis of a new 3-DOF over-constrained parallel mechanism without parasitic motion[J]. Mech. Mach. Theory, 2021, 162: 104365.

[13] GUO F, CHENG G, PANG Y. Explicit dynamic modeling with joint friction and coupling analysis of a 5-DOF hybrid polishing robot[J]. Mech. Mach. Theory, 2022, 167: 104509.

[14] 耿明超, 边辉, 刘春东, 等. 基于旋量的 4UPS/UPR 并联机构动力学建模及分析[J]. 组合机床与自动化加工技术,

- 2018(5): 42 – 46.
- GENG Mingchao, BIAN Hui, LIU Chundong, et al. Dynamics modeling and analysis of a 4UPS/UPR parallel mechanism based on screw[J]. *Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique*, 2018(5): 42 – 46. (in Chinese)
- [15] TOURASSIS V D, NEUMAN C P. The inertial characteristics of dynamic robot models[J]. *Mech. Mach. Theory*, 1985, 20(1): 41 – 52.
- [16] ASADA H. A geometrical representation of manipulator dynamics and its applications to arm design[J]. *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 1983, 105(3): 131 – 135.
- [17] LIU Z, TANG X, SHAO Z, et al. Dimensional optimization of the Stewart platform based on inertia decoupling characteristic [J]. *Robotica*, 2016, 34(5): 1151 – 1167.
- [18] 宋轶民, 金雪莹, 梁栋, 等. 两类平面并联机构凯恩动力学建模与比较研究[J]. *天津大学学报 (自然科学与工程技术版)*, 2019, 52(2): 173 – 182.
- SONG Yimin, JIN Xueying, LIANG Dong, et al. Kane-formulation-based dynamic modeling and comparative study on dynamic performance of two kinds of parallel robots[J]. *Journal of Tianjin University (Science and Technology)*, 2019, 52(2): 173 – 182. (in Chinese)
- [19] 王冬, 吴军, 王立平, 等. 3 – PRS 并联机器人惯量耦合特性研究[J]. *力学学报*, 2016, 48(4): 804 – 812.
- WANG Dong, WU Jun, WANG Liping, et al. Research on the inertia coupling property of a 3 – PRS parallel robot[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(4): 804 – 812. (in Chinese)
- [20] 山显雷. 多重扰动下 2(3HUS + S) 并联仿生髋关节试验机动态性能分析及控制策略研究[D]. 北京: 中国矿业大学, 2017.
- [21] 倪仕全, 田大鹏. 3 – PRS 并联机构的动力学惯量耦合特性分析[J]. *机电工程*, 2021, 38(7): 815 – 821.
- NI Shiquan, TIAN Dapeng. Dynamic inertia coupling characteristics analysis of 3 – PRS parallel mechanism [J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2021, 38(7): 815 – 821. (in Chinese)
- [22] 山显雷, 程刚. 高速运动下并联机器人主动支链的动力学耦合特性[J]. *机器人*, 2017, 39(5): 603 – 607.
- SHAN Xianlei, CHENG Gang. Dynamic coupling characteristics of active branches of parallel manipulator with high speed motion[J]. *Robot*, 2017, 39(5): 603 – 607. (in Chinese)
- [23] 李研彪, 郑航, 孙鹏. 考虑关节摩擦的 5 – PSS/UPU 并联机构动力学建模及耦合特性分析[J]. *机械工程学报*, 2020, 55(3): 43 – 52.
- LI Yanbiao, ZHENG Hang, SUN Peng. Dynamic modeling with joint friction and research on the inertia coupling property of a 5 – PSS/UPU parallel manipulator[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 55(3): 43 – 52. (in Chinese)
- [24] WU J, YE H, YU G, et al. A novel dynamic evaluation method and its application to a 4-DOF parallel manipulator[J]. *Mech. Mach. Theory*, 2022, 168: 104627.
- [25] 何景峰, 叶正茂, 姜洪洲, 等. 基于关节空间模型的并联机器人耦合性分析[J]. *机械工程学报*, 2006, 42(6): 161 – 165.
- HE Jingfeng, YE Zhengmao, JIANG Hongzhou, et al. Coupling analysis based on joint-space model of parallel robot[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(6): 161 – 165. (in Chinese)
- [26] 沈惠平. 机器人机构拓扑特征运动学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.