

基于最大熵原理的喷雾液滴粒径分布预测研究

彭燕祥 张 华 何贵成

(华北电力大学水利与水电工程学院, 北京 102206)

摘要: 液滴粒径分布是喷雾过程质量、动量和能量输运的关键参数,为确定喷雾中液滴粒径的分布,基于最大熵原理,通过平均直径约束条件,构建雾滴粒径数量概率密度分布的最大熵模型,应用环形鼓风喷嘴雾化的实验数据对液滴粒径分布模型进行优选。结果表明,构建的三参数和四参数最大熵模型的预测结果最为理想,预测的液滴粒径分布与实验值的相关系数均高于 0.96,均方根误差均低于 0.135。通过对比三参数和四参数最大熵模型预测结果的赤池信息准则数,表明三参数最大熵模型更适合喷雾液滴粒径分布的预测,应用不同类型喷嘴的雾化液滴粒径分布实验数据对三参数最大熵模型的适用性进行检验,结果表明模型的预测值与实验值吻合较好。最后将优选的三参数最大熵模型应用到 Pratt & Whitney Canada 公司制造的压力喷嘴喷雾液滴的粒径分布预测研究中。研究表明,构建的三参数最大熵模型,预测结果与实验数据基本吻合。

关键词: 喷雾; 液滴粒径分布; 平均直径; 最大熵

中图分类号: S491 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2023)09-0217-10 **OSID:** 

Prediction of Spray Droplet Size Distribution Based on Maximum Entropy

PENG Yanxiang ZHANG Hua HE Guicheng

(School of Water Resources and Hydropower Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

Abstract: The spray process relies heavily on the droplet size distribution, which plays a crucial role in mass, momentum and energy transport. Currently, determining the droplet size distribution is a major scientific problem, which is represented by distribution functions classified into empirical and theoretical distribution methods. Empirical methods which derive droplet size distribution formulae from statistical analysis of experimental data lack practical physical significance and rely too heavily on empirical data. In contrast, theoretical approaches mainly use the maximum entropy approach, which originates from physical conservation laws but faces challenges in accurately predicting the droplet size distribution under complex conditions. To address these challenges, a maximum entropy model of droplet size distribution was proposed based on the maximum entropy principle, with an average diameter constraint condition used for constructing three and four-parameter maximum entropy models. The optimal model was selected based on the comparison of Akaike information criterion numbers, and the three-parameter maximum entropy model using the average diameter was found to be the best in predicting droplet number distribution. Air-blast nozzle atomization experimental data were used to optimize the proposed model, and the results showed that the correlation coefficient between predicted and experimental droplet number differential distribution values was above 0.96, with a mean square error lower than 0.135. Moreover, the three-parameter maximum entropy model accurately predicted the number and distribution of spray droplets. The proposed model was also tested against experimental data on atomized droplet size distribution from different nozzle types, yielding a good match with the experimental data. Finally, the selected model was applied to predict the particle size distribution of spray droplets from pressure nozzles manufactured by Pratt & Whitney Canada, demonstrating its accuracy in predicting the spray droplet size

收稿日期: 2023-02-24 修回日期: 2023-03-25
基金项目: 国家自然科学基金项目(52279065)
作者简介: 彭燕祥(1991—),男,博士生,主要从事射流雾化、水工水力学及新能源研究,E-mail: pengyanxiang@ncepu.edu.cn
通信作者: 张华(1962—),男,教授,博士生导师,主要从事水工水力学及新能源研究,E-mail: zhanghua@ncepu.edu.cn

and quantity distribution despite the complexity of the working conditions. In conclusion, the research result can provide a significant contribution to accurately predicting droplet size distribution and quantity, and the proposed three-parameter maximum entropy model had great potential in improving spray droplet size and quantity distribution prediction accuracy.

Key words: spray; droplet size distribution; mean diameter; maximum entropy

0 引言

喷雾是一种复杂的水气两相流运动,在许多工程应用中起着重要的作用,如发动机燃料的燃烧^[1]、农业喷灌技术^[2-3]、喷雾降温^[4-5]等。液滴粒径分布是喷雾过程的质量、动量和能量输运的关键参数,特别是在农业灌溉以及农药喷撒方面,雾滴粒径是影响灌溉液滴以及农药的飘移、沉降的关键因素之一,如何确定喷雾中液滴的粒径分布已成为一个重要的科学问题。

近年来,国内对农业灌溉以及农药喷撒过程中雾滴谱的研究逐渐趋热。喷雾液滴粒径分布是喷头设计以及评价雾化效果的重要指标^[6],因此,许多学者针对不同的应用场景,对喷嘴雾化的粒径分布进行了大量的实验研究。如韩文霆等^[6]利用 2D 视频雨滴谱仪,对喷头喷洒液滴的粒径分布进行了测量。李红等^[7]采用改进的色斑法,对喷头喷洒雨滴的粒径分布进行测量。雾滴的分布特性通常用雾滴谱表示,雾滴的粒径分布与雾化器的设计及雾化效果有着直接的关系^[8]。

目前的喷雾液滴粒径分布函数主要分为经验分布和理论分布两类。经验分布是通过大量的实验研究,得到液滴粒径分布的经验公式,如 Nukiyama - Tanasawa 分布^[9]以及 Rosin - Rammler 分布^[10]和上限函数分布等^[11-12]。理论分布包括正态分布、对数正态分布(Logarithmic normal distribution, LN)^[13-14]以及最大熵分布^[8],其中最大熵分布应用最为普遍。

SELLENS 等^[15]首先提出运用最大熵模型预测液滴粒径分布的思路。随后 SELLENS 运用物理守恒约束的最大熵(Maximum entropy method, MEM)模型,对雾化液滴粒径分布进行预测研究^[16]。研究表明,通过质量守恒推导的最大熵模型在液滴粒径分布的预测中,预测峰值较实验值,会向较大液滴直径方向偏移。CAO 等^[17]给出的解决办法是对分布模型参数进行修正。随后王婕等^[18]基于最大熵原理,通过最小二乘法对参数的修正提出了优化。

可见,基于物理守恒为约束机制的最大熵分布预测模型,在目前的研究中对液滴粒径分布的预测

并不理想。目前常用的解决办法是引入参数,或对参数进行修正,但是主观引入参数会造成一定的误差,影响预测精度,且在复杂的喷雾环境下,物理守恒约束条件的源项求解相对比较困难。因此,本文基于最大熵原理,通过平均直径约束条件,构建雾滴粒径数量概率密度分布模型(Maximum entropy principle, MEP),应用于喷雾液滴粒径数量概率密度分布的研究中。

1 研究方法

1.1 对数正态分布

对数正态分布函数的数学表达式为

$$f_{\ln}(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\tag{1}$$

式中 μ ——尺寸参数
 σ ——形状参数
 x ——随机变量

1.2 液滴粒径分布函数

信息熵由 SHANNON^[19]首次提出,能够反映一个宏观系统的微观状态的不确定性,其数值是该状态下包含信息量的数学度量。

$$P_i=\frac{\bar{n}_i}{N}$$
表示液滴容积为 V_i 的概率, $\bar{n}_i$ 为液滴容

积 V_i 的液滴数, N 为液滴总数。则其信息熵为

$$S=-k\sum_iP_i\ln P_i\tag{2}$$

式中 S ——信息熵 k ——常数

最大熵原理就是,在已知的系统约束条件下,对系统未知概率分布最合理的推断,即符合在约束条件下最不确定或最随机的推断,系统的信息熵最大。

因此要求 $-\sum_iP_i\ln P_i$ 为极值。

推断液滴粒径分布的可用信息约束数学表达式为

$$\sum_iV_i^nP_i=\langle V_i^n\rangle\tag{3}$$

式中 $\langle V_i^n\rangle$ ——液滴容积 n 次方的平均值, μm^{3n}
当 $n=1$ 时,式(3)为数学期望的表达式。

假设液滴在表面张力的作用下,呈球形分布,则

$$V_i=\frac{\pi}{6}D_i^3\tag{4}$$

式中 D_i ——将液滴直径按从小到大进行排序分组,第 i 组液滴的代表直径, μm

则式(3)可以写成

$$\sum_i D_i^{3n} P_i = \langle D_i^{3n} \rangle \quad (n > 0) \quad (5)$$

令 $3n = r$, 则约束条件为

$$\sum_i D_i^r P_i = \langle D_i^r \rangle \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

将 D_i 无量纲处理得

$$D'_i = \frac{D_i}{D_{30}} \quad (7)$$

其中

$$D_{30} = \left(\frac{\sum \bar{n}_i D_i^3}{N} \right)^{1/3}$$

式中 D_{30} ——质量平均直径, μm

D_i 无量纲处理后式(6)可表示为

$$\sum_i D_i^r P_i = \langle D_i^r \rangle \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

其中

$$\langle D_i^r \rangle = \frac{\sum D_i^r \bar{n}_i}{N}$$

P_i 满足归一化条件约束

$$\sum_i P_i = 1 \quad (9)$$

将式(8)、(9)作为约束条件, 利用拉格朗日乘数法构造函数 $L(P_i)$, 即

$$L(P_i) = - \sum_i P_i \ln P_i + \lambda_0 \left(\sum_i P_i - 1 \right) + \sum_{r=1}^m \lambda_r \left(\sum_i D_i^r P_i - \langle D_i^r \rangle \right) \quad (10)$$

式中 λ_0, λ_r ——拉格朗日乘子

令 $L(P_i)$ 对 P_i 的偏导数等于 0, 得到 P_i 的表达式为

$$P_i = a \exp \left(\sum_{r=1}^m \lambda_r V_i^{r/3} \right) = a \exp \left(\sum_{r=1}^m \lambda_r D_i^r \right) \quad (11)$$

式中 a ——最大熵分布系数

液滴的平均体积可以用质量平均直径表示为

$V_m = \frac{\pi}{6} D_{30}^3, \mu\text{m}^3$, 无量纲体积 $V'_i = \frac{V_i}{V_m}$ 。液滴体积在 (V'_{n-1}, V'_n) 之间的概率为

$$P = P(V'_{n-1} < V' < V'_n) = \sum_{V'_{n-1}}^{V'_n} P_i \quad (12)$$

假设液滴粒径的变化是连续的, 式(12)可以写为

$$P = P(V'_{n-1} < V' < V'_n) = \int_{V'_{n-1}}^{V'_n} f_n(V') dV' \quad (13)$$

其中

$$f_n(V') = a \exp \left(\sum_{r=1}^m \lambda_r V'^{r/3} \right) \quad (14)$$

则 $P = P(V'_{n-1} < V' < V'_n) = \int_{D'_{n-1}}^{D'_n} f_n(D') dD' =$

$$\int_{D'_{n-1}}^{D'_n} \frac{\pi}{2} a D'^2 \exp \left(\sum_{r=1}^m \lambda_r D'^r \right) dD' \quad (15)$$

$$\text{其中} \quad f_n(D') = \frac{\pi}{2} a D'^2 \exp \left(\sum_{r=1}^m \lambda_r D'^r \right) \quad (16)$$

式中 $f_n(D')$ ——雾滴粒径连续分布的概率密度分布函数

定义 MEPZ 为最大熵分布函数 $f_n(D')$ 的最高阶次 $Z (Z = 1, 2, \dots)$, 即式(16)中 $m = Z$ 。

则可构建方程组为

$$\begin{cases} \int_{D'_{\min}}^{D'_{\max}} f_n(D') dD' = 1 \\ \int_{D'_{\min}}^{D'_{\max}} D'^r f_n(D') dD' = \langle D'^r \rangle \quad (r = 1, 2, \dots, Z) \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{其中} \quad D'_{\min} = \frac{D_{\min}}{D_{30}} \quad D'_{\max} = \frac{D_{\max}}{D_{30}}$$

式中 $D_{\min}$ ——液滴最小直径, μm

$D_{\max}$ ——液滴最大直径, μm

式(17)中一般将喷雾液滴的最小无量纲直径 $D'_{\min}$ 取零, $D'_{\max}$ 的取值对液滴粒径分布规律没有实质的影响^[14], 只需要取值足够大即可, 本文计算时取 $D'_{\max} = 3.5$ 。

又因为平均直径定义为

$$D'_{r0} = \sqrt[r]{\frac{\sum D_i^r \bar{n}_i}{N}} \quad (18)$$

则式(17)可以写成

$$\begin{cases} \int_{D'_{\min}}^{D'_{\max}} f_n(D') dD' = 1 \\ \int_{D'_{\min}}^{D'_{\max}} D'^r f_n(D') dD' = D'^r_{r0} \quad (r = 1, 2, \dots, Z) \end{cases} \quad (19)$$

式(19)表示方程数为 $Z + 1$ 的方程组, a 及 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_Z$ 为方程的 $Z + 1$ 个未知数, 方程组是封闭的。由于方程组是一个带定积分的非线性方程组, 所以方程的求解只能通过数值求解方法。

1.3 液滴的粒径分布与 $D_{i0.1}, D_{i0.5}, D_{i0.9}$ 的关系

农业航空中常用平均直径 $D_{i0.1}, D_{i0.5}, D_{i0.9}$ 来评价喷嘴雾化效果, 其中 $D_{i0.1}$ 表示雾滴累计分布为 10% 的雾滴直径, 即小于此雾滴直径的雾粒体积占全部雾粒体积的 10%; $D_{i0.5}$ 表示雾滴累计分布为 50% 的雾滴直径; $D_{i0.9}$ 表示雾滴累计分布为 90% 的雾滴直径。通过求解式(19)可以得到液滴的粒径分布函数 $f_n(D')$ 的表达式, 即能求出各种液滴粒径范围所占百分比。

分布函数 $f_n(D')$ 确定, 则直径为 D'_i 的概率密度可以表示为 $f_n(D'_i)$, 则粒径为 D'_i 的液滴数 $n(D'_i)$ 可以表示为

$$n(D'_i) = N f_n(D'_i) \quad (20)$$

则粒径为 D'_i 液滴的体积 $V_{ol}(D'_i)$ 可以表示为

$$V_{ol}(D'_i) = \frac{\pi}{6} D_i'^3 N f_n(D'_i) \tag{21}$$

将 $D_{i0.1}$ 、 $D_{i0.5}$ 、 $D_{i0.9}$ 用 D_{30} 无量纲化为 $D'_{i0.1}$ 、 $D'_{i0.5}$ 、 $D'_{i0.9}$ 。

根据 $D_{i0.1}$ 的定义可得,液滴粒径在 $[0, D'_{i0.1}]$ 的液滴体积占总体积的 10%,数学表达式为

$$\frac{\int_0^{D'_{i0.1}} V_{ol}(D'_i) dD'}{\int_0^{D'_{max}} V_{ol}(D'_i) dD'} = \frac{\int_0^{D'_{i0.1}} \frac{\pi}{6} D_i'^3 N f_n(D'_i) dD'}{\int_0^{D'_{max}} \frac{\pi}{6} D_i'^3 N f_n(D'_i) dD'} = \frac{\int_0^{D'_{i0.1}} D_i'^3 f_n(D'_i) dD'}{\int_0^{D'_{max}} D_i'^3 f_n(D'_i) dD'} = 0.1 \tag{22}$$

方程中只有 $D'_{i0.1}$ 为未知数,所以在分布函数 $f_n(D')$ 确定时,可以通过式(22)对 $D'_{i0.1}$ 进行求解。

同理可得 $D'_{i0.5}$ 、 $D'_{i0.9}$ 与粒径分布函数的关系为

$$\frac{\int_0^{D'_{i0.5}} D_i'^3 f_n(D'_i) dD'}{\int_0^{D'_{max}} D_i'^3 f_n(D'_i) dD'} = 0.5 \tag{23}$$

$$\frac{\int_0^{D'_{i0.9}} D_i'^3 f_n(D'_i) dD'}{\int_0^{D'_{max}} D_i'^3 f_n(D'_i) dD'} = 0.9 \tag{24}$$

1.4 平均直径计算

求解式(19),需对无量纲平均直径 D'_{r0} 进行计算。 D'_{r0} 可以通过两种方法进行计算:①通过实验数据计算。通过实际的实验测量数据,根据式(7)、(18)直接确定无量纲平均直径 D'_{r0} 。②通过经验公式进行计算。通过实际的工况条件:喷嘴类型、喷嘴直径等,来求解平均直径。例如 RIZK 等^[20]、ELKOTB^[21] 提出了索特尔直径(SMD) D_{32} 的经验公式,WOOTAE 等^[22] 提出了质量平均直径 D_{30} 的经验公式。DUMOUCHEL 等^[23] 给出了平均直径系列的关系表达式

$$D_{cu} = r^{\frac{1}{c-u}} D_{r0} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1+c}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+u}{r}\right)} \right]^{\frac{1}{c-u}} \tag{25}$$

式中 c 、 u ——常数

D_{cu} 、 D_{r0} ——一系列平均直径, μm

Γ ——伽马函数

可以推导出平均直径与 D_{32} 的关系为

$$D_{r0} = r^{-\frac{1}{r}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{r}\right)} D_{32} \tag{26}$$

在已知质量平均直径 D_{30} 或 D_{32} 的情况下,通过式(25)能求解任意一个平均直径。

根据式(26), D_{30} 可以表示为

$$D_{30} = 3^{-\frac{1}{3}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} D_{32} \tag{27}$$

无量纲平均直径 D'_{r0} 可以表示为

$$D'_{r0} = \left(\frac{D_{r0}}{D_{30}} \right)^r = \left(\frac{\sqrt[3]{3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(1) \sqrt[3]{r}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{r}\right)} \right)^r \tag{28}$$

2 预测模型优选

2.1 液滴粒径分布数值计算

预测模型优选的求解过程采用有实验数据的求解方法。采用 FU^[24] 的环形鼓风喷嘴雾化实验数据进行研究,喷嘴示意图如图 1 所示,其中填充部分为喷嘴结构,未填充部分为流体通道。具体工况如表 1 所示。

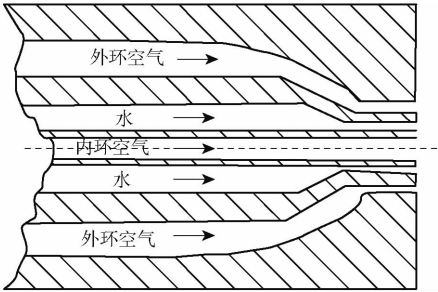


图 1 环形鼓风喷嘴示意图

Fig.1 Schematic of air-blast annular nozzle experiment device

表 1 环形鼓风喷嘴雾化实验工况

Tab.1 Experimental condition of atomization of air-blast annular nozzle

of air-blast annular nozzle			m/s
工况	液体流速	内环空气流速	外环空气流速
1	112.8	135.4	161.3
2	108.1	142.3	182.0
3	131.6	163.3	197.5
4	152.5	188.6	227.1

根据各工况下的实验数据,计算得到雾化液滴的算术平均直径 D_{10} 、表面积平均直径 D_{20} 以及质量平均直径 D_{30} ,具体见表 2。

表 2 环形鼓风喷嘴雾化实验的液滴平均直径

Tab.2 Average diameter of air-blast annular atomization experiment

			μm
工况	D_{10}	D_{20}	D_{30}
1	112.8	135.4	161.3
2	108.1	142.3	182.0
3	131.6	163.3	197.5
4	152.5	188.6	227.1

图 2 为工况 1 条件下液滴粒径数量概率分布的预测数据与实测数据对比,图 2 中的 MEP1 ~ MEP3 分别表示式(16)最高次阶为 1 ~ 3 的最大熵分布函数,从图 2 和表 3 可知,各分布函数都能对液滴分布的趋势进行预测,相关系数 R 均在 0.85 以上。LN 分布函数与 MEM 分布预测的峰值偏大。液滴分布的峰值在 $D'_i=0.5$ 附近。MEM 分布的预测结果峰值偏向于液滴直径较大一侧,预测峰值在 $D'_i=0.7$ 附近,其他分布函数对于液滴分布的峰值预测比较理想,分布峰值都在 $D'_i=0.5$ 附近。本文构建的预测模型 MEP1、MEP2、MEP3 的预测结果较为理想,均方根误差 (RMSE) 均低于 0.1,相关系数均高于 0.95。

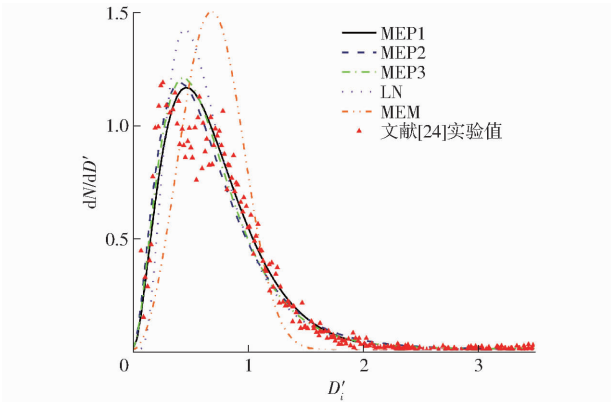


图 2 工况 1 液滴粒径数量概率密度分布预测与实测数据对比

Fig. 2 Comparison between prediction and measurement data of droplet size distribution in case 1

表 3 各分布模型预测值与实验值的相关系数与均方根误差

Tab.3 Correlation coefficient and root mean square error between predicted value and experimental value of each distribution										
工况	MEP1		MEP2		MEP3		LN		MEM	
	R	RMSE	R	RMSE	R	RMSE	R	RMSE	R	RMSE
1	0.971	0.093	0.970	0.094	0.969	0.098	0.930	0.165	0.874	0.252
2	0.923	0.195	0.965	0.135	0.965	0.134	0.865	0.290	0.742	0.399
3	0.966	0.104	0.989	0.060	0.988	0.062	0.941	0.152	0.802	0.287
4	0.967	0.117	0.990	0.070	0.990	0.068	0.962	0.136	0.803	0.322

图 3 为工况 2 条件下液滴粒径数量概率分布的预测数据与实测数据对比,从图 3 和表 3 可知,LN 和 MEM 分布函数预测的效果较差。液滴分布峰值直径在 $D'_i=0.3$ 附近,MEM 和 MEP1 以及 LN 分布的预测结果峰值偏向于液滴直径较大一侧,MEM 预测分布峰值直径在 $D'_i=0.6$ 左右,MEP1 和 LN 预测分布的峰值直径在 $D'_i=0.4$ 附近。MEP2、MEP3 分布模型的预测结果较为理想,预测分布峰值均在 $D'_i=0.3$ 附近,与实验值较为吻合,预测值与实验值的相关系数均为 0.965,均方根误差为 0.135、

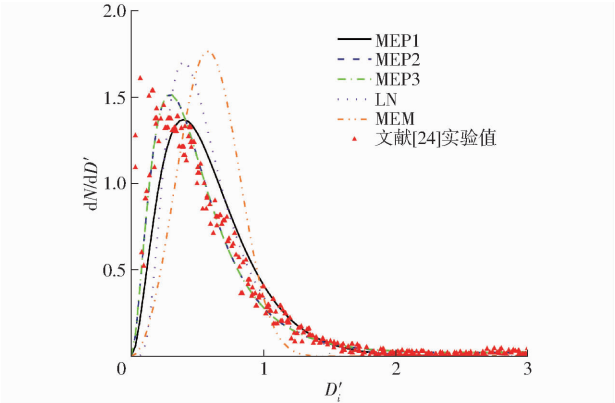


图 3 工况 2 液滴粒径数量概率密度分布预测与实测数据对比

Fig. 3 Comparison between prediction and measurement data of droplet size distribution in case 2

0.134。

图 4 为工况 3 条件下液滴粒径数量概率分布的预测数据与实测数据对比,从图 4 和表 3 可知,各分布函数预测的液滴分布结果和实验值的相关系数均在 0.8 以上。LN 分布函数和 MEM 分布预测的峰值相当,峰值相对于实验值略微偏大。MEM 和 MEP1 以及 LN 分布的预测结果峰值偏向直径较大一侧,MEM 预测的分布峰值直径在 $D'_i=0.7$ 附近,MEP1 以及 LN 分布预测的分布峰值直径在 $D'_i=0.46$ 附近,实验液滴分布峰值在 $D'_i=0.37$ 附近。MEP2、MEP3 分布模型的预测结果较为理想,预测的分布峰值均在 $D'_i=0.37$ 附近,与实验数据吻合。MEP2 和 MEP3 模型的预测值几乎重合,预测值与实验值的相关系数为 0.989、0.988,均方根误差为 0.060、0.062。

图 5 为工况 4 液滴粒径数量概率分布的预测数据与实测数据对比,从图 5 和表 3 可知,LN、MEM 和 MEP1 分布的预测结果峰值偏向于直径较大一侧,MEM 预测峰值分别在 $D'_i=0.69$ 附近,实验液滴分布峰值在 $D'_i=0.38$ 附近,MEP2、MEP3 分布模型的预测结果的峰值均在 $D'_i=0.38$ 附近,与实验数据吻合。MEP2 和 MEP3 模型的预测值几乎重合,预测值与实验值的相关系数均为 0.99,均方根误差为 0.070、0.068。

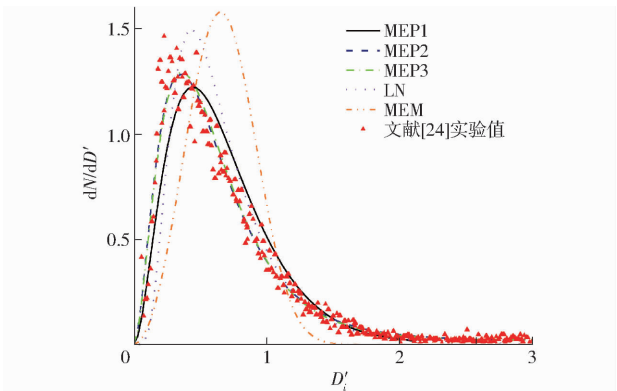


图4 工况3液滴粒径数量概率密度分布预测与
实测数据对比

Fig.4 Comparison between prediction and
measurement data of droplet size distribution in case 3

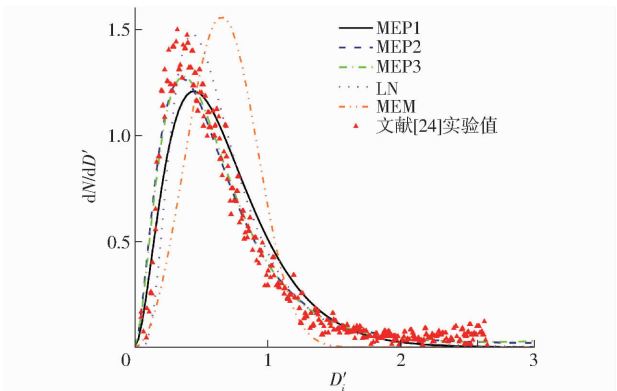


图5 工况4液滴粒径数量概率密度分布预测与
实测数据对比

Fig.5 Comparison between prediction and
measurement data of droplet size distribution in case 4

2.2 结果分析

4种工况条件下各分布模型预测数据与实测数据的相关系数与均方根误差统计,如表3所示。

通过2.1节的分析,可以看出MEP2和MEP3的预测效果最好。MEP3的预测曲线与MEP2的预测曲线在4种工况条件下都比较接近,几乎重合。MEP2模型含有3个参数,而MEP3含有4个参数。因此采用赤池信息准则(Akaike information criterion,AIC)对两个模型展开进一步比选研究,AIC最小的模型为最优模型。

AIC准则函数定义为

$$A_i(k_n) = N_e \ln(\sigma_a^2) + 2k_n \tag{29}$$

式中 k_n ——模型中参数个数

N_e ——实测样本数目

σ_a^2 ——残差的方差

MEP2和MEP3模型对应的AIC结果如表4所示。从表4可以看出,工况1、2、3情况下MEP2的AIC均比MEP3的低,在工况4条件下,由于液体和

表4 MEP2和MEP3模型AIC计算结果
Tab.4 AIC calculation results of MEP2 and

MEP3 models				
模型	工况1	工况2	工况3	工况4
MEP2	-913.36	-3 015.76	-1 975.68	-4 311.60
MEP3	-892.77	-3 011.19	-1 949.45	-4 397.18

内外环空气的流速都较大,使得液体雾化的环境更加复杂,采用3个约束条件的MEP3预测模型的预测效果相对MEP2模型偏好,MEP3比MEP2的AIC低,但从相关系数和均方根误差来看,MEP3与MEP2结果相差并不大。综合考虑,一般情况下MEP2模型对喷嘴雾化液滴粒径分布的预测效果更好。最优的MEP2分布预测模型为

$$f_n(D') = \frac{\pi}{2} a D'^2 \exp(\lambda_1 D' + \lambda_2 D'^2) \tag{30}$$

对比MEP1、MEP2和MEP3可以发现,MEP1采用了平均直径 D_{10} 的约束,MEP2采用了平均直径 D_{10} 、 D_{20} 的约束,MEP3采用了平均直径 D_{10} 、 D_{20} 和 D_{30} 的约束。通过增加平均直径约束条件有助于提高分布模型的预测精度,但MEP3和MEP2预测的液滴粒径分布曲线几乎重合,说明增加约束并不一定能显著增加模型的预测效果。通过对比MEM、MEP1、MEP2和MEP3的液滴粒径分布预测结果表明,采用单个约束的最大熵预测模型预测的液滴粒径分布的峰值会偏向直径较大的一侧。

为了进一步验证MEP2分布模型对不同类型喷嘴产生的液滴的粒径分布预测的适用性,将MEP2应用于文献[18,25-29]中不同类型喷嘴的液滴粒径分布的研究中,并与文献中给定的实验数据进行对比,如图6所示。其中文献[18]采用对撞式喷嘴,喷嘴压强为2.2 MPa,实验数据共计8组,如图6a所示;文献[25]采用的平面射流喷嘴,液体流速1 m/s,空气流速93 m/s,实验数据共计100组,如图6b所示;文献[26]采用斯普瑞喷嘴喷头(1/4 TTG 0.3),喷雾流率3.52 mL/s,实验数据共计12组,如图6c所示;文献[27]采用旋流式气泡雾化喷嘴,喷嘴压强为0.5 MPa,实验数据共计24组,如图6d所示;文献[28]采用压力旋流喷嘴,喷嘴流率0.16 m³/h,实验数据共计8组,如图6e所示;文献[29]采用静电喷雾方法,喷嘴流率为25 mL/min,高压发生器控制环形电极施加电压,实验数据共计22组,如图6f所示。

图7为MEP2对不同类型喷嘴产生的液滴的粒径分布计算结果的相关系数和均方根误差。从图7可以看出,MEP2分布预测的结果与实验数据较为吻合,相关系数都在0.9以上,均方根误差低于

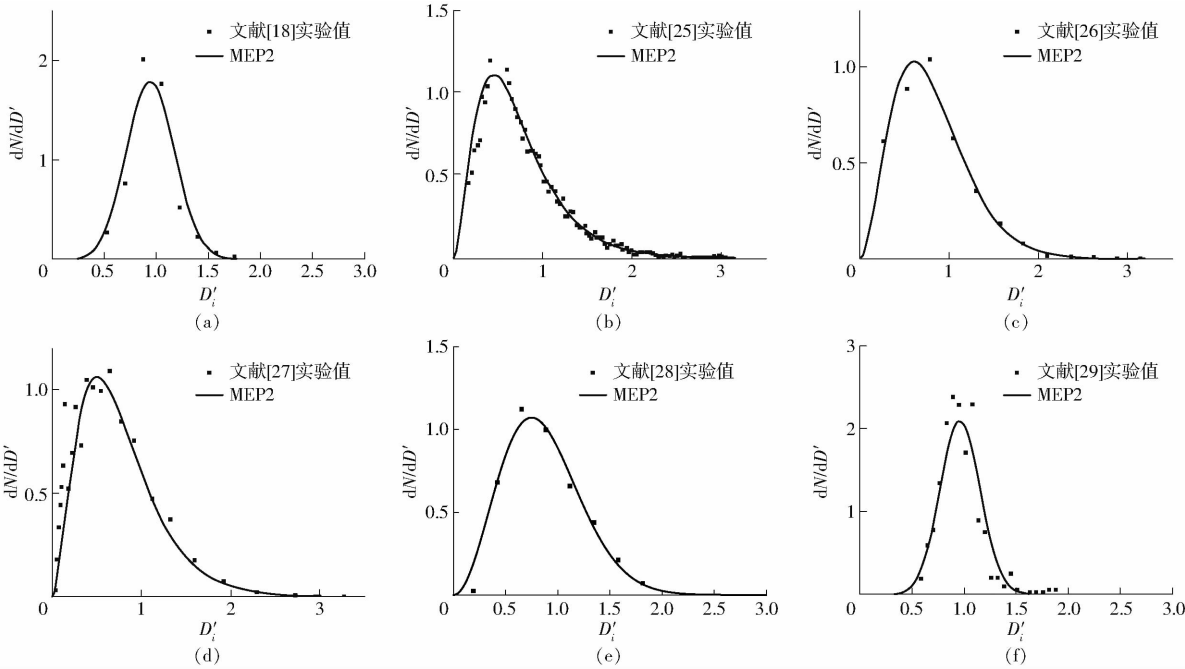


图 6 MEP2 模型对不同类型喷嘴的预测结果及实验数据对比

Fig. 6 Comparison of prediction results and experimental data of different types of nozzles by MEP2

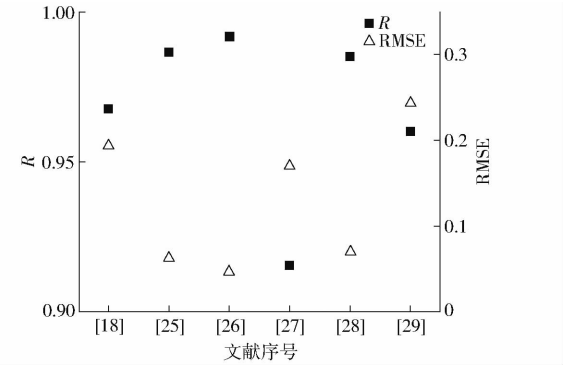


图 7 MEP2 模型对不同类型喷嘴的预测结果与实验数据的相关系数和均方根误差

Fig. 7 Correlation coefficient and root mean square error of prediction results of MEP2 models for different types of nozzles and experimental data

0.25, MEP2 分布模型总体上能够反映不同类型喷嘴产生的液滴粒径的分布特性。同时也可以看出 MEP2 分布模型对于文献[25–26,28]计算的结果更好,相关系数都超过 0.98,均方根误差均低于 0.072,而对其他 3 篇文献计算的结果稍差。这是因为文献[25–26,28]采用的是比较简单的喷雾雾化工况,而文献[18,27,29]的雾化工况更加复杂。

3 预测模型应用

3.1 实验数据及参数

将 MEP2 预测模型应用于文献[22]中 Pratt & Whitney Canada(PWC)公司制造的压力喷嘴的雾滴粒径分布的预测研究。实验参数如表 5 所示。

表 5 不同工况条件下 PWC 压力喷嘴实验参数

Tab.5 Experimental parameters of PWC pressure nozzle under different cases

工况	液体流速 $U_l/$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	空气流速 $U_g/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	质量平均直径 $D_{30}/\mu\text{m}$	最小直径 $D_{\min}/\mu\text{m}$
1	4.4	56	41	12.4
2	4.2	42	47	16.3
3	4.5	42	52	14.4
4	4.6	56	45	13.7

3.2 基于无实验数据的平均直径计算

对预测模型的求解采用无实验数据情况的求解方法。MEP2 分布预测模型中含有 3 个参数,所以式(17)中只需要 D'_{10} 、 D'_{20} 、 D'_{30} 其中 2 个即可。又因为无量纲平均直径 $D'_{30}=1$,所以只需要在 D'_{10} 、 D'_{20} 中确定一个量就可以对预测模型方程组进行求解。 D'_{10} 、 D'_{20} 的计算可以利用式(28)求得。理论上选择 D'_{10} 、 D'_{20} 都不会影响预测结果,但通过式(25)~(28)求解平均直径时会产生误差,所以 D'_{10} 、 D'_{20} 的计算精确度直接会影响预测结果。为了尽量消除这个误差,本文应用表 2 中的统计数据,对已知 D_{30} 的情况,通过式(25)求解 D_{10} 、 D_{20} 的准确性进行评估,计算结果如表 6 所示。

从表 6 可以看出, D_{20} 的计算误差明显低于 D_{10} ,所以本文选择 D'_{20} 求解粒径分布函数。通过式(28)求得 $D'_{20}=0.65$ 。由于本文重点研究预测模型的可靠性,故为了过程简便,本文省略通过经验公式计算平均直径的步骤,直接用实验得到的平均直径 D_{30} 和最小直径 $D_{\min}$ 参与模型预测计算。

表 6 平均直径 D_{10} 、 D_{20} 评估误差分析

工况	D_{10}			D_{20}		
	实验值/	评估值/	相对误	实验值/	评估值/	相对误
	μm	μm	差/%	μm	μm	差/%
1	112.8	69.25	-39	135.4	130.18	-4
2	108.1	78.13	-28	142.3	146.89	3
3	131.6	84.79	-36	163.3	159.4	-2
4	152.5	97.49	-36	188.6	183.29	-3

3.3 预测结果

研究表明,压水式喷嘴的最小直径往往不是从零值开始的^[30],如图 8 所示。所以本文将通过 D_{30} 无量纲化的最小直径 D'_0 引入分布预测模型中,得分布模型为

$$f'_n(D') = \frac{\pi}{2}a(D' - D'_{\min})^2 \exp(\lambda_1(D' - D'_{\min}) + \lambda_2(D' - D'_{\min})^2)$$

(31)

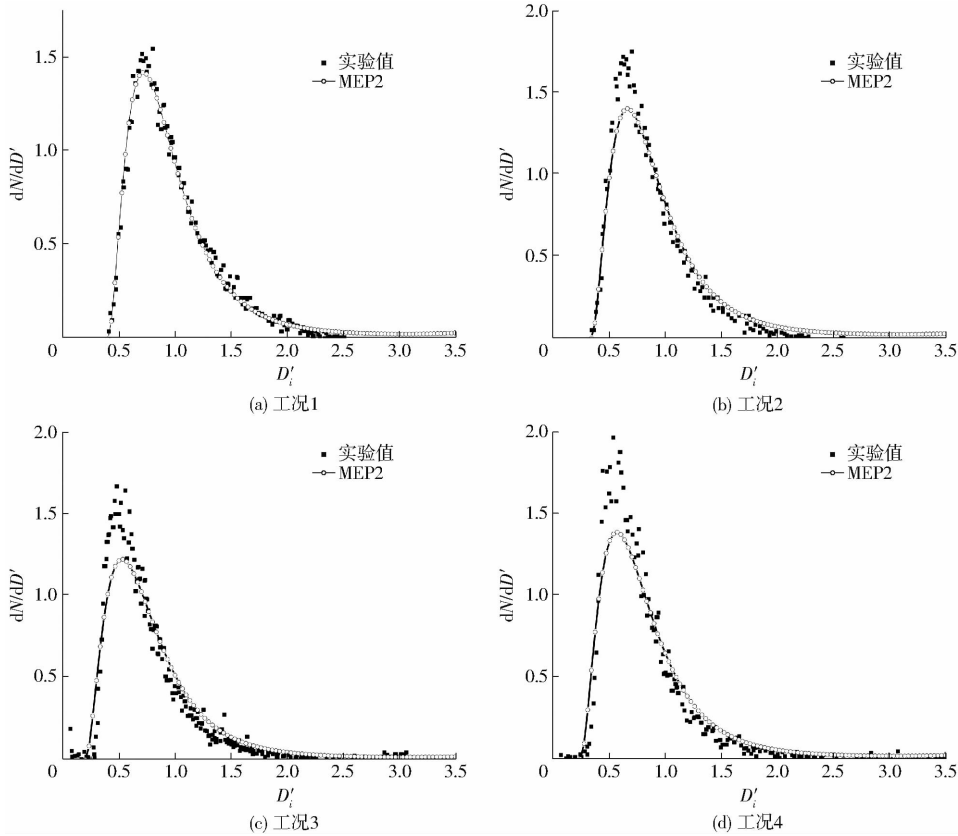


图 8 PWC 喷嘴实验与预测液滴粒径数量概率密度分布对比

Fig. 8 Comparison between PWC nozzle experiment and predicted droplet size distribution

通过求解式(31)来确定分布参数 a 、 λ_1 、 λ_2 。积分上下限取 $D'_{\min} = D'_0$ 、 $D'_{\max} = 3.5$ 。求解的方程组为

$$\begin{cases} \int_{D'_{\min}}^{D'_{\max}} f'_n(D') dD' = 1 \\ \int_{D'_{\min}}^{D'_{\max}} (D' - D'_0)^2 f'_n(D') dD' = D'^2_{20} \\ \int_{D'_{\min}}^{D'_{\max}} (D' - D'_0)^3 f'_n(D') dD' = 1 \end{cases} \quad (32)$$

从图 8 可以看出,模型预测的液滴粒径分布与实验数据基本一致。工况 1 条件计算结果的相关系数为 0.994,均方根误差为 0.072。PWC 喷嘴在工况 2、3、4 情况下,模型预测液滴粒径数量概率密度分布的峰值较实验值低,相关系数分别为 0.992、0.981、0.973,均方根误差分别为 0.088、0.135、0.147。可以看出模型对于工况 3 和工况 4 预测的结果较差,这是因为应用式(28)对无量纲平均直径

D'_{i0} 求解过程中,在不同工况条件下存在一定的偏差导致。假如平均直径的计算足够准确,模型总体上能够反映不同工况条件下雾滴的粒径分布特征。

4 结论

(1)建立了雾滴粒径分布的最大熵模型,并通过数值方法求解闭合方程组的方法,确定液滴粒径分布函数,液滴粒径分布函数可以求出各种雾滴粒径范围所占的百分比,并且能够运用液滴数量分布函数对 $D_{i0.1}$ 、 $D_{i0.5}$ 、 $D_{i0.9}$ 等喷头喷雾评价指标进行求解。

(2)应用环形鼓风喷嘴雾化的实验数据对液滴粒径分布模型进行优选。结果表明,本文构建的 MEP2 与 MEP3 分布模型能很好地适用于喷雾液滴的粒径分布预测。预测的液滴粒径分布与实验值的相关系数均高于 0.96,均方差误差均低于 0.135,并

且预测的结果优于 LN 和 MEM 分布模型。通过对比 MEP2 和 MEP3 分布模型的 AIC,表明 MEP2 模型是一个更优模型。

(3)应用不同类型喷嘴的雾化液滴粒径分布实验数据对三参数最大熵模型的适用性进行检验,结果表明模型的预测结果基本符合不同类型喷嘴雾化

雾滴的粒径分布特征。最后应用 MEP2 模型预测 Pratt & Whitney Canada 公司制造的压力喷嘴的液滴粒径分布,对比结果显示预测值与实验数据基本吻合。在不同类型喷嘴情况下,模型均能获得良好的预测结果,表明本文构建的 MEP2 模型具有较广泛的适用性。

参 考 文 献

[1] 魏衍举,章旭东,邓胜才,等.强涡流场中柴油喷雾扩散特性研究[J].农业机械学报,2019,50(8):394-399.
WEI Yanju, ZHANG Xudong, DENG Shengcai, et al. Diffusion characteristics of diesel spray in swirl flows field[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(8):394-399. (in Chinese)

[2] 樊桂菊,牛成强,张震明,等.多气流协同式果园 V 形防飘喷雾装置设计与试验[J].农业机械学报,2022,53(3):138-147.
FAN Guiju, NIU Chengqiang, ZHANG Zhenming, et al. Design and experiment of V-shaped orchard anti-drift spray device with multi-airflow cooperation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(3):138-147. (in Chinese)

[3] 茹煜,陈旭阳,刘彬,等.轴流式果园喷雾机风送系统优化设计与试验[J].农业机械学报,2022,53(5):147-157.
RU Yu, CHEN Xuyang, LIU Bin, et al. Optimized design and performance test of axial flow orchard sprayer air delivery system[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(5):147-157. (in Chinese)

[4] 周三平,张瓚.几何尺寸对空气喷射器性能的影响研究[J].化工技术与开发,2020,49(11):68-71.
ZHOU Sanping, ZHANG Zhan. Study on effect of geometric size on ejector performance of air ejector[J]. Technology & Development of Chemical Industry, 2020, 49(11):68-71. (in Chinese)

[5] 杜哲,胡永光,仇树成,等.喷雾降温风机风筒优化设计与试验[J].农业机械学报,2020,51(8):118-125,151.
DU Zhe, HU Yongguang, QIU Shucheng, et al. Optimization design and experiment of air duct on spray cooling fan[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(8):118-125,151. (in Chinese)

[6] 韩文霆,曹培,刘文帅.人工模拟降雨系统喷头喷洒雨滴特性测试[J].农业机械学报,2014,45(12):56-61.
HAN Wenting, CAO Pei, LIU Wenshuai. Raindrop characteristics of sprinklers for artificial rainfall system[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(12):56-61. (in Chinese)

[7] 李红,任志远,汤跃,等.喷头喷洒雨滴粒径测试的改进研究[J].农业机械学报,2005,36(10):50-53.
LI Hong, REN Zhiyuan, TANG Yue, et al. Measurement and amelioration of the test to raindrop size of sprinklers[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2005, 36(10):50-53. (in Chinese)

[8] 张军, MICHAEL W Reeks. 静电雾化过程中粒径分布的预测[J].农业工程学报,2008,24(12):89-92.
ZHANG Jun, MICHAEL W Reeks. Prediction of droplet size distribution for electrostatic spray[J]. Transactions of the CSAE, 2008, 24(12):89-92. (in Chinese)

[9] NUKIYAMA S, TANASAWA Y. Experiments on the atomization of liquids in an air stream reports3: on the droplet-size distribution in an atomized jet[J]. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1939, 5: 62-67.

[10] ROSIN P, RAMMLER E. The laws governing the fineness of powdered coal[J]. Journal of the Institute of Fuel, 1933, 7: 29-36.

[11] BHATIA J C, DURST F. Comparative study of some probability distributions applied to liquid sprays[J]. Particle & Particle Systems Characterization, 1989, 6(1-4): 151-162.

[12] XU T H, DURST F, TROPEA C. The three-parameter log-hyperbolic distribution and its application to particle sizing[J]. Atomization and Sprays, 1993, 3(1): 109-124.

[13] 梁昭,范国强,王光明,等.基于双峰分布的风胁迫雾滴沉积分布模型研究[J].农业机械学报,2020,51(4):28-37.
LIANG Zhao, FAN Guoqiang, WANG Guangming, et al. Distribution model of wind-stressed droplet deposition based on bimodal distribution[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(4):28-37. (in Chinese)

[14] LI Xianguo, TANKIN R. Droplet size distribution; a derivation of a Nukiyama - Tanssawa type distribution function[J]. Combustion Science and Technology, 1987, 56: 65-76.

[15] SELLENS R W, BRZUSTOWSKI T A. A simplified prediction of droplet velocity distributions in a spray[J]. Combustion & Flame, 1986, 65(3):273-279.

[16] SELLENS R W. Prediction of the drop size and velocity distribution in a spray based on the maximum entropy formalism[J]. Particle and Particle System Characterization, 1989, 6(1-4):17-27.

[17] CAO Jianming. On the theoretical prediction of fuel droplet size distribution in nonreactive diesel sprays[J]. Journal of Fluids Engineering, 2002, 124(1):182-185.

[18] 王婕,余永刚,刘焜. HAN 基液体推进剂喷雾场液滴尺寸分布的简化模型[J]. 火炸药学报, 2016, 39(3):84-88.
WANG Jie, YU Yonggang, LIU Kun. Simplified model on droplet size distribution in the spray field of HAN-based liquid propellant[J]. Chinese Journal of Explosives & Propellants, 2016, 39(3):84-88. (in Chinese)

[19] SHANNON E C. A mathematical theory of communication[J]. The Bell System Technical Journal, 1948, 27(4): 379-423.

[20] RIZK N K, LEFEBVRE A H. Spray characteristics of spill-return atomizers[J]. Journal of Propulsion and Power, 1985,

- 1(3): 200 – 204.
- [21] ELKOTB M M. Fuel atomization for spray modelling[J]. Progress in Energy & Combustion Science, 1982, 8(1):61 – 91.
- [22] WOOTAE K, MITRA S K, LI Xianguo, et al. A predictive model for the initial droplet size and velocity distributions in sprays and comparison with experiments[J]. Particle & Particle Systems Characterization, 2003, 20(2):135 – 149.
- [23] DUMOUCHEL C, BOYAVAL S. Use of the maximum entropy formalism to determine drop size distribution characteristics[J]. Particle & Particle Systems Characterization, 1999, 16(4):177 – 184.
- [24] FU F. Experimental characterization of sprays from an air-blast annular research nozzle[D]. University of Waterloo, 2003.
- [25] MITRA S K. Breakup process of plane liquid sheets and prediction of initial droplet size and velocity distributions in sprays [D]. University of Waterloo, 2001.
- [26] HOSSEINALIPOUR S M, KARIMAEI H, MOVAHEDNEJAD E. Droplets diameter distribution using maximum entropy formulation combined with a new energy-based sub-model[J]. Chinese Journal of Chemical Engineering, 2016, 24(11):6.
- [27] 赵芳,徐兵兵,符澄,等.旋流式气泡雾化喷嘴喷雾特性实验研究[J].实验流体力学,2022,36(6):28 – 35.
ZHAO Fang, XU Bingbing, FU Cheng, et al. Experimental study on the characteristics of swirl effervescent atomizer[J]. Journal of Experimental in Fluid Mechanics, 2022, 36(6):28 – 35. (in Chinese)
- [28] 郭金海. 喷射器内液滴粒径分布的实验研究与模型预测[D]. 青岛:青岛科技大学, 2012.
GUO Jinhai. Model prediction and experiment study on spray droplet size distribution in jet reaction[D]. Qingdao: Qingdao University of Science & Technology, 2012. (in Chinese)
- [29] 许晏铭, 刘建河, 李星光. 液体物性对静电喷雾雾化性能的试验研究[J]. 排灌机械工程学报, 2019, 37(9):793 – 798.
XU Yanming, LIU Jianhe, LI Xingguang. Study of liquid properties on electrostatic spray atomizing performance[J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2019, 37(9):793 – 798. (in Chinese)
- [30] LI Xianguo, LI Meishen. Droplet size distribution in sprays based on maximization of entropy generation[J]. Entropy, 2003, 5(5):417 – 431.

(上接第 216 页)

- [22] 田志伟, 薛新宇, 徐阳, 等. 植保无人机下洗气流对作物冠层作用规律研究[J]. 农业机械学报, 2021, 52(1):40 – 48.
TIAN Zhiwei, XUE Xinyu, XU Yang, et al. Effect of plant protection UAVs downwash on crop canopy[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(1):40 – 48. (in Chinese)
- [23] ROBERTS T W, MURMAN E M. Solution method for a hovering helicopter rotor using the Euler equations [C] // 23rd Aerospace Sciences Meeting, 1985:436.
- [24] 孔祥伟, 林元华, 何龙, 等. 一种考虑虚拟质量力的两相压力波速经验模型[J]. 力学季刊, 2015, 36(4):611 – 617.
KONG Xiangwei, LIN Yuanhua, HE Long, et al. An empirical pressure wave velocity model for two-phase flow by considering virtual mass force[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2015, 36(4):611 – 617. (in Chinese)
- [25] 薛元. 细颗粒在流动与温度边界层中的运动规律研究[D]. 北京:清华大学, 2002.
XUE Yuan. Study on the movement of fine particles in the flow and temperature boundary layer[D]. Beijing: Tsinghua University, 2002. (in Chinese)
- [26] 李兴良, 陈德辉, 沈学顺. 不同垂直坐标系对垂直速度计算的影响[J]. 热带气象学报, 2005, 21(3):265 – 276.
LI Xingliang, CHEN Dehui, SHEN Xueshun. Impact study on the calculation of vertical velocity in different vertical coordinates [J]. Journal of Tropical Meteorology, 2005, 21(3):265 – 276. (in Chinese)
- [27] 牛钰森. 自弹式发射内弹道流场特性研究[D]. 北京:北京理工大学, 2016.
NIU Yuseng. Research on internal ballistic flow field characteristics of self-eject launch[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2016. (in Chinese)
- [28] WANG Ling, CHEN Du, ZHANG Mengchao, et al. CFD simulation of low-attitude droplets deposition characteristics for UAV based on multi-feature fusion[J]. IFAC-PapersOnLine, 2018, 51(17): 648 – 653.
- [29] ZHU Yaozong, GUO Qiwei, TANG Yu, et al. CFD simulation and measurement of the downwash airflow of a quadrotor plant protection UAV during operation[J]. Computers and Electronics in Agriculture, 2022, 201: 107286.
- [30] 杨知伦, 葛鲁振, 祁力钧, 等. 植保无人机旋翼下洗气流对喷幅的影响研究[J]. 农业机械学报, 2018, 49(1):116 – 122.
YANG Zhilun, GE Luzhen, QI Lijun, et al. Influence of UAV rotor down-wash airflow on spray width[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(1): 116 – 122. (in Chinese)
- [31] 王金星, 王震, 张菡, 等. 低量低空小型植保无人机变量喷药参数优化试验[J]. 江苏农业科学, 2018, 46(17):215 – 219.
WANG Jinxing, WANG Zhen, ZHANG Han, et al. Optimal experiment of variable spraying parameters for UAV with low volume and low altitude[J]. Jiangsu Agricultural Sciences, 2018, 46(17):215 – 219. (in Chinese)
- [32] YOON S, DIAZ P V, JR D, et al. Computational aerodynamic modeling of small quadcopter vehicles [C] // American Helicopter Society (AHS) 73rd Annual Forum Fort Worth, Texas, 2017.