doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2023.05.042

双环多杆天线展开机构运动学与动力学分析

韩　博[1]　高　超[1]　韩媛媛[2]　许允斗[1]　姚建涛[1]　赵永生[1]
(1.燕山大学机械工程学院,秦皇岛 066004;2.衡水学院数学与计算机科学系,衡水 053000)

摘要:针对一种双环多杆天线展开机构进行了运动学与动力学特性分析,首先分析了展开机构构型特征,并对整体机构进行了单元分解,基于螺旋理论,绘制了单元机构的螺旋约束图;进而建立了单元机构的螺旋约束方程组,然后通过螺旋速度递推求得机构中构件的角速度和质心线速度,采用坐标转换求导法得到了速度雅可比矩阵,利用螺旋导数并基于螺旋加速度合成法则得到了构件的螺旋加速度和角加速度以及质心线加速度;最后基于拉格朗日方程,建立了整体机构的动力学方程,通过数值计算与模拟仿真,分析得到了不同构件的运动学与动力学特性,验证了理论推导的正确性。本文分析的双环多杆天线展开机构为单自由度机构,整体结构简单,仅需一个驱动便可收拢和展开,基于螺旋理论和拉格朗日法相结合的运动学和动力学建模分析方法物理意义明确,可以较好地应用于此类空间可展开机构的分析中。

关键词:双环多杆机构;可展开天线;螺旋理论;运动学;动力学
中图分类号:TH112　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-1298(2023)05-0407-09　　**OSID**:

Kinematics and Dynamics Analysis of Double-ring Multi-rod Antenna Deployable Mechanism

HAN Bo[1]　GAO Chao[1]　HAN Yuanyuan[2]　XU Yundou[1]　YAO Jiantao[1]　ZHAO Yongsheng[1]
(1. *School of Mechanical Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*
2. *Department of Mathematics and Computer Science*, *Hengshui University*, *Hengshui* 053000, *China*)

Abstract: The kinematics and dynamics characteristics of a double-ring multi-rod antenna deployment mechanism were analyzed. Firstly, the configuration characteristics of the deployment mechanism were analyzed, and the unit decomposition of the whole mechanism was carried out. Based on the screw theory, the screw constraint diagram of the unit mechanism was drawn. Then the screw constraint equations of the unit mechanism were established, and the angular velocity and the linear velocity of the center of mass of the components in the mechanism were obtained by the screw velocity recursion. The velocity Jacobian matrix was obtained by the coordinate transformation derivative method. The screw acceleration and angular acceleration of the components and the linear acceleration of the center of mass were obtained by using the screw derivative and the screw acceleration synthesis rule. Finally, based on the Lagrange equation, the dynamic equation of the whole mechanism was established. Through numerical calculation and simulation, the kinematic and dynamic characteristics of different components were analyzed, and the correctness of the theoretical derivation was verified. The overall structure of the double-ring multi-rod antenna deployment mechanism analyzed was simple. It was a single-degree-of-freedom mechanism that can be folded and unfolded with only one drive. The kinematics and dynamics modeling and analysis method based on the combination of screw theory and Lagrange method had clear physical meaning, it can be better applied to the analysis of such space deployable mechanisms.

Key words: double-ring multi-rod mechanism; deployable antenna; screw theory; kinematics; dynamics

收稿日期:2023-02-15　修回日期:2023-03-20
基金项目:国家自然科学基金项目(52105035、52075467)、河北省自然科学基金项目(E2021203109)、机器人技术与系统国家重点实验室开放研究项目(SKLRS-2021-KF-15)和河北省工业机械手控制与可靠性技术创新中心项目(JXKF2105)
作者简介:韩博(1992—),男,副教授,主要从事空间可展开机构构型设计研究,E-mail:bohan@ysu.edu.cn
通信作者:赵永生(1962—),男,教授,博士生导师,主要从事并联机器人技术研究,E-mail:yszhao@ysu.edu.cn

0 引言

遥感卫星技术以及遥感地面应用技术已经广泛地应用于农业生产监测,包括作物面积与空间分布、生长情况、病虫害、产量预报预测等[1]。空间可展开天线作为遥感卫星的一部分,是一种为了更好地满足航天器结构大型化发展趋势而产生的具有折叠与展开功能的新型航天装备[2-3]。其在发射过程中处于折叠收拢状态,进入轨道后按控制指令逐渐展开并锁定,具有支撑定位、收集能量、传递信号等作用[4-6]。环形可展开天线具有收拢率高、质量轻、展开面积大等特点,是可展开天线中应用较多的一种结构形式[7-8]。

环形可展开天线整体呈环形,由若干个相同的并联机构单元组成,单元与单元之间通过运动副连接,其中双环可展开天线相较于单环可展开天线结构更为复杂,展开过程中涉及到复杂的运动学与动力学问题[9]。

由于受到实验条件等因素的限制,对环形可展开天线进行运动学和动力学建模与仿真,是了解和改善其运动学与动力学特性最为有效的手段[10]。为此相关学者做了大量研究,文献[11]成功研制了口径为 6 m 的双环环形可展开天线,并对其运动学与动力学进行了分析;文献[12]利用闭环矢量法建立了并联机构的运动学模型,基于拉格朗日乘子法建立并联机构的动力学模型,并验证了动力学建模的正确性;文献[13-17]对环形可展开天线进行了深入的研究,并基于广义逆矩阵方法分析了双环可展开天线的运动过程,验证了有限元法分析环形可展开天线动力学的正确性;文献[18]提出一种四自由度高速并联机器人机构,并基于虚功原理建立了机构的动力学方程,通过模型仿真结果验证了动力学模型的正确性;文献[19]对大型环形可展开天线展开过程进行了运动学分析,并提出了一种星载环形天线重力补偿方法;文献[20]对 Tripod 并联机器人进行了运动学建模与分析,通过 ADAMS 和 Matlab 仿真软件对运动学模型进行了验证,通过仿真结果验证了运动学模型的正确性;文献[21-22]对环形可展开天线展开后的结构应力进行了分析,利用有限元软件验证了分析的正确性;文献[23]针对一种四自由度混联天线机构进行了静力学及运动特性仿真与设计;文献[24]利用坐标变换法构建了仿生移动机器人的运动学模型,利用几何建模和数值求解方法进行验证与分析证明,上述研究虽然对可展开机构的运动学与动力学进行了建模与分析,然而使用的建模方法却各不相同,并没有一种程式化的适用于多杆可展开天线运动学与动力学建模与分析的方法。目前空间可展开天线运动学与动力学建模方法有相对坐标法、矢量力学法、自然坐标法、螺旋理论、拉格朗日法和牛顿-欧拉法等。其中文献[25-26]基于螺旋理论和牛顿-欧拉法分析了双层环形桁架可展开天线机构的运动学与动力学特性,通过理论计算与模拟仿真验证了理论模型的正确性,为分析双环可展开天线机构提供了新方法,具有重要的意义。

本文提出一种双环多杆天线展开机构,首先对其构型特征进行分析以及整体机构进行单元分解,然后基于螺旋理论分析双环多杆天线展开机构的速度与加速度,通过坐标转换求导法得到其速度雅可比矩阵,并基于拉格朗日方程建立双环多杆天线展开机构展开过程的动力学方程,最后通过数值计算与模拟仿真来验证理论推导的正确性,并对双环多杆天线展开机构展开过程中的运动学与动力学特性进行分析。

1 双环多杆天线展开机构构型分析

图 1 为双环多杆天线展开机构,主要由内层环形桁架和外层环形桁架组成,内层环形桁架与外层环形桁架之间通过剪刀式单元连接,双环多杆天线展开机构为双层环形机构,内层环形桁架和外层环形桁架同心设置,机构中各个构件之间均通过转动副连接。

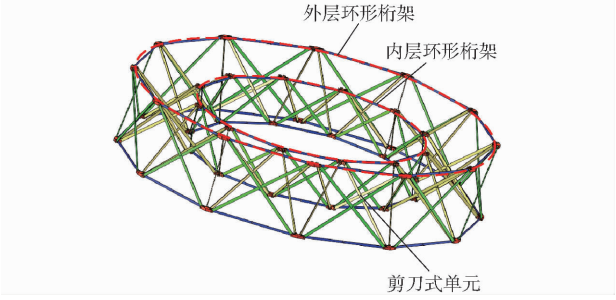

图 1 双环多杆天线展开机构

Fig. 1 Double-ring multi-rod antenna deployment mechanism

通过对双环多杆天线展开机构的结构特征进行分析,可以将其分解为若干个结构相同的单元机构,如图 2 所示,相邻单元机构之间共用 2 个外环节点、2 个内环节点和 1 组剪刀式单元。

对单元机构进行分解,可再分为如图 3~5 所示的不同类型剪刀式单元与构件。

图 3 为 2 种不同的连接杆单元,内连接杆单元由 2 根内连接杆通过转动副连接组成,每根内连接杆长度为 l_1,外连接杆单元由 2 根长度相等的外连接杆组成,每根外连接杆的长度为 L_1,2 根外连接杆

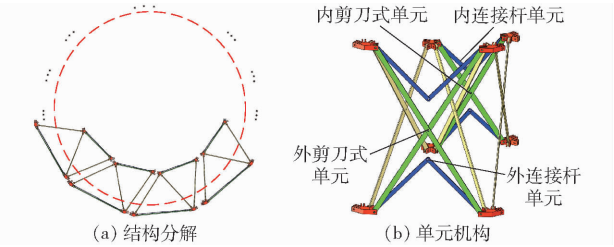

图 2　双环多杆天线展开机构结构分解

Fig. 2　Structural decomposition of double-ring multi-rod antenna deployable mechanism

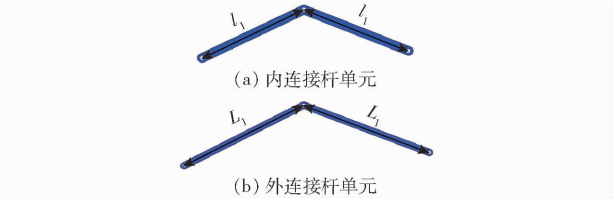

图 3　2 种不同的连接杆单元

Fig. 3　Two different connecting rod units

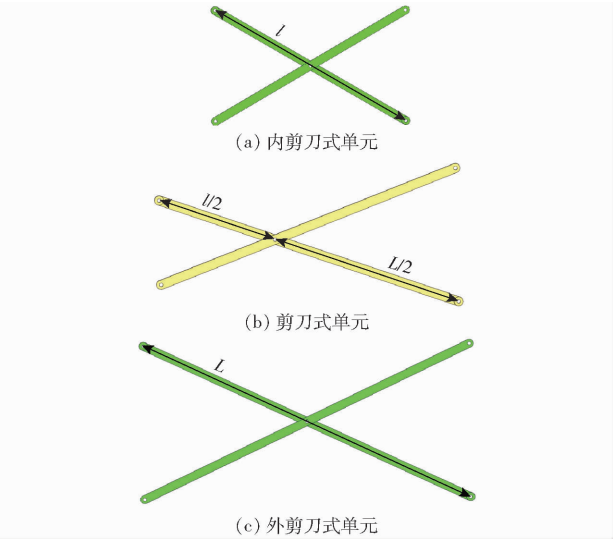

图 4　3 种不同的剪刀式单元

Fig. 4　Three different scissors units

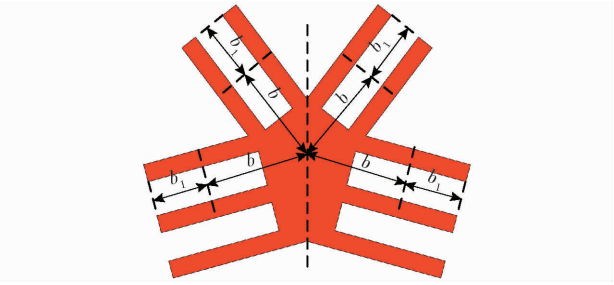

图 5　内环节点俯视图

Fig. 5　Top views of inner link point

之间通过转动副连接。由图 3 可知，可将内连接杆单元与外连接杆单元看作是 3R 平面机构（R 表示转动副），内外连接杆单元将可展开天线机构中相邻的 2 个节点连接起来，增加了双环多杆天线展开机构的刚度，可以提高展开过程中的稳定性。

图 4 为 3 种不同类型的剪刀式单元，对于 3 种剪刀式单元可以看作是 5R 平面机构。内剪刀式单元位于内层环形桁架上，由 2 个内长杆通过转动副连接组成，每根内长杆的长度均为 l，内剪刀式单元通过转动副与内层节点连接。剪刀式单元位于内层环形桁架与外层环形桁架之间，将内层环桁架与外层环桁架连接起来，一个剪刀式单元由 2 个中间杆组成，2 个中间杆之间通过中心转动副连接，2 根中间杆的长度为 $(l+L)/2$。外剪刀式单元由 2 个外长杆转动副连接组成，外长杆的长度为 L，外剪刀式单元位于外层环形桁架上通过转动副与外节点连接，5R 平面机构与 3R 平面机构在单元展开平面内提供相同的约束，内外节点受到重复约束限制了其自身的运动，因此组合后的单元机构为过约束机构，拓扑结构更为复杂。过约束机构的存在不会影响可展开天线机构的展开特性，但却提高了可展开天线机构运动过程的稳定性和可展开天线机构的刚度，因此有必要探究其运动学与动力学特性。

图 5 为内环节点示意图，图 5 内环节点上的转动副轴线与内环节点中心点之间的距离为 b，内环节点转动副轴线到内环节点最外侧距离为 b_1，内环节点作为一个连接节点将 2 个内连接杆单元连接起来同时与内剪刀式单元相连接，是组成双环多杆天线展开机构的重要构件。

图 6 为组成单元机构的外环节点示意图，图 6 中的外环节点中共有 2 个参数，n 为外环节点中心点到转动副轴线的距离，n_1 为转动副轴线到外环节点最外侧的距离，外环节点将 2 个外连接杆单元连接起来，同时与外剪刀式单元通过转动副连接。

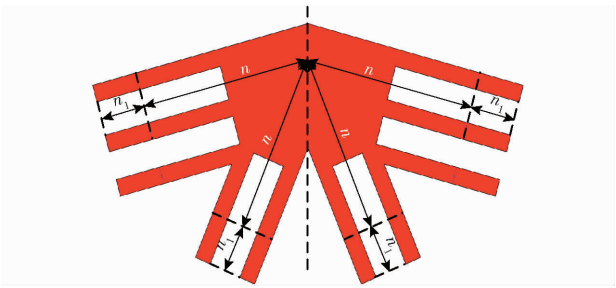

图 6　外环节点俯视图

Fig. 6　Top views of outer ring link point

由文献[27]可知，图 3 ~ 6 中所示构件的尺寸参数均满足

$$\frac{l}{L}=\frac{l_1}{L_1}=\frac{b}{n}=\frac{b_1}{n_1}=\frac{\cos^2\left(\frac{180^\circ}{N}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ}{N}\right)+\sin^2\left(\frac{180^\circ}{N}\right)+\sin\left(\frac{180^\circ}{N}\right)\sqrt{1+2\cos\left(\frac{180^\circ}{N}\right)}} \tag{1}$$

式中 N——可展开天线机构中单元机构的数目

由式(1)可知,随着组成双环多杆天线展开机构的单元机构数目的增加,内层构件与外层构件的尺寸参数比例逐渐增大,但比例不会超过 1,即内层环形桁架的尺寸不会超过外层环形桁架的尺寸。

2 双环多杆天线展开机构速度分析

2.1 单元机构中构件速度分析

由第 1 节分析可知双环多杆天线展开机构由若干个结构相同的单元机构组成,为了便于对单元机构进行速度分析,将其划分为一个封闭单元机构和一个开环单元机构,图 7 为单元机构分解图,在封闭单元机构的外环节点外接圆圆心处建立空间笛卡尔坐标系,坐标系 X 轴与节点 A 中心点和节点 B 中心点连线重合,Z 轴与节点 A 中心点和节点 D 中心点连线重合,Y 轴的方向由右手法则确定,为了便于建立封闭单元机构和开环单元机构的螺旋约束图,对单元机构中各个构件用字母进行表示。

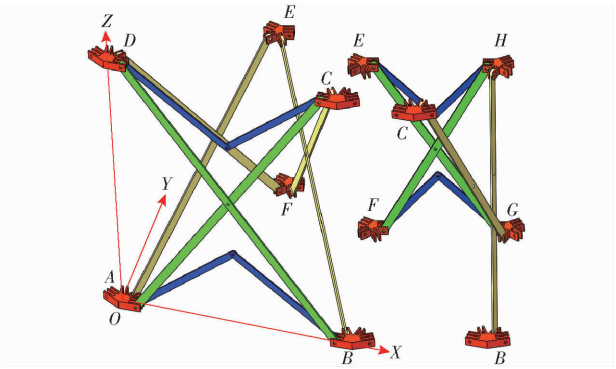

图 7 单元机构分解图

Fig. 7 Exploded view of unit mechanism

封闭单元机构螺旋约束图如图 8 所示,图中 AC 表示连接构件 A 与 C 之间的外长杆,AB_1 和 AB_2 表示连接构件 A 与 B 之间的 2 个外连接杆,$\$_i$ 则表示连接 2 个构件的转动副,利用带箭头的直线来表示运动副,其中箭头方向用于确定动构件与定构件。

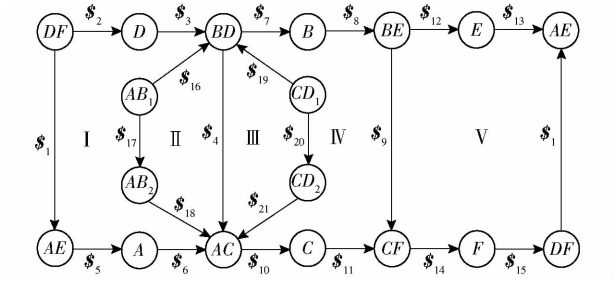

图 8 封闭单元机构螺旋约束图

Fig. 8 Screw constraint diagram of closed unit mechanism

根据图 8 封闭单元机构的螺旋约束图可得封闭单元机构的约束方程组为

$$\begin{cases}\omega_1\$_1+\omega_2\$_2+\omega_3\$_3+\omega_4\$_4+\omega_5\$_5-\omega_6\$_6=\boldsymbol{O}\\-\omega_4\$_4+\omega_7\$_7+\omega_8\$_8+\omega_9\$_9-\omega_{10}\$_{10}-\omega_{11}\$_{11}=\boldsymbol{O}\\-\omega_1\$_1-\omega_9\$_9+\omega_{12}\$_{12}+\omega_{13}\$_{13}-\omega_{14}\$_{14}-\omega_{15}\$_{15}=\boldsymbol{O}\\\omega_4\$_4+\omega_{16}\$_{16}-\omega_{17}\$_{17}-\omega_{18}\$_{18}=\boldsymbol{O}\\-\omega_4\$_4-\omega_{19}\$_{19}+\omega_{20}\$_{20}+\omega_{21}\$_{21}=\boldsymbol{O}\end{cases}\tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{O}$——6×1 维零矢量

ω_i——转动副 i 角速度

开环单元机构的螺旋约束图如图 9 所示。

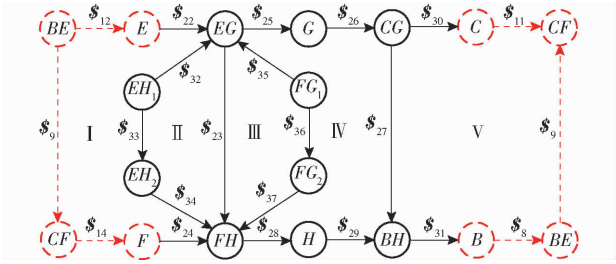

图 9 开环单元机构螺旋约束图

Fig. 9 Screw constraint diagram of open-loop unit mechanism

根据图 9 建立开环单元机构约束方程,可以得到开环单元机构的螺旋约束方程组为

$$\begin{cases}-\omega_{23}\$_{23}+\omega_{25}\$_{25}+\omega_{26}\$_{26}+\omega_{27}\$_{27}-\\\quad\omega_{28}\$_{28}-\omega_{29}\$_{29}=\boldsymbol{O}\\\omega_{23}\$_{23}+\omega_{32}\$_{32}-\omega_{33}\$_{33}-\omega_{34}\$_{34}=\boldsymbol{O}\\-\omega_{23}\$_{23}-\omega_{35}\$_{35}+\omega_{36}\$_{36}+\omega_{37}\$_{37}=\boldsymbol{O}\end{cases}\tag{3}$$

联立式(2)、(3),可得单元机构的螺旋约束方程组为

$$\begin{cases}\omega_1\$_1+\omega_2\$_2+\omega_3\$_3+\omega_4\$_4+\omega_5\$_5-\omega_6\$_6=\boldsymbol{O}\\-\omega_4\$_4+\omega_7\$_7+\omega_8\$_8+\omega_9\$_9-\omega_{10}\$_{10}-\\\quad\omega_{11}\$_{11}=\boldsymbol{O}\\-\omega_1\$_1-\omega_9\$_9+\omega_{12}\$_{12}+\omega_{13}\$_{13}-\\\quad\omega_{14}\$_{14}-\omega_{15}\$_{15}=\boldsymbol{O}\\\omega_4\$_4+\omega_{16}\$_{16}-\omega_{17}\$_{17}-\omega_{18}\$_{18}=\boldsymbol{O}\\-\omega_4\$_4-\omega_{19}\$_{19}+\omega_{20}\$_{20}+\omega_{21}\$_{21}=\boldsymbol{O}\\-\omega_{23}\$_{23}+\omega_{25}\$_{25}+\omega_{26}\$_{26}+\omega_{27}\$_{27}-\\\quad\omega_{28}\$_{28}-\omega_{29}\$_{29}=\boldsymbol{O}\\\omega_{23}\$_{23}+\omega_{32}\$_{32}-\omega_{33}\$_{33}-\omega_{34}\$_{34}=\boldsymbol{O}\\-\omega_{23}\$_{23}-\omega_{35}\$_{35}+\omega_{36}\$_{36}+\omega_{37}\$_{37}=\boldsymbol{O}\end{cases}\tag{4}$$

由文献[27]可知,整个双环多杆天线展开机构以及组成双环多杆天线展开机构的若干个单元机构均为单自由度机构,因此只需要给定一个输入就可以使展开机构具有确定的运动,当在单元机构中指定位置添加一个驱动时,例如 ω_1,通过单元机构的约束方程组可以求解出各个构件的角速度,进而由

单元机构中封闭单元机构与开环单元机构之间的关系通过螺旋运算可计算出单元机构中各个构件的螺旋速度。

在图 8 所示的封闭单元机构的螺旋约束图中组成闭环Ⅰ的各个构件速度为

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_A = \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{V}_{AC} = \omega_6 \$_6 \\ \boldsymbol{V}_{AE} = \omega_5 \$_5 \\ \boldsymbol{V}_{DF} = \omega_1 \$_1 + \omega_5 \$_5 \\ \boldsymbol{V}_D = \omega_1 \$_1 + \omega_2 \$_2 + \omega_5 \$_5 \\ \boldsymbol{V}_{BD} = \omega_1 \$_1 + \omega_2 \$_2 + \omega_5 \$_5 + \omega_3 \$_3 \end{cases} \tag{5}$$

式中　$\boldsymbol{V}_A$、$\boldsymbol{V}_{AC}$、$\boldsymbol{V}_{AE}$、$\boldsymbol{V}_{DF}$、$\boldsymbol{V}_D$、$\boldsymbol{V}_{BD}$——构件 A、AC、AE、DF、D、BD 螺旋速度

在图 8 所示的螺旋约束图闭环Ⅱ中，构件 BD、AC 的螺旋速度已经通过式(5)求出，因此闭环Ⅱ中其它构件的螺旋速度可以根据已求得构件的螺旋速度计算得到，闭环Ⅱ中其他构件的螺旋速度为

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_{AB_1} = \boldsymbol{V}_{BD} - \omega_{16} \$_{16} \\ \boldsymbol{V}_{AB_2} = \boldsymbol{V}_{AC} - \omega_{18} \$_{18} \end{cases} \tag{6}$$

式中　$\boldsymbol{V}_{AB_1}$、$\boldsymbol{V}_{AB_2}$——构件 AB_1 和 AB_2 的螺旋速度

同理根据闭环Ⅰ、Ⅱ求解过程可以依次求出图 8 中闭环Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ中各个构件的螺旋速度，再根据封闭单元机构与开环单元机构之间的几何关系便可求解出开环单元机构中闭环Ⅰ～Ⅴ中各个构件的螺旋速度。

根据速度螺旋的物理意义可知，构件 i 角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{V}_i) \tag{7}$$

式中　$\boldsymbol{\phi}(\cdot)$——提取速度螺旋前 3 项

速度螺旋中包含构件角速度和线速度，其中前 3 项为构件角速度，后 3 项为构件上与原点重合点的线速度，则构件 i 质心处线速度为

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{V}_i) + \hat{\boldsymbol{\omega}}_i \boldsymbol{r}_i \tag{8}$$

式中　$\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$——提取速度螺旋后 3 项

$\hat{\boldsymbol{\omega}}_i$——矢量 $\boldsymbol{\omega}_i$ 反对称矩阵

$\boldsymbol{r}_i$——坐标原点到构件质心的位移矢量

2.2　相邻单元机构中构件速度分析

双环多杆天线展开机构呈环形，由若干个相同的单元机构组成，单元机构之间通过共用内外节点相互连接，由 2.1 节分析可知，若各个单元机构在相同的位置建立单元坐标系，则各个单元相同位置处的构件的运动特性必然相同。

图 10 中左侧单元机构中各个构件的速度是在坐标系 $OXYZ$ 中求得，与其相邻的右侧单元机构在与左侧相同位置处建立相同的坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$，相邻 2 个单元机构之间通过节点作为连接件，则外环节点 B 在坐标系 $OXYZ$ 中的速度 $\boldsymbol{v}_B^O$ 与外环节点 B_1 在坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$ 的速度 $\boldsymbol{v}_{B_1}^{O_1}$ 相同。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_B^O = \boldsymbol{\omega}_{B_1}^{O_1} \\ \boldsymbol{v}_B^O = \boldsymbol{v}_{B_1}^{O_1} \end{cases} \tag{9}$$

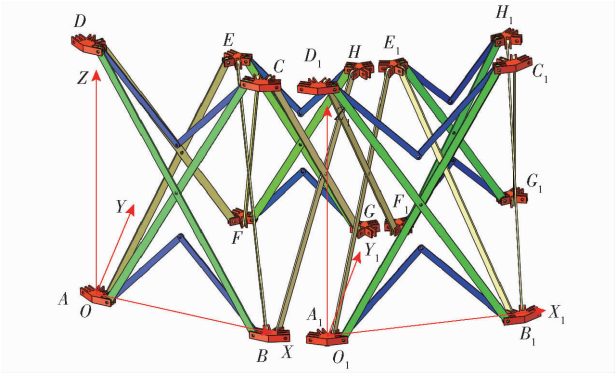

图 10　2 个单元机构及其坐标系

Fig. 10　Two unit mechanisms and their coordinate systems

同理对于由 N 个单元机构组成的双环多杆天线展开机构进行分析，如图 11 所示任选其中一个单元机构建立全局坐标系，在其他剩余的 $N-1$ 个单元机构相同位置处建立单元坐标系，由分析可知，假设相邻 2 个单元之间坐标系 X 轴之间的夹角为 α，则 $\alpha = 360°/N$，即 α 为旋转角，N 个单元机构组成的双环多杆天线展开机构中由第 j 坐标系向第 $j+1$ 坐标系转换只需绕 Z 轴逆时针旋转 α 即可，旋转变换矩阵由 α 组成。

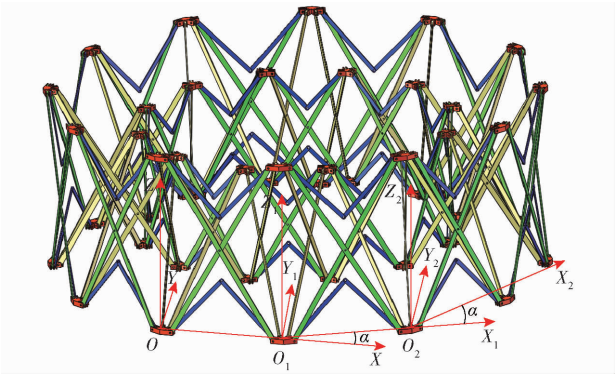

图 11　双环多杆天线展开机构及其坐标系

Fig. 11　Double-ring multi-rod antenna deployable mechanism and its coordinate system

则在全局坐标系中各个构件速度为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_i^O = \boldsymbol{R}_{O_j}^O \boldsymbol{\omega}_i + \sum_{k=1}^{j} \boldsymbol{R}_{O_{k-1}}^O \boldsymbol{\omega}_{O_k} \\ \boldsymbol{v}_i^O = \boldsymbol{R}_{O_j}^O \boldsymbol{v}_i + \sum_{k=1}^{j} \boldsymbol{R}_{O_{k-1}}^O \boldsymbol{v}_{O_k} \end{cases} \tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{R}_{O_j}^O = \begin{bmatrix} \cos(j\alpha) & -\sin(j\alpha) & 0 \\ \sin(j\alpha) & \cos(j\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

式中 j——单元坐标系序号

i——第 j 个单元坐标系中构件序号

$\boldsymbol{R}_{O_j}^{O}$——第 j 个单元坐标系相对于全局坐标系的旋转变换矩阵

2.3 雅可比矩阵求解

由 2.2 节分析可知双环多杆天线展开机构由多种构件组成,则任意构件 i 的空间位姿表达式为

$$\boldsymbol{p}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_i \\ \boldsymbol{r}_i \end{bmatrix} \tag{12}$$

式中 $\boldsymbol{p}_i$——构件 i 空间位姿

$\boldsymbol{\beta}_i$——构件 i 姿态角

对式(12)求导可得

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{J}_i(\varphi)\dot{\varphi} \tag{13}$$

式中 $\boldsymbol{J}_i(\varphi)$——构件 i 速度雅可比矩阵

φ——驱动角函数,即驱动输入

3 双环多杆天线展开机构加速度分析

根据螺旋理论可得螺旋加速度表达式为

$$\boldsymbol{A}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_i \\ \boldsymbol{a}_i - \hat{\boldsymbol{\omega}}_i \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} \tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{A}_i$——构件 i 上单元坐标系原点重合点的六维加速度

$\boldsymbol{\varepsilon}_i$——构件 i 上单元坐标系原点重合点的角加速度

$\boldsymbol{a}_i$——构件 i 质心处线加速度,由螺旋加速度表达式分析可知其后 3 项去除了构件 i 的向心加速度

多刚体系统螺旋加速度合成法则为

$$\boldsymbol{A}_{0n}^{0} = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}_{i(i+1)}^{0} + \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1} \mathrm{Lie}[\boldsymbol{V}_{i(i+1)}^{0}, \boldsymbol{V}_{j(j+1)}^{0}] \tag{15}$$

式中 Lie[ ]——李括号运算

如图 8 在封闭单元机构约束图中闭环Ⅰ可得

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \$_1 + \varepsilon_2 \$_2 + \varepsilon_3 \$_3 + \varepsilon_4 \$_4 + \$_{\mathrm{Lie}}^{1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{AC}^{A} \\ -\varepsilon_5 \$_5 + \varepsilon_6 \$_6 + \$_{\mathrm{Lie}}^{2} = \boldsymbol{\varepsilon}_{AC}^{A} \end{cases} \tag{16}$$

其中

$$\begin{cases} \$_{\mathrm{Lie}}^{1} = \mathrm{Lie}[\omega_1 \$_1, \omega_2 \$_2] + \mathrm{Lie}[\omega_1 \$_1, \omega_3 \$_3] + \\ \quad \mathrm{Lie}[\omega_1 \$_1, \omega_4 \$_4] + \mathrm{Lie}[\omega_2 \$_2, \omega_3 \$_3] + \\ \quad \mathrm{Lie}[\omega_2 \$_2, \omega_4 \$_4] + \mathrm{Lie}[\omega_3 \$_3, \omega_4 \$_4] \\ \$_{\mathrm{Lie}}^{2} = \mathrm{Lie}[-\omega_5 \$_5, \omega_6 \$_6] \end{cases} \tag{17}$$

式中 ε_i——转动副 i 角加速度

由式(16)可得

$$\varepsilon_1 \$_1 + \varepsilon_2 \$_2 + \varepsilon_3 \$_3 + \varepsilon_4 \$_4 + \$_{\mathrm{Lie}}^{1} + \varepsilon_5 \$_5 - \varepsilon_6 \$_6 - \$_{\mathrm{Lie}}^{2} = \boldsymbol{O} \tag{18}$$

同理在图 8 中的闭环Ⅱ ~ Ⅴ以及图 9 中的闭环Ⅰ ~ Ⅴ也可以得到螺旋加速度方程,在已知输入角加速度 ε_1 的情况下,通过求解式(18)及其他螺旋加速度方程,便可以求解出单元机构中构件 i 的螺旋加速度。

在求解出构件 i 的螺旋加速度之后,提取其前 3 项,便可以得到构件 i 的角加速度为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{A}_i) \tag{19}$$

式中 $\boldsymbol{\xi}(\cdot)$——提取螺旋加速度的前 3 项

在求解出构件 i 的角加速度之后,根据螺旋加速度的物理意义,可以得到构件 i 质心线加速度为

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{A}_i) + \hat{\boldsymbol{\omega}}_i \boldsymbol{v}_i + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \boldsymbol{r}_i + \hat{\boldsymbol{\omega}}_i(\hat{\boldsymbol{\omega}}_i \boldsymbol{r}_i) \tag{20}$$

式中 $\boldsymbol{\zeta}(\cdot)$——提取螺旋加速度后 3 项

$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$——矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 的反对称矩阵

与之前速度求解过程一样各个单元机构中位置相同的构件在单元坐标系下加速度相同,则单元机构中构件 i 的加速度在全局坐标系 j 中的表达式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{O} = \boldsymbol{R}_{O_j}^{O} \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{k=1}^{j} \boldsymbol{R}_{O_{k-1}}^{O} \boldsymbol{\varepsilon}_{O_k} \\ \boldsymbol{a}_i^{O} = \boldsymbol{R}_{O_j}^{O} \boldsymbol{a}_i + \sum_{k=1}^{j} \boldsymbol{R}_{O_{k-1}}^{O} \boldsymbol{a}_{O_k} \end{cases} \tag{21}$$

至此,得到了双环多杆天线展开机构中各个构件在全局坐标系下角速度、角加速度的表达式。

4 动力学分析与模拟仿真

4.1 动力学建模

采用拉格朗日法建立可展开天线机构动力学方程。可展开天线机构为单自由度机构,设外连接杆与外环节点之间的夹角为 φ,选取输入角 φ 作为广义坐标。则可展开天线机构的动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_T}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_U}{\partial \varphi} = Q \tag{22}$$

式中 E_T、E_U、Q——动能、势能以及广义坐标对应的广义驱动力

由第 2 节双环多杆天线展开机构速度分析可知,外环节点 A 在全局坐标系中固定,其他内外节点在全局坐标系中做平移运动,剩余构件在全局坐标系中做平面运动,可展开天线机构中做平移运动的内外环节点总动能表达式为

$$T_1 = \frac{1}{2}\sum m_i \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_i \tag{23}$$

式中 m_i——构件 i 的质量

做平面运动的构件总动能的表达式为

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum (m_i \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_i + J_i \omega_i^2) \tag{24}$$

式中　J_i——构件 i 绕过质心轴线转动的转动惯量

则可展开天线机构总动能为

$$E_T = T_1 + T_2 \tag{25}$$

宇航空间环境为微重力环境，这里暂不考虑重力作用，因此可展开天线机构的势能 $E_U = 0$，将驱动角函数代入式(22)，即可求出广义坐标所对应的广义驱动力。

4.2　模拟仿真与理论计算验证

为了验证理论推导的正确性，通过仿真软件 ADAMS 和计算软件 Matlab 进行模拟仿真与数值计算，仿真模型中各构件参数如表 1 所示。如图 12 所示，在选定位置处添加一个驱动进行模拟仿真。双环多杆天线展开机构的展开过程如图 12 ~ 14 所示。

表 1　各个构件物理参数

Tab. 1　Physical parameters of each component

参数	数值
内长杆长度 l/m	0.400 0
内连接杆长度 l_1/m	0.149 6
内环节点通孔轴线到中心的距离 b/m	0.020 0
外长杆长度 L/m	0.632 8
外连接杆长度 L_1/m	0.236 7
外环节点通孔轴线到中心的距离 n/m	0.031 6
内长杆质量 m_{EG}/kg	0.019 0
内连接杆质量 m_{EH1}/kg	0.004 8
内环节点质量 m_F/kg	0.013 0
外长杆质量 m_{DB}/kg	0.030 0
外连接杆质量 m_{AB1}/kg	0.007 6
外环节点质量 m_A/kg	0.019 0
中间杆质量 m_{DF}/kg	0.024 0
内长杆转动惯量 J_{EG}/(kg·m^2)	2.533×10^{-4}
内连接杆转动惯量 J_{EH1}/(kg·m^2)	8.590×10^{-6}
外长杆转动惯量 J_{DB}/(kg·m^2)	1.001×10^{-3}
外连接杆转动惯量 J_{AB1}/(kg·m^2)	3.547×10^{-5}
中间杆转动惯量 J_{DF}/(kg·m^2)	5.334×10^{-4}
外环节点与外连接杆的初始夹角/(°)	60
驱动角输入函数	$5t^2$
仿真时间/s	3.5

图 12 为可展开天线机构完全收拢时的状态，此时可展开天线机构中相邻 2 个内环节点之间和相邻 2 个外环节点之间完全靠拢，可展开天线机构的体积最小，随着可展开天线机构逐渐展开，相邻内环节点和相邻外环节点之间的距离不断增大。图 13 为可展开天线机构半展开状态，此时机构中相邻 2 个内环节点之间和相邻 2 个外环节点之间的距离逐渐加大。图 14 为可展开天线机构完全展开状态，体积达到最大，可展开天线机构中通过转动副相连接的



图 12　完全收拢状态

Fig. 12　Fully folded state

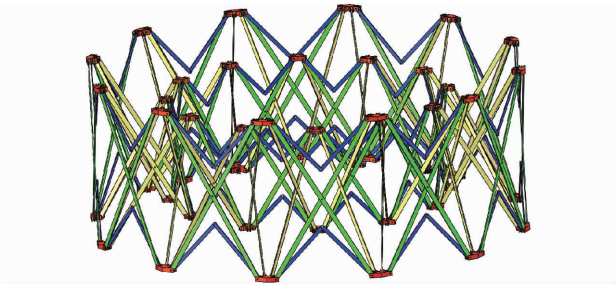

图 13　半展开状态

Fig. 13　Semi deployed state

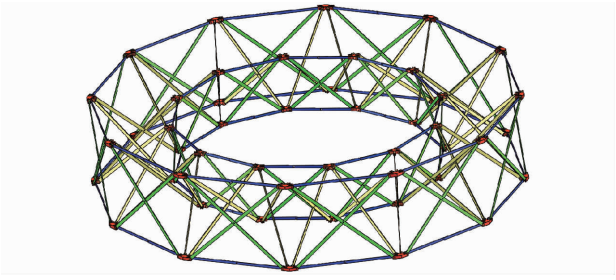

图 14　完全展开状态

Fig. 14　Fully deployed state

2 个内连接杆之间的夹角为 180°，可展开天线机构处于奇异位形状态。

选取单元坐标系与全局坐标系重合的单元机构中的内长杆、外连接杆、中间杆、内环节点为目标构件，4 种构件沿 X 轴方向的运动学特性曲线的仿真结果与理论计算结果如图 15 ~ 19 所示。

由图 15 ~ 19 可知，模拟仿真结果曲线与理论推导结果曲线基本一致，表明了之前理论推导的正确性，基于螺旋理论和拉格朗日法相结合的动力学建模方法可较好地应用于此类空间可展开天线机构的分析中。由图 15 可知，4 种构件沿 X 轴方向的速度均是先增加后减少，由图 17、18 可知，内环节点和外连接杆角速度、角加速度均为 0，表明内环节点仅做直线移动不存在转动，外连接

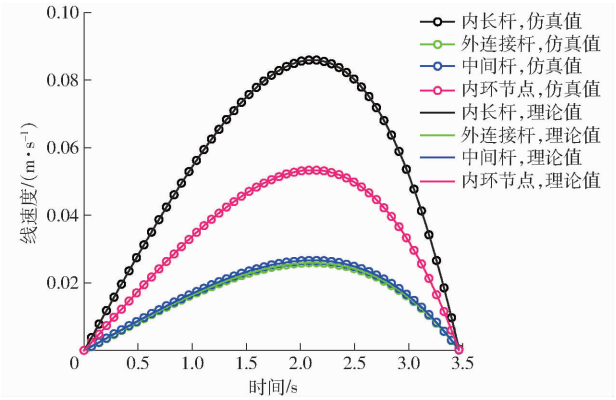

图 15 各构件线速度

Fig. 15 Linear velocity of each component

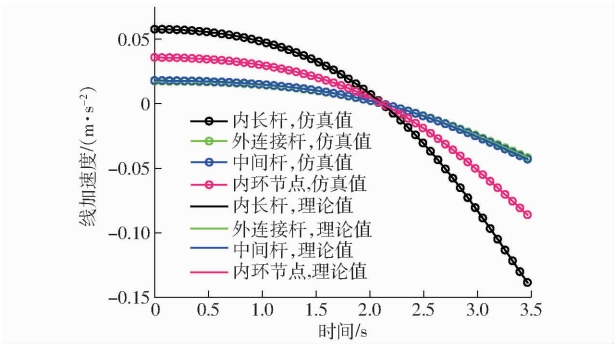

图 16 各构件线加速度

Fig. 16 Linear acceleration of each component

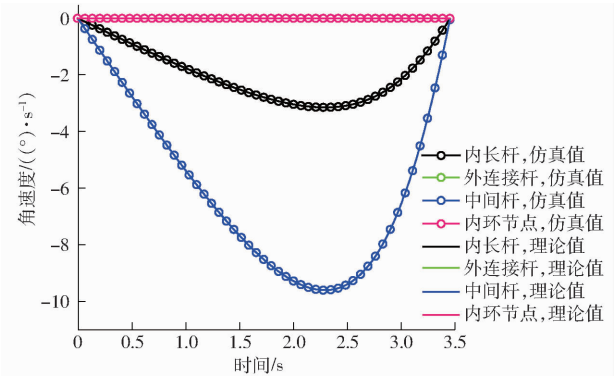

图 17 各构件角速度

Fig. 17 Angular velocity of each component

杆做绕 Y 轴的定轴转动运动。当时间接近 3.5 s 时理论计算失效,说明此时双环多杆天线展开机构处于完全展开状态并且处于奇异位形状态,理论分析与仿真结果相一致。由图 15 ~ 18 可知,各个构件角速度、角加速度、线速度以及线加速度曲线光滑,表明双环多杆天线展开机构展开过程动作平稳,不存在冲击与振动。

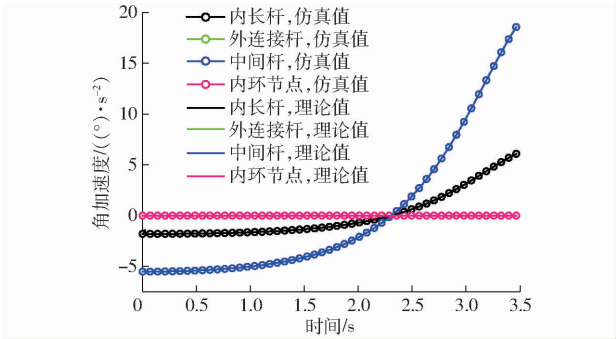

图 18 各构件角加速度

Fig. 18 Angular acceleration of each component

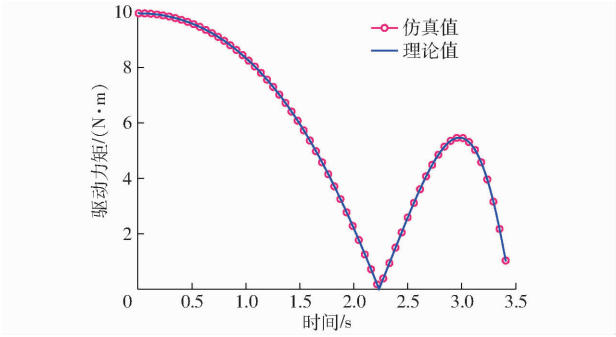

图 19 驱动力矩

Fig. 19 Driving torque

5 结论

(1)基于螺旋理论和拉格朗日法相结合的方法建立了双环多杆天线展开机构的运动学与动力学模型,对双环多杆天线展开机构的运动学与动力学特性进行了分析研究,并通过理论计算结果与仿真结果对比,验证了理论推导的正确性。

(2)研究的双环多杆天线展开机构为单自由度机构,整体结构简单,仅需一个驱动便可展开。通过理论计算与模拟仿真分析,结果表明双环多杆天线展开机构整体展开过程平稳,可作为星载大口径可展开天线机构的支撑机构。

参 考 文 献

[1] 屈泉酉, 安萌, 梁德印. 中国遥感卫星在农业领域的应用现状与未来发展[J]. 卫星应用, 2018, 75(3): 28 – 31.
QU Quanyou, AN Meng, LIANG Deyin. Application status and future development of remote sensing satellites in agriculture in China[J]. Satellite Application, 2018, 75(3): 28 – 31. (in Chinese)

[2] 刘荣强, 史创, 郭宏伟, 等. 空间可展开天线机构研究与展望[J]. 机械工程学报, 2020, 56(5): 1 – 12.
LIU Rongqiang, SHI Chuang, GUO Hongwei, et al. Review of space deployable antenna mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(5): 1 – 12. (in Chinese)

[3] 韩博, 许允斗, 郭路瑶, 等. 四面体构架式可展天线型面划分与程序化建模[J]. 中国机械工程, 2019, 30(12): 1400 – 1408.
HAN Bo, XU Yundou, GUO Luyao, et al. Profile division and programmatic modeling of tetrahedral truss deployable antennas [J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(12): 1400 – 1408. (in Chinese)

[4] 杨兴文, 韩静涛, 刘靖, 等. 空间在轨制造技术发展综述及展望[J]. 宇航学报, 2021, 42(11): 1343 – 1354.

YANG Xingwen, HAN Jingtao, LIU Jing, et al. Review and prospects of development of space on orbit manufacturing technology[J]. Journal of Astronautics, 2021, 42(11): 1343 – 1354. (in Chinese)

[5] LU S N, ZLATANOV D, DING X L, et al. A new family of deployable mechanisms based on the hoekens linkage[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 73(2): 130 – 153.

[6] 刘明治, 高桂芳. 空间可展开天线结构研究进展[J]. 宇航学报, 2003, 24(1): 82 – 87.
LIU Mingzhi, GAO Guifang. Advances in the study on structure for space deployable an tenna[J]. Journal of Astronautics, 2003, 24(1): 82 – 87. (in Chinese)

[7] DENG Z Q, HUANG H L, LI B, et al. Synthesis of deployable/foldable single loop mechanisms with revolute joints[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2011, 3(3): 031006.

[8] 邱慧, 刘志全, 曾惠忠, 等. 航天器可展 SAR 天线结构综述[J]. 宇航学报, 2021, 42(10): 1197 – 1206.
QIU Hui, LIU Zhiquan, ZENG Huizhong, et al. Review of deployable SAR antenna structures of spacecraft[J]. Journal of Astronautics, 2021, 42(10): 1197 – 1206. (in Chinese)

[9] 李培, 马沁巍, 宋燕平, 等. 大型空间环形桁架天线反射器展开动力学模拟与实验研究[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47(10): 7 – 15.
LI Pei, MA Qinwei, SONG Yanping, et al. Deployment dynamics simulation and ground test of a large space hoop truss antenna reflector[J]. Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronica, 2017, 47(10): 7 – 15. (in Chinese)

[10] 张大羽, 马小飞, 王辉, 等. 环柱式天线展开过程耦合动力学分析[J]. 宇航学报, 2022, 43(7): 880 – 889.
ZHANG Dayu, MA Xiaofei, WANG Hui, et al. Coupling dynamics analysis of rod cable antenna deployment[J]. Journal of Astronautics, 2022, 43(7): 880 – 889. (in Chinese)

[11] DATASHVILI L, ENDLER S, WEI B, et al. Study of mechanical architectures of large deployable space antenna apertures: from design to tests[J]. Ceas Space Journal, 2013, 5(3 – 4): 169 – 184.

[12] 陈修龙, 郭景尧, 贾永皓. 3 – RRPaR 并联机构刚体动力学建模与分析[J]. 农业机械学报, 2020, 51(6): 404 – 411.
CHEN Xiulong, GUO Jingyao, JIA Yonghao. Rigid body dynamics modeling and analysis of 3 – RRPaR parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(6): 404 – 411. (in Chinese)

[13] 吴新燕, 关富玲. 双圈六面体环形桁架式可展开天线结构设计[J]. 机械工程学报, 2020, 56(5): 218 – 225.
WU Xinyan, GUAN Fuling. Design of deployable antenna of double-loop hexahedron truss[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(5): 218 – 225. (in Chinese)

[14] 史创, 郭宏伟, 刘荣强, 等. 双层环形可展开天线机构构型优选及结构设计[J]. 宇航学报, 2016, 37(7): 869 – 878.
SHI Chuang, GUO Hongwei, LIU Rongqiang, et al. Configuration optimization and structure design of the double layer hoop deployable antenna mechanism[J]. Journal of Astronautics, 2016, 37(7): 869 – 878. (in Chinese)

[15] 关富玲, 戴璐. 双环可展桁架结构动力学分析与试验研究[J]. 浙江大学学报(工学版), 2012, 46(9): 1605 – 1610, 1646.
GUAN Fuling, DAI Lu. Dynamic analysis and experimental study of double-ring deployable truss structures[J]. Journal of Zhejiang University(Engineering Science), 2012, 46(9): 1605 – 1610, 1646. (in Chinese)

[16] XU Y, GUAN F L, ZHENG Y, et al. Kinematic analysis of the deployable truss structures for space applications[J]. Journal of Aerospace Technology and Management, 2012, 4(4): 453 – 462.

[17] DAI L, GUAN F L, GUESTJ K. Structural optimization and model fabrication of a double-ring deployable antenna truss[J]. Acta Astronautica, 2014, 94(2): 843 – 851.

[18] 朱伟, 郭倩, 马致远, 等. SCARA 并联机构刚度和动力学分析[J]. 农业机械学报, 2019, 50(10): 375 – 385.
ZHU Wei, GUO Qian, MA Zhiyuan, et al. Stiffness and dynamics analysis of SCARA parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(10): 375 – 385. (in Chinese)

[19] 彭浩, 何柏岩. 星载环形天线重力补偿新方法[J]. 中国机械工程, 2019, 30(4): 379 – 384.
PENG Hao, HE Baiyan. A new gravity compensation method of space-borne perimeter truss deployable reflectors[J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(4): 379 – 384. (in Chinese)

[20] 杨继东, 万彪刚, 高俊东, 等. Tripod 并联机器人运动学分析与样机实验[J]. 农业机械学报, 2016, 47(10): 390 – 397.
YANG Jidong, WAN Biaogang, GAO Jundong, et al. Kinematic analysis and experiment of Tripod parallel robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(10): 390 – 397. (in Chinese)

[21] CAMPBELL G, BAILEY M, BELVIN W. The development of the 15-meter hoop column deployable antenna system[J]. Acta Astronautica, 1988, 17(1): 69 – 77.

[22] 陈聪聪, 唐雅琼, 刘阳, 等. 一种环柱天线的索网结构设计与分析方法[J]. 西安电子科技大学学报, 2019, 46(4): 43 – 48.
CHEN Congcong, TANG Yaqiong, LIU Yang, et al. Method for design and analysis of the cable net structure for a hoop/column antenna[J]. Journal of Xidian University, 2019, 46(4): 43 – 48. (in Chinese)

[23] 张国兴, 郭金伟, 侯雨雷, 等. 四自由度混联天线机构静力学及运动特性仿真与设计[J]. 农业机械学报, 2021, 52(1): 418 – 426.
ZHANG Guoxing, GUO Jinwei, HOU Yulei, et al. Statics and kinematic characteristics simulation of 4-DOF hybrid antenna mechanism for design[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(1): 418 – 426. (in Chinese)

(下转第 426 页)

SHANG Kaige. Mechanical structure design and control system research of tea picking robot[D]. Changchun: Changchun University of Technology, 2019. (in Chinese)
[6] WANG L, ZHAO B, FAN J. Development of a tomato harvesting robot used in greenhouse[J]. International Journal of Agricultural and Biological Engineering, 2017, 10(4): 140 - 149.
[7] 周天娟,张铁中. 果蔬采摘机器人技术研究进展和分析[J]. 农业机械,2006(22):38 - 39.
[8] 傅隆生,张发年,槐岛芸德,等. 猕猴桃采摘机器人末端执行器设计与试验[J]. 农业机械学报,2015,46(3):1 - 8.
FU Longsheng, ZHANG Fanian, GEJIMA Y, et al. Development and experiment of end-effector for kiwifruit harvesting robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(3): 1 - 8. (in Chinese)
[9] 周增产,BONTSEMA J, VAN KOLLENBURG-GRISAN L. 荷兰黄瓜收获机器人的研究开发[J]. 农业工程学报,2001, 17(6):77 - 80.
ZHOU Zengchan, BONTSEMA J, VAN KOLLENBURG-GRISAN L. Development of cucumber harvesting robot in Netherlands [J]. Transactions of the CSAE, 2001, 17(6): 77 - 80. (in Chinese)
[10] 高凤. 名优茶并联采摘机器人结构设计与仿真[D]. 南京:南京林业大学,2013.
GAO Feng. Structural design and simulation of famous and high-quality tea parallel picking robot[D]. Nanjing: Nanjing Forestry University, 2013. (in Chinese)
[11] 陆怀民. 林木球果采集机器人设计与试验[J]. 农业机械学报, 2001, 32(6):52 - 54,58.
LU Huaimin. Design and test of collecting robot of conifer cone[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2001, 32(6): 52 - 54, 58. (in Chinese)
[12] HAYASHI S, SHIGEMATSU K, YAMAMOTO S, et al. Evaluation of a strawberry-harvesting robot in a field test[J]. Biosystems Engineering, 2010, 105(2): 160 - 171.
[13] ARMADA M A, MUSCATO G, PRESTIFILIPPO M, et al. A prototype of an orange picking robot: past history, the new robot and experimental results[J]. Industrial Robot an International Journal, 2005, 32(2): 128 - 138.
[14] 卢伟,宋爱国,蔡健荣,等. 柑橘采摘机器人结构设计及运动学算法[J]. 东南大学学报(自然科学),2011,41(1): 95 - 100.
LU Wei, SONG Aiguo, CAI Jianrong, et al. Structural design and kinematics algorithm research for orange harvesting robot[J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2011, 41(1): 95 - 100. (in Chinese)
[15] 高浩,王虎,陈平. 猕猴桃采摘机器人的研究与设计[J]. 农机化研究,2013,35(2):73 - 76.
GAO Hao, WANG Hu, CHEN Ping. Research and design of kiwifruit picking robot[J]. Journal of Agricultural Mechanization Research, 2013, 35(2): 73 - 76. (in Chinese)
[16] 叶柳,丁武学,孙宇,等. 六连杆冷温锻压力机传动机构优化设计[J]. 锻压技术,2020,45(10):112 - 116,136.
YE Liu, DING Wuxue, SUN Yu, et al. Optimal design of transmission mechanism for a six-link cold and warm forging press [J]. Forging & Stamping Technology, 2020, 45(10): 112 - 116, 136. (in Chinese)
[17] 吕明青,邵珠峰,徐道春,等. 基于遗传算法的六连杆机构尺寸优化设计[J]. 锻压技术,2022,47(7):184 - 193.
LÜ Mingqing, SHAO Zhufeng, XU Daochun, et al. Six-bar linkage size optimization design based on genetic algorithm[J]. Forging & Stamping Technology, 2022, 47(7): 184 - 193. (in Chinese)
[18] 杨廷力,罗玉峰,沈惠平,等. 机器人机构拓扑机构设计[M]. 北京:科学出版社,2012:8 - 54.
[19] 李菊,吉恩成,丁文芹,等. 一种完全运动解耦的六自由度混联操作手:202210851010.0[P]. 2022 - 07 - 20.
[20] 沈惠平. 机器人机构拓扑特征运动学[M]. 北京:高等教育出版社,2021.
[21] 杨廷力. 机械系统基本理论:结构学,运动学,动力学[M]. 北京:机械工业出版社,1996.
[22] 沈惠平,聂亚彪,李菊,等. 基于有限位置法的冲压机构摆动力完全平衡设计[J]. 农业机械学报,2021,52(4):384 - 391,426.
SHEN Huiping, NIE Yabiao, LI Ju, et al. Design and analysis of complete shaking force balance of stamping mechanism based on finite position method[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(4): 384 - 391, 426. (in Chinese)

(上接第 415 页)

[24] 宋孟军, 张明路. 多足仿生移动机器人并联机构运动学研究[J]. 农业机械学报, 2012, 43(3): 200 - 206.
SONG Mengjun, ZHANG Minglu. Kinematic analysis for parallel mechanism of bionic-mobile robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(3): 200 - 206. (in Chinese)
[25] 韩博, 许允斗, 姚建涛, 等. 双层环形桁架可展天线机构运动特性与动力学分析[J]. 兵工学报, 2020, 41(4): 810 - 821.
HAN Bo, XU Yundou, YAO Jiantao, et al. Kinematic characteristics and dynamics analysis of a double-ring truss deployable antenna mechanism[J]. Acta Armamentarii, 2020, 41(4): 810 - 821. (in Chinese)
[26] HAN B, XU Y D, YAO J T, et al. Design and analysis of a scissors double-ring truss deployable mechanism for space antennas[J]. Aerospace Science and Technology, 2019, 93: 105357.
[27] 韩博, 韩媛媛, 许允斗, 等. 剪叉式过约束双环桁架可展天线机构的构型设计与自由度分析[J]. 机器人, 2019, 41(3): 362 - 371, 383.
HAN Bo, HAN Yuanyuan, XU Yundou, et al. Configuration design and mobility analysis of the scissors overconstrained double-ring truss deployable antenna mechanism[J]. Robot, 2019, 41(3): 362 - 371, 383. (in Chinese)