doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2023.03.045

2RPU +2UPR + RPR 多冗余驱动并联机构运动学分析与优化

刘晓飞[1]　刘　洋[1]　何　阳[1]　万　波[1]　刘　宇[2]　赵永生[1]

(1.燕山大学河北省并联机器人与机电系统实验室, 秦皇岛 066004;
2.河北农业大学理工系, 沧州 061100)

摘要: 提出一种 RPR 型多冗余驱动两转一移并联机构 2RPU + 2UPR + RPR。基于螺旋理论建立机构运动螺旋系与约束螺旋系,分析机构自由度性质;建立机构运动学模型,基于软件仿真结果验证理论模型正确性;推导机构传递螺旋系,建立机构局部性能指标与全域性能指标;基于优质工作空间和优质传递性能分布对机构进行尺度优化,获得机构优化尺度与传递性能图谱,分析关键尺度参数对机构传递性能的影响;基于雅可比矩阵和传递性能分布分析优化尺度下机构奇异特性,机构在优化空间内无奇异位形。

关键词: 并联机构; 多冗余驱动; 自由度分析; 尺度优化; 性能分析

中图分类号: TP242.2　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2023)03-0440-11　　**OSID**:

Kinematic Analysis and Dimension Optimization of Multi-redundantly Actuated Parallel Mechanism 2RPU + 2UPR + RPR

LIU Xiaofei[1]　LIU Yang[1]　HE Yang[1]　WAN Bo[1]　LIU Yu[2]　ZHAO Yongsheng[1]

(1. *Parallel Robot and Mechatronic System Laboratory of Hebei Province*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*
2. *Department of Science and Technology*, *Hebei Agricultural University*, *Cangzhou* 061100, *China*)

Abstract: A RPR-type multi-redundantly actuated parallel mechanism 2RPU + 2UPR + RPR with freedom of two-rotation-one-translation was proposed. It can be used to design a variety of robots used in heavy loads and precision occasions. Motion and constraint screws about the mechanism were analyzed based on the screw theory, and with that the number and properties of degrees of freedom were analyzed. Kinematic model of the mechanism was developed and validated by simulation results. Transfer screw system of the mechanism was derived, and motion/force transfer index of the mechanism were established, including local and global performance index. In addition, the distribution characteristics of the performance index was analyzed. Dimension of the mechanism was optimized based on the quality workspace and quality transfer performance, and the optimized dimension was obtained, as well as the transmission performance map at the optimized dimension. What's more, the influence of key dimension parameters on the mechanism transfer performance was analyzed. To verify the results of the dimension optimization, singular properties at the optimized dimension were analyzed based on Jacobian matrix and transmission performance maps. The research result would provide a reference for the theoretical research and application of this multi-redundantly actuated parallel mechanism.

Key words: parallel mechanism; multi-redundant actuation; freedom analysis; dimension optimization; performance analysis

0　引言

少自由度并联机构相对于六自由度并联机构在加工制造、标定、控制和维护等方面具有更低的成本。具有 2 个转动自由度(R)和 1 个移动自由度(T)的三自由度并联机构是少自由度并联机构中最具代表性的一类。2R1T 三自由度并联机构中最典型的代表有 Sprint Z3 轴头[1]、Exechon 混联机器

收稿日期: 2022-06-05　修回日期: 2022-08-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(52105036)和河北省科技项目(206Z1805G)

作者简介: 刘晓飞(1986—),男,讲师,主要从事并联机构动力学与控制研究,E-mail: liuxf@ysu.edu.cn

通信作者: 赵永生(1962—),男,教授,博士生导师,主要从事机器人、多维力传感器和先进制造技术研究,E-mail: yszhao@ysu.edu.cn

人[2]和 Tricept 混联机器人[3]等。2R1T 三自由度并联机构具有两条转轴，根据转轴的几何关系不同，将 2R1T 三自由度并联机构分为 UP、PU、RPR 和 P^*U^* 共 4 类。UP 类并联机构的动平台运动可用一条 UP 串联运动链实现，这类并联机构的典型例子为 Tricept 机构[3]、TriVariant - A 机构[4]、Tricept - IV[5]和 T5[6]机构等。同理，PU 类并联机构的动平台运动可用 PU 串联运动链来实现，典型机构有 XIE 等[7]提出的无伴随运动的 PSS - PRU - PU 并联机构，陈子明等[8]提出的无伴随运动的对称 3 - UPU 并联机构等。RPR 类并联机构提出时间较短，典型的有2 - UPR - RPU 机构[9]及其倒置机构 2 - RPU - UPR 机构[10]等。当 2R1T 并联机构的两条转轴具有时变性质时，如 HUNT[11]提出的 3 - RPS 机构，动平台的运动不能用一条三自由度的串联链来实现，该类机构称之为 P^*U^* 类并联机构。

冗余驱动并联机构通过增加冗余驱动支链或关节，可以实现装备驱动力优化分配，降低对装备支链机械强度与驱动单元负载能力的需求，实现装备轻量化、高可靠性设计。此外，冗余驱动可以有效降低并联机构关节间隙对系统运动精度的影响，提高系统运动精度，强化机构等效刚度，减少机构奇异位形，优化机构动力学性能等。早期对于冗余驱动并联机构的相关研究大都针对单冗余驱动并联机构(冗余度为 1)，通过将传统并联机构增加冗余驱动支链获得冗余驱动并联机构，如平面冗余驱动并联机构 3RRR 机构[12-13]、3RPR 机构[14]、2RRR + RR 机构[15]、4RRR 机构[16]和 2PRR + 2PRPR 机构[17]等，以及空间冗余驱动并联机构 3UPS + U 机构[18]、4UPS + PU 机构[19]、7UPS 机构[20]、2RP(R)/S + 2RPS 机构[21]、2RPU + 2SPR 机构[22]等。随着研究的深入，许多学者提出了多冗余驱动并联机构(冗余度大于等于 2)，如 WANG 等[23]提出的 6PUS + SP 机构、CHENG 等[24]提出的 6RSS + SP 机构、ZHAO 等[25]提出的 8PSS 机构和梁栋[26]提出的 2RRR(RRR)机构等。此外，BOUDREAU 等[27]通过将 3RRR 机构增加驱动关节提出了冗余度为 3 的 3RRR 机构；SHAHIDI 等[28]通过对 Delta 机构的变型提出了具有多个冗余度的 n - PRPaR 机构；周昌春等[29]将两个 3RRS 机构组合，构成了冗余度为 3 的 6RRS 球面冗余驱动并联机构，并基于该机构设计了飞行模拟器；王向阳等[30]通过将 3PRS 机构增加驱动关节提出了冗余度为 3 的 3PRS 机构，并基于该机构设计了 Z3 并联动力头。

对于冗余驱动并联机构的构型优选与尺度优化方面，王冰等[31]建立了三自由度平面驱动冗余并联机器人的刚度性能与尺度之间的关系，杜烨等[32]以工作空间为指标对双冗余驱动并联机床进行了优化设计，SUMIN 等[33]、WU 等[34]以能量消耗作为性能指标对冗余驱动并联机构进行优化设计，LIU 等[35]、LI 等[36]以力的有效传递性作为性能指标对冗余驱动并联机构进行了性能分析与优化设计，梁栋[26]以机构产生运动所需最小关节力矩为指标对 2 冗余度并联机构进行了驱动关节选择和尺度优化设计，刘艳敏[37]以全域条件数为指标对 3RPUR 冗余驱动并联机构进行了尺度优化设计，张飞等[38]以最大负载力为指标对冗余驱动绳索牵引并联机构进行了参数优化，CHAI 等[39]以位置驱动误差与动平台运动误差间的映射作为指标对 2UPR + 2RPU 搅拌摩擦焊接机器人进行了尺度优化设计。

本文提出一种 RPR 类的多冗余驱动 2R1T 三自由度并联机构 2RPU + 2UPR + RPR，该机构 5 个支链均包含驱动关节。基于螺旋理论建立机构运动螺旋系与约束螺旋系，分析机构自由度性质；推导机构传递螺旋系，建立机构局部性能指标与全域性能指标；基于优质工作空间和优质传递性能对机构进行尺度优化，获得优化尺度下机构传递性能图谱，分析关键尺度参数对机构传递性能影响；建立机构运动学模型，分析机构在优化尺度下奇异特性，以期为该机构理论研究与应用提供依据。

1　机构描述

2RPU + 2UPR + RPR 并联机构结构简图如图 1 所示。该机构包括 2 个 RPU 分支、2 个 UPR 和 1 个 RPR 分支，R、P、U 分别代表转动副、移动副和万向铰副。R 副 A_1、A_3、A_5与 U 副 A_2、A_4均与定平台相连，且轴线在同一平面，其中 R 副 A_1、A_3、A_5的轴线平行，且 A_5轴线与 U 副 A_2、A_4的中心连线共线；同样的，R 副 B_2、B_4、B_5与 U 副 B_1、B_3均与动平台相连，且轴线在同一平面，其中 R 副 B_2、B_4、B_5的轴线平行，

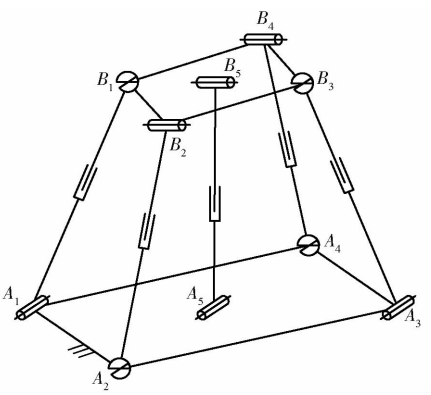

图 1　2RPU + 2UPR + RPR 并联机构结构简图

Fig. 1　Diagram of parallel mechanism 2RPU + 2UPR + RPR

且 B_5 轴线与 U 副 B_1、B_3 的中心连线共线。该机构所有 P 副均为驱动副，由直线驱动单元驱动，其余关节均为被动副。

基于 2RPU + 2UPR + RPR 机构设计的混联加工机器人如图 2 所示。由于采用多冗余驱动形式，较传统两转一移机构而言，该机构具有更高的整体刚度与运动精度，可以使得混联加工机器的加工精度更高，承载力更大。

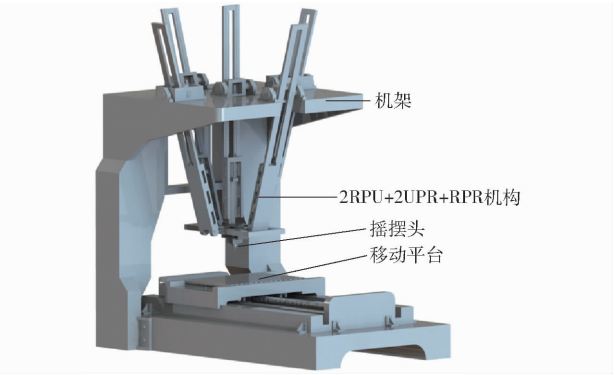

图 2 基于 2RPU + 2UPR + RPR 机构的混联加工机器人

Fig. 2 Hybrid processing robot based on mechanism 2RPU + 2UPR + RPR

2 自由度分析

建立如图 3 所示的坐标系，其中定坐标系 *OXYZ* 与定平台固接，动坐标系 *oxyz* 与动平台固接。四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形，原点 *O* 为该正方形中心且与点 A_5 重合，*X* 轴与 A_2A_4 连线共线；四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 为正方形，原点 *o* 为该正方形中心且与点 B_5 重合，*y* 轴与 B_1B_3 连线共线。令 $l_{OA_i}=a(i=1,2,3,4)$，$l_{oB_i}=b(i=1,2,3,4)$，$l_{oO}=\lambda$。

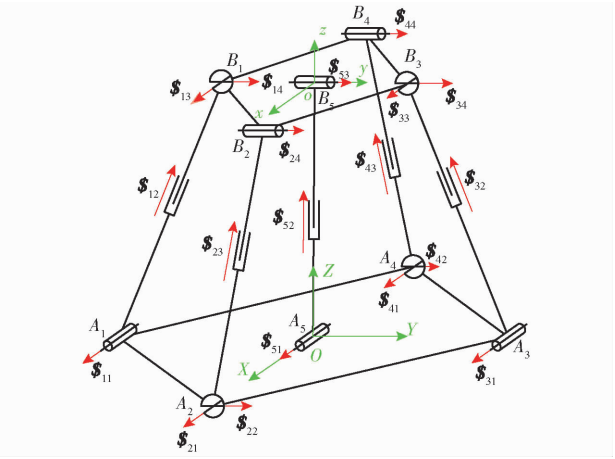

图 3 2RPU + 2UPR + RPR 机构坐标系与运动螺旋

Fig. 3 Coordinate system and kinematic screws of mechanism 2RPU + 2UPR + RPR

在定坐标系 *OXYZ* 中，对机构一般位型的自由度进行分析，所获得的结果更具一般适用性。受分支 A_5B_5 RPR 构型的限制，B_1B_3 连线只能在 *OYZ* 平面内运动。因此，点 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5 的坐标可分别表示为 $(0\quad y_1\quad z_1)$、$(x_2\quad y_2\quad z_2)$、$(0\quad y_3\quad z_3)$、$(x_4\quad y_4\quad z_4)$、$(0\quad y_5\quad z_5)$，分支 A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3、A_4B_4、A_5B_5 中移动副的方向余弦可分别表示为 $(0\quad m_1\quad n_1)$、$(d_2\quad m_2\quad n_2)$、$(0\quad m_3\quad n_3)$、$(d_4\quad m_4\quad n_4)$、$(0\quad m_5\quad n_5)$。

分支 A_1B_1 为 RPU 分支，该分支的运动螺旋系可以表示为

$$\begin{cases}\$_{11}=(1\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad 0\quad a)\\ \$_{12}=(0\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad m_1\quad n_1)\\ \$_{13}=(1\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad z_1\quad -y_1)\\ \$_{14}=(0\quad e_1\quad f_1\quad;\quad y_1f_1-z_1e_1\quad 0\quad 0)\end{cases}\tag{1}$$

式中 e_1、f_1——动坐标系 *y* 轴在定坐标系中的方向余弦，随着机构的运动而变化

式(1)的反螺旋系为

$$\begin{cases}\$_1^{r1}=(1\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad z_1\quad -y_1)\\ \$_1^{r2}=(0\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad -f_1\quad e_1)\end{cases}\tag{2}$$

同理，分支 A_3B_3（同为 RPU 分支）的运动螺旋系可以表示为

$$\begin{cases}\$_{31}=(1\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad 0\quad -a)\\ \$_{32}=(0\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad m_3\quad n_3)\\ \$_{33}=(1\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad z_3\quad -y_3)\\ \$_{34}=(0\quad e_1\quad f_1\quad;\quad y_3f_1-z_3e_1\quad 0\quad 0)\end{cases}\tag{3}$$

式(3)的反螺旋系为

$$\begin{cases}\$_3^{r1}=(1\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad z_3\quad -y_3)\\ \$_3^{r2}=(0\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad -f_1\quad e_1)\end{cases}\tag{4}$$

分支 A_2B_2 为 UPR 分支，该分支的运动螺旋系可以表示为

$$\begin{cases}\$_{21}=(1\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad 0\quad 0)\\ \$_{22}=(0\quad e_1\quad f_1\quad;\quad 0\quad -af_1\quad ae_1)\\ \$_{23}=(0\quad 0\quad 0\quad;\quad d_2\quad m_2\quad n_2)\\ \$_{24}=(0\quad e_1\quad f_1\quad;\quad y_2f_1-z_2e_1\quad -x_2f_1\quad x_2e_1)\end{cases}\tag{5}$$

式(5)的反螺旋系为

$$\begin{cases}\$_2^{r1}=(0\quad e_1\quad f_1\quad;\quad 0\quad -af_1\quad ae_1)\\ \$_2^{r2}=(0\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad -f_1\quad e_1)\end{cases}\tag{6}$$

同理，分支 A_4B_4（同为 UPR 分支）的运动螺旋系可以表示为

$$\begin{cases}\$_{41}=(1\quad 0\quad 0\quad;\quad 0\quad 0\quad 0)\\ \$_{42}=(0\quad e_1\quad f_1\quad;\quad 0\quad af_1\quad -ae_1)\\ \$_{43}=(0\quad 0\quad 0\quad;\quad d_4\quad m_4\quad n_4)\\ \$_{44}=(0\quad e_1\quad f_1\quad;\quad y_4f_1-z_4e_1\quad -x_4f_1\quad x_4e_1)\end{cases}\tag{7}$$

式(7)的反螺旋系为

$$\begin{cases} \$_4^{r_1} = (0 \quad e_1 \quad f_1 \quad ; \quad 0 \quad af_1 \quad -ae_1) \\ \$_4^{r_2} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad -f_1 \quad e_1) \end{cases} \tag{8}$$

分支 A_5B_5 为 RPR 分支，该分支的运动螺旋系可以表示为

$$\begin{cases} \$_{51} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0) \\ \$_{52} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad -f_1 \quad e_1) \\ \$_{53} = (0 \quad e_1 \quad f_1 \quad ; \quad y_5f_1 - z_5e_1 \quad 0 \quad 0) \end{cases} \tag{9}$$

式(9)的反螺旋系为

$$\begin{cases} \$_5^{r_1} = (0 \quad e_1 \quad f_1 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0) \\ \$_5^{r_2} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad -f_1 \quad e_1) \\ \$_5^{r_3} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad z_5 \quad -y_5) \end{cases} \tag{10}$$

因此，该机构所受约束螺旋系为

$$\$^r = [\$_1^{r_1} \quad \$_1^{r_2} \quad \$_2^{r_1} \quad \$_2^{r_2} \quad \$_3^{r_1} \quad \$_3^{r_2} \quad \$_4^{r_1} \quad \$_4^{r_2} \quad \$_5^{r_1} \quad \$_5^{r_2} \quad \$_5^{r_3}] \tag{11}$$

对式(11)的螺旋系进一步简化，可以得到

$$\begin{cases} \$^{r_1} = (0 \quad e_1 \quad f_1 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0) \\ \$^{r_2} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad -f_1 \quad e_1) \\ \$^{r_3} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad z_5 \quad -y_5) \end{cases} \tag{12}$$

对式(12)求解反螺旋，可得机构运动螺旋系，即

$$\begin{cases} \$_1 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0) \\ \$_2 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad -f_1 \quad e_1) \\ \$_3 = (0 \quad e_1 \quad f_1 \quad ; \quad y_5f_1 - z_5e_1 \quad 0 \quad 0) \end{cases} \tag{13}$$

式(13)中，螺旋 $\$_1$ 表示机构动平台有一个绕着定坐标系 X 轴转动的自由度，螺旋 $\$_2$ 表示动平台有一个沿着 A_5B_5 方向移动的自由度，螺旋 $\$_3$ 表示动平台有一个绕着动坐标系 y 轴转动的自由度。因此可得该机构是一个具有两转动一移动的三自由度并联机构。

3　运动学建模与仿真验证

3.1　位置分析

基于机构自由度分析的结果，2RPU − 2UPR − RPR 机构动平台位姿可以看作由定坐标系经过 3 次位姿变换得到：首先，绕 x 轴转动 θ_1；然后，沿 z 轴方向移动 λ；最后，绕 y 轴转动 θ_2。该位姿变换矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{Rot}(x,\theta_1)\mathrm{Trans}(0,0,\lambda)\mathrm{Rot}(y,\theta_2) = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 & -s\theta_1 c\theta_2 & -\lambda s\theta_1 \\ -c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 & \lambda c\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

其中 $s\theta_i$ 表示 $\sin\theta_i$，$c\theta_i$ 表示 $\cos\theta_i$。

进而可以得到动坐标系相对于定坐标系的旋转变换矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和位移向量 $\boldsymbol{P}_o$ 分别为

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 & -s\theta_1 c\theta_2 \\ -c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{P}_o = [0 \quad -\lambda s\theta_1 \quad \lambda c\theta_1]^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

记点 A_i 在定坐标系中的位置向量为 $\boldsymbol{A}_i$，于是可得 $\boldsymbol{A}_1 = [0 \quad -a \quad 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}_2 = [a \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}_3 = [0 \quad a \quad 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}_4 = [0 \quad -a \quad 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}_5 = [0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$。

记点 B_i 在定坐标系中的位置向量为 ${}^o\boldsymbol{B}_i$，于是可得 ${}^o\boldsymbol{B}_1 = [0 \quad -b \quad 0]^{\mathrm{T}}$，${}^o\boldsymbol{B}_2 = [b \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$，${}^o\boldsymbol{B}_3 = [0 \quad b \quad 0]^{\mathrm{T}}$，${}^o\boldsymbol{B}_4 = [-b \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$，${}^o\boldsymbol{B}_5 = [0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$。

基于机构定平台到动平台的位姿变换，可得点 B_i 在定坐标系中的位置向量为

$$\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{R}\,{}^o\boldsymbol{B}_i + \boldsymbol{P}_o \quad (i = 1,2,3,4,5) \tag{17}$$

进而可以得到各分支连杆长度为

$$l_i = |\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{A}_i| \quad (i = 1,2,3,4,5) \tag{18}$$

整理可得

$$\begin{cases} l_1^2 = a^2 + b^2 + \lambda^2 - 2abc\theta_1 - 2a\lambda s\theta_1 \\ l_2^2 = a^2 + b^2 + \lambda^2 - 2abc\theta_2 - 2b\lambda s\theta_2 \\ l_3^2 = a^2 + b^2 + \lambda^2 - 2abc\theta_1 + 2a\lambda s\theta_1 \\ l_4^2 = a^2 + b^2 + \lambda^2 - 2abc\theta_2 + 2b\lambda s\theta_2 \\ l_5^2 = \lambda^2 \end{cases} \tag{19}$$

3.2　速度分析

对式(19)两边分别对时间 t 求导，可得

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{X}} \tag{20}$$

其中

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$$

$$\dot{\boldsymbol{L}} = [\dot{l}_1 \quad \dot{l}_2 \quad \dot{l}_3 \quad \dot{l}_4 \quad \dot{l}_5]^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\lambda}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$G_{11} = -a(\lambda c\theta_1 - bs\theta_1) \qquad G_{12} = 0$$

$$G_{13} = \lambda - as\theta_1 \qquad G_{21} = 0$$

$$G_{22} = -b(\lambda c\theta_2 - as\theta_2) \qquad G_{23} = \lambda - bs\theta_2$$

$$G_{31} = a(\lambda c\theta_1 + bs\theta_1) \qquad G_{32} = 0$$

$$G_{33} = \lambda + as\theta_1 \qquad G_{41} = 0$$

$$G_{42}=b(\lambda c\theta_2+as\theta_2)\qquad G_{43}=\lambda+bs\theta_2$$
$$G_{51}=0\qquad G_{52}=0\qquad G_{53}=\lambda$$

当各分支连杆长度均不为零，即 $l_i\neq 0(i=1,2,3,4,5)$ 时，可得

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{X}} \tag{22}$$

3.3 仿真验证

基于 ADAMS 对机构进行运动学分析，验证理论模型的正确性。选定机构结构参数 $a=360$ mm，$b=220$ mm，建立机构的 ADAMS 仿真模型，如图 4 所示。



图 4 机构 ADAMS 仿真模型

Fig. 4 Simulation model in ADAMS

选取动平台姿态及位置运动轨迹为

$$\begin{cases}\theta_1=30\pi\sin(t\pi/180)/180\\ \theta_2=30\pi\sin(t\pi/180)/180\\ \lambda=480+t\end{cases} \tag{23}$$

基于式(19)计算机构分支杆长变化的理论曲线，与基于 ADAMS 软件得到的杆长变化仿真曲线进行对比，如图 5 所示，理论曲线与仿真曲线之间的偏差如图 6 所示。

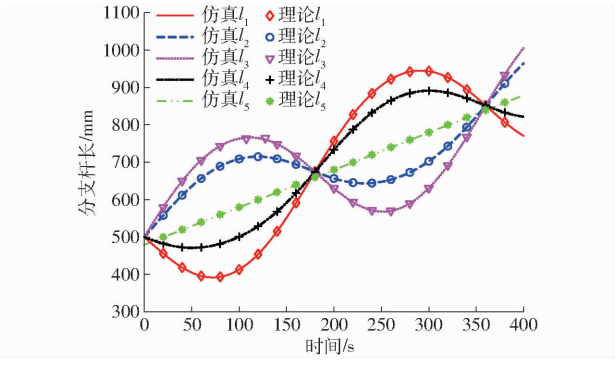

图 5 分支杆长变化曲线

Fig. 5 Variation curves of branch rod length

由图 5、6 可以看出，分支杆长变化理论计算结果与软件仿真结构基本相同，两者偏差最大为 5.7×10^{-5} mm，可以认为式(19)理论模型正确。

基于式(22)计算机构分支速度变化的理论曲线，与基于 ADAMS 软件得到的速度变化仿真曲线进行对比，如图 7 所示，理论曲线与仿真曲线之间的偏差如图 8 所示。

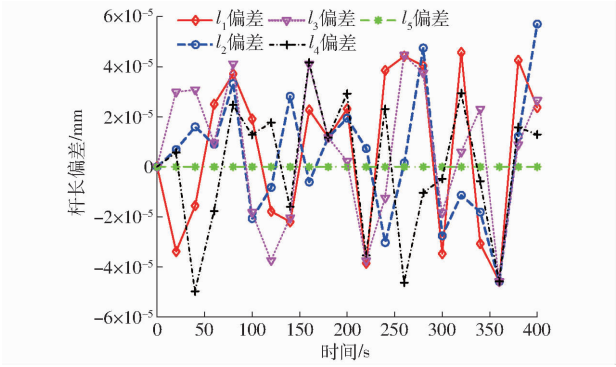

图 6 分支杆长偏差曲线

Fig. 6 Deviation curves of branch rod length

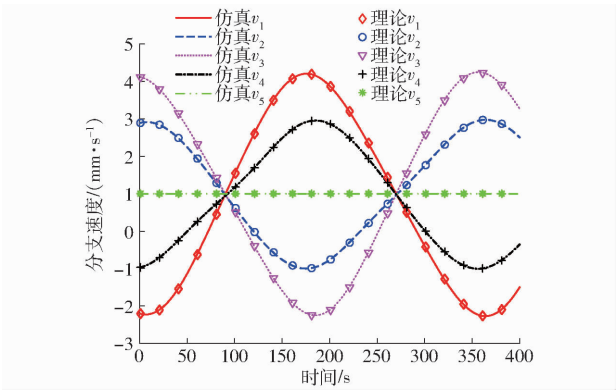

图 7 分支速度变化曲线

Fig. 7 Variation curves of branch velocity

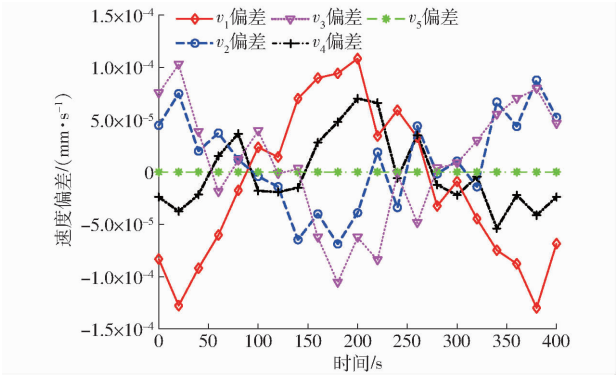

图 8 分支速度偏差曲线

Fig. 8 Deviation curves of branch velocity

由图 7、8 可以看出，分支速度变化的理论计算结果与软件仿真结构基本相同，两者偏差最大为 1.30×10^{-4} mm/s，可以认为式(22)的理论模型正确。

4 尺度优化

基于运动/力传递特性[40]对 2RPU + 2UPR + RPR 机构进行尺度优化。

4.1 运动/力传递特性建模

由于 2RPU + 2UPR + RPR 机构所有分支的 P 副均选为该分支的驱动关节，因此可以得到该机构的输入驱动螺旋系为

$$\begin{cases} \$_{A_1} = \$_{12} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad m_1 \quad n_1) \\ \$_{A_2} = \$_{23} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad d_2 \quad m_2 \quad n_2) \\ \$_{A_3} = \$_{32} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad m_3 \quad n_3) \\ \$_{A_4} = \$_{43} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad d_4 \quad m_4 \quad n_4) \\ \$_{A_5} = \$_{52} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad m_5 \quad n_5) \end{cases} \tag{24}$$

其中

$$m_1 = (-bc\theta_1 - \lambda s\theta_1 + a)/l_1$$
$$n_1 = (-bs\theta_1 + \lambda c\theta_1)/l_1$$
$$d_2 = (bc\theta_2 - a)/l_2$$
$$m_2 = (bs\theta_1 s\theta_2 - \lambda s\theta_1)/l_2$$
$$n_2 = (-bc\theta_1 s\theta_2 + \lambda c\theta_1)/l_2$$
$$m_3 = (bc\theta_1 - \lambda s\theta_1 - a)/l_3$$
$$n_3 = (bs\theta_1 + \lambda c\theta_1)/l_3$$
$$d_4 = (-bc\theta_2 + a)/l_4$$
$$m_4 = (-bs\theta_1 s\theta_2 - \lambda s\theta_1)/l_4$$
$$n_4 = (bc\theta_1 s\theta_2 + \lambda c\theta_1)/l_4$$
$$m_5 = -s\theta_1 \qquad n_5 = c\theta_1$$

由于分支传递力螺旋要过动平台与分支相连的铰链点中心，选取 RPU 分支的 U 副中心作为其分支传递力螺旋的特征点[41]，UPR 分支、RPR 分支的 R 副轴线与动坐标系 x 轴交点作为分支传递力螺旋特征点，因此可得该机构对动平台传递力螺旋系为

$$\begin{cases} \$_{T_1} = (0 \quad m_1 \quad n_1 \quad ; \quad -an_1 \quad 0 \quad 0) \\ \$_{T_2} = (d_2 \quad m_2 \quad n_2 \quad ; \quad 0 \quad -an_2 \quad am_2) \\ \$_{T_3} = (0 \quad m_3 \quad n_3 \quad ; \quad an_3 \quad 0 \quad 0) \\ \$_{T_4} = (d_4 \quad m_4 \quad n_4 \quad ; \quad 0 \quad an_4 \quad -am_4) \\ \$_{T_5} = (0 \quad m_5 \quad n_5 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0) \end{cases} \tag{25}$$

机构 2RPU + 2UPR + RPR 具有 3 个自由度，任意锁定 2 个分支的驱动关节，使机构只能进行一个维度的螺旋运动。由于该机构具有 5 个驱动分支，因此锁定分支选取的情况可以有 C_5^2 种，不同锁定分支与驱动分支的选取，及对应情况下动平台所受约束螺旋如表 1 所示。

基于表 1 中 10 种情况下动平台所受约束螺旋可以获得对应情况下动平台单自由度运动螺旋，记为 $\$_{o_g}(g = 1,2,\cdots,10)$。

在第 1 种情况下，满足

$$\begin{cases} \$_{o_1} \circ \$_{T_i} = 0 \quad (i = 1,2) \\ \$_{o_1} \circ \$^{r_j} = 0 \quad (j = 1,2,3) \end{cases} \tag{26}$$

进而可以得到该单自由度运动螺旋表达式为

表 1　锁定分支选取及动平台所受约束螺旋

Tab. 1　Selection of locking branch and constraint screw of moving platform

情形	驱动分支	被锁定分支	动平台所受约束螺旋
1	3,4,5	1,2	$\$^{r_1}, \$^{r_2}, \$^{r_3}, \$_{T_1}, \$_{T_2}$
2	2,4,5	1,3	$\$^{r_1}, \$^{r_2}, \$^{r_3}, \$_{T_1}, \$_{T_3}$
3	2,3,5	1,4	$\$^{r_1}, \$^{r_2}, \$^{r_3}, \$_{T_1}, \$_{T_4}$
4	2,3,4	1,5	$\$^{r_1}, \$^{r_2}, \$^{r_3}, \$_{T_1}, \$_{T_5}$
5	1,4,5	2,3	$\$^{r_1}, \$^{r_2}, \$^{r_3}, \$_{T_2}, \$_{T_3}$
6	1,3,5	2,4	$\$^{r_1}, \$^{r_2}, \$^{r_3}, \$_{T_2}, \$_{T_4}$
7	1,3,4	2,5	$\$^{r_1}, \$^{r_2}, \$^{r_3}, \$_{T_2}, \$_{T_5}$
8	1,2,5	3,4	$\$^{r_1}, \$^{r_2}, \$^{r_3}, \$_{T_3}, \$_{T_4}$
9	1,2,4	3,5	$\$^{r_1}, \$^{r_2}, \$^{r_3}, \$_{T_3}, \$_{T_5}$
10	1,2,3	4,5	$\$^{r_1}, \$^{r_2}, \$^{r_3}, \$_{T_4}, \$_{T_5}$

$$\$_{o_1} = ((e_1n_1 - f_1m_1)(aA + d_2C) \quad ae_1n_1A \quad af_1n_1A;$$
$$-an_1AC \quad -af_1n_1(aA + d_2C) \quad ae_1n_1(aA + d_2C))/E \tag{27}$$

其中

$$E = \sqrt{(e_1n_1 - f_1m_1)^2 (aA + d_2C)^2 + (ae_1n_1A)^2 + (af_1n_1A)^2}$$
$$A = e_1n_2 - f_1m_2 \qquad C = e_1z_5 - f_1y_5$$
$$f_1 = -m_5 \qquad e_1 = n_5$$

同理可以得到其他情形下动平台单自由度输出运动螺旋。

分别计算表 1 中 10 种不同情况下机构的输出传递性能指标 η_g 分别为

$$\eta_g = \frac{\sum_{i=1}^{5} \tau_i^g \left| \$_{T_i} \circ \$_{o_g} \right|}{\sum_{i=1}^{5} \tau_i^g \left| \$_{T_i} \circ \$_{o_g} \right|_{\max}}$$
$$(i = 1,2,3,4,5; g = 1,2,\cdots,10) \tag{28}$$

式中　τ_i^g——开关系数

当分支为驱动分支时 $\tau_i^g = 1$，当分支为被锁定分支时 $\tau_i^g = 0$。

因此可以计算该 2RPU + 2UPR + RPR 机构的输出传递性能为

$$\eta = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^{N} \eta_g \tag{29}$$

该机构输入分支性能指标 ψ_i 为

$$\psi_i = \frac{\left| \$_{A_i} \circ \$_{T_i} \right|}{\left| \$_{A_i} \circ \$_{T_i} \right|_{\max}} \quad (i = 1,2,3,4,5) \tag{30}$$

将机构输入分支性能指标 ψ_i 和输出传递性能指标 η 中的最小值定义为机构运动/力传递性能指标 γ，即

$$\gamma = \min(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \eta) \tag{31}$$

以结构参数 $a = 360$ mm，$b = 220$ mm，动平台中心在定坐标系 Z 向位置 $z = 300$ mm 为例，计算该机构不同角度转动时的运动/力传递性能，如图 9 所示。

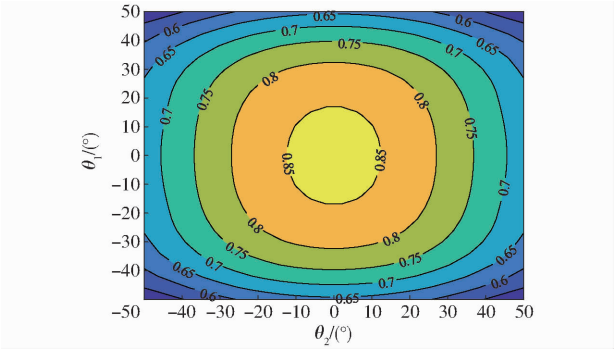

图 9 运动/力传递性能分布

Fig. 9 Example of motion/force transfer performance

由于 γ 只能衡量机构在特定位姿下的性能，只能作为局部传递指标，无法对机构进行整体评价，故采用全域传递指标[42]对机构进行整体评价。衡量冗余驱动并联机构的全域运动/力传递性能的指标可以采用优质工作空间比 σ_G 和优质传递性能分布率 ζ_G，计算式为

$$\sigma_G = \frac{\int_{S_G} \mathrm{d}W}{\int_S \mathrm{d}W} \tag{32}$$

$$\zeta_G = \frac{\int_{S_G} \gamma_G \mathrm{d}W}{\int_{S_G} \mathrm{d}W} \tag{33}$$

式中 S——机构考虑恒定位置下的全部姿态工作空间

S_G——机构指标 $\gamma > 0.7$ 的优质姿态工作空间[43]

γ_G——指标 γ 在优质姿态工作空间（$\gamma > 0.7$ 的区域）的分布

关于不同位置对机构优质姿态工作空间的影响将在后文中分析。此外，由于对于机构整体可达工作空间的分析，需要结合各关节运动约束条件，而相关约束条件需要在完成结构设计及选定驱动元件的条件下确定[44-46]。为简化运算，本文关于 S、S_G、γ_G 的计算仅考虑恒定位置下 $\theta_1 \in [-50°, 50°]$，$\theta_2 \in [-50°, 50°]$ 的姿态工作空间。

4.2 基于运动/力传递特性的尺度优化

采用优质工作空间比 σ_G 和优质传递性能分布率 ζ_G 两个指标对机构进行尺度优化设计。以定平台尺寸 a 和动平台尺寸 b 作为设计参数，通过参数优化使得机构的性能指标满足 $\sigma_G \geqslant 0.8$，$\zeta_G \geqslant 0.8$。初选 $a = 500$ mm，$b = 150$ mm，设动平台中心在定坐标系 Z 向位置 $z = 300$ mm，可计算得 $\sigma_G = 0.9822$，$\zeta_G = 0.7573$，机构全域性能指标较好，故假设尺寸 b 的搜索范围为 [50 mm, 300 mm]，尺寸 a 的搜索范围为 [350 mm, 600 mm]。

将全域性能指标 σ_G 和 ζ_G 在尺寸设计空间中进行计算，绘制成性能图谱，如图 10、11 所示，同时满足指标 σ_G 和指标 ζ_G 的优化尺寸可以作为机构最优尺寸，如图 12 所示。

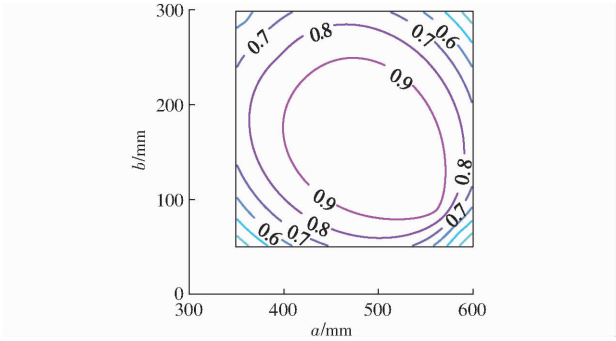

图 10 指标 σ_G 分布

Fig. 10 Distribution map of index σ_G

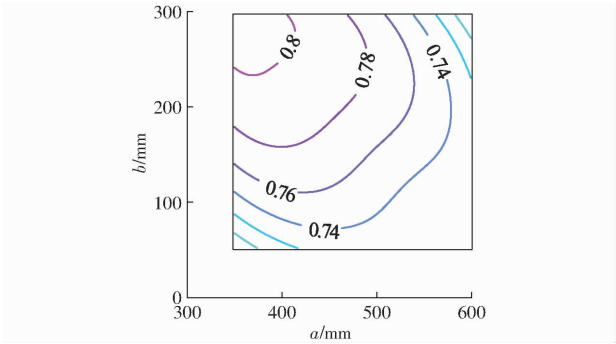

图 11 指标 ζ_G 分布

Fig. 11 Distribution map of index ζ_G

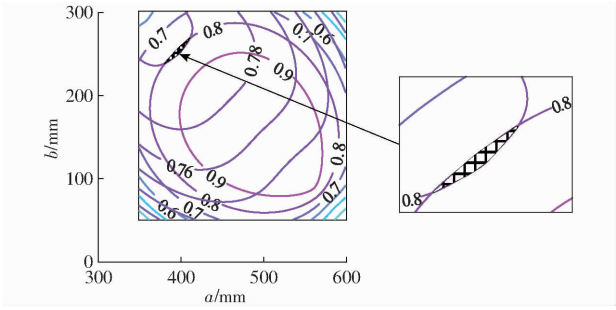

图 12 尺寸优化设计空间

Fig. 12 Design space of dimension optimization

对满足 $\sigma_G \geqslant 0.8$，$\zeta_G \geqslant 0.8$ 的尺寸空间内及附近随机选取 8 个坐标点，计算性能参数，结果如表 2 所示。

选取 $a = 397$ mm、$b = 253$ mm 作为优化后的结构参数，绘制其对应的运动/力传递性能分布，如图 13 所示。对比图 9 可以看出，机构动力/力传递性能得到明显优化。因此，本文选取 $a = 397$ mm、$b = 253$ mm 作为机构的尺度优化结果。

图 13 中关于机构运动/力传递性能分布的计算结果是基于机构 Z 向位移固定（即机构动平台中心在定坐标系 Z 向位置 $z = 300$ mm）获得的。通过改

表 2　优化尺寸参数及性能数值

Tab. 2　Optimized size parameters and performance values

序号	a/mm	b/mm	ζ_C	σ_C
1	395	255	0.801 2	0.792 9
2	396	254	0.800 8	0.798 8
3	396.5	253.5	0.800 3	0.804 7
4	397	253	0.800 4	0.804 7
5	398	252	0.800 0	0.810 7
6	400	250	0.799 8	0.816 6
7	425.75	224.25	0.792 1	0.911 2
8	403	247	0.798 5	0.834 3

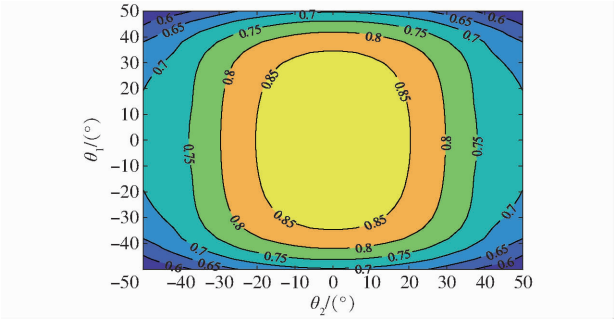

图 13　优化后运动/力传递性能分布

Fig. 13　Motion/force transfer performance after optimization

变位置坐标 z，可以得到机构运动/力传递性能分布随动平台沿 Z 向位移所引起的性能分布特性。选取 z 的变化范围为[200 mm，800 mm]，机构 2RPU + 2UPR + RPR 优质传递工作空间（指标 $\gamma > 0.7$）的分布如图 14 所示。由图 14 可得到，随着位置坐标 z 的不断增大，机构 2RPU + 2UPR + RPR 的优质工作空间逐渐减少。因此，在考虑机构运动/力传递性能时，机构运动轨迹需在图 14 所示包络空间内进行合理规划。

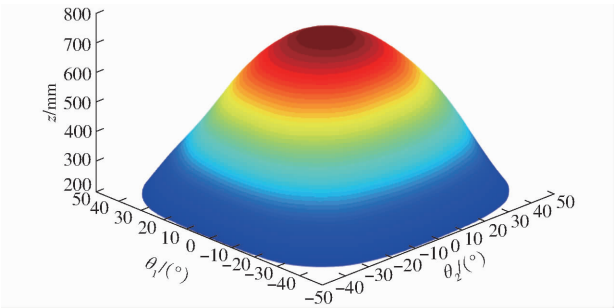

图 14　不同 Z 向位移的优质工作空间

Fig. 14　High-quality workspace with different Z-direction displacements

5　奇异性分析

5.1　基于雅可比矩阵的奇异性分析

基于机构的雅可比矩阵 $\boldsymbol{G}$ 可以分析获得机构的奇异特性。由于 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{R}^{5\times3}$ 是非方阵，故选择 $|\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}|$ 作为该机构奇异性评判标准，当满足 $|\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}| = 0$ 时的位姿点即为机构的奇异位形。

在选取机构在优化尺度 a = 397 mm、b = 253 mm 的条件下，分别选取 $-50° \leqslant \theta_1 \leqslant 50°$，$-50° \leqslant \theta_2 \leqslant 50°$，200 mm $\leqslant z \leqslant$ 800 mm，$|\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}|$ 在此范围内数值的分布如图 15 所示。在该范围内，参数 $|\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}|$ 的变化范围为 $[3.2\times10^{18}, 9.0\times10^{22}]$，不存在满足 $|\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}| = 0$ 的位姿点，故该机构在该范围内不存在奇异位形。

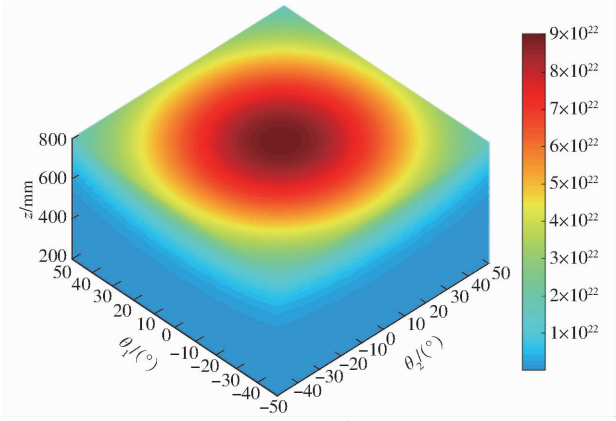

图 15　机构奇异性参数空间分布

Fig. 15　Spatial distribution of mechanism singularity parameters

5.2　基于运动/力传递性能的奇异性分析

基于机构的运动/力传递性能也可以获得机构的奇异特性。机构运动/力传递性能指标 γ 越大，机构运动/力传递性能越好，机构越远离奇异位形；机构运动/力传递性能指标 γ 越小，机构运动/力传递性能越差，机构越接近奇异位形。选取指标 $\gamma < 0.3$ 的区域作为机构的劣质工作空间，在该工作空间内机构离奇异位形较近。在优化尺度的条件下，机构在不同位置处的运动/力传递性能分布如图 16 所示。在 $-50° \leqslant \theta_1 \leqslant 50°$，$-50° \leqslant \theta_2 \leqslant 50°$，200 mm $\leqslant z \leqslant$ 800 mm 的整个工作空间内，运动/力传递性能指标 γ 的变化范围为[0.35，0.90]，不存在 $\gamma < 0.3$ 的区域，故该机构在上述工作空间内不存在劣质工作空间。

6　结束语

提出了一种新型 RPR 类的多冗余驱动 2R1T 三自由度并联机构 2RPU + 2UPR + RPR，该机构 5 个支链均包含驱动关节。基于螺旋理论建立了机构的运动螺旋系与约束螺旋系，分析了机构的自由度数量与性质；建立了机构的运动学模型，基于 ADAMS 软件仿真与理论数值计算对比的方法验证了运动学模型的正确性；推导了机构的传递螺旋系，建立了机构的局部性能指标与全域性能指标；基于优质工作空间和优质传递性能对机构进行了尺度优化，基于

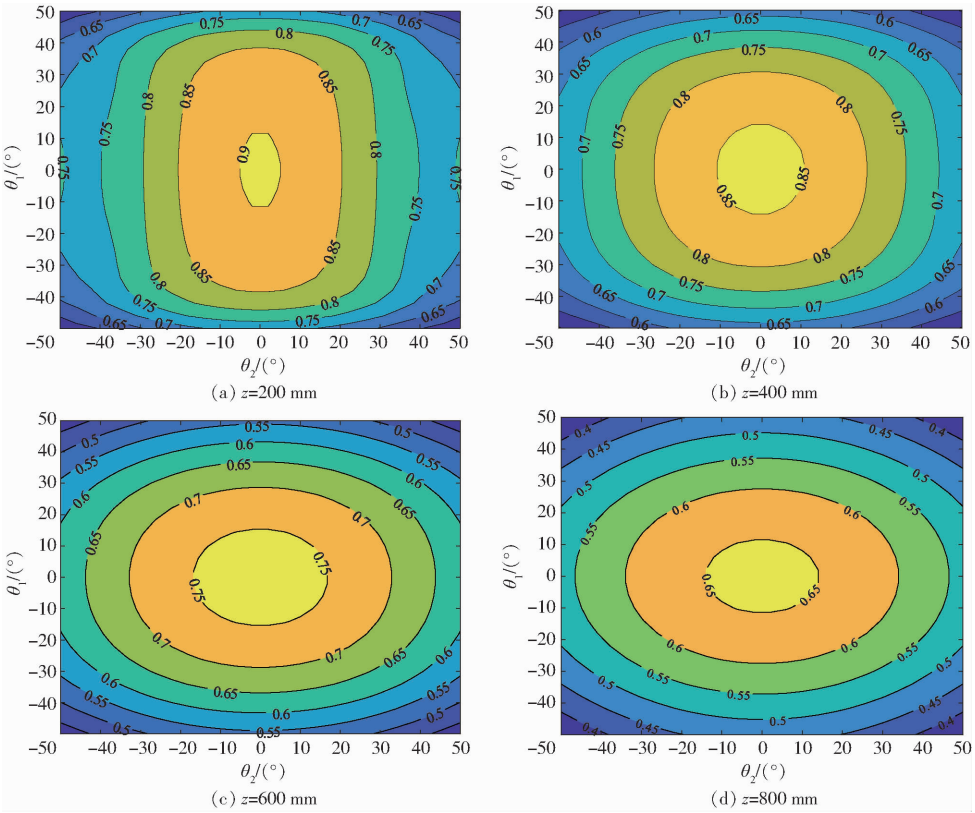

图 16 机构不同位置运动/力传递性能分布

Fig. 16 Movement/force transfer performance distribution at different locations of mechanism

数值算例选取了尺度优化结果,并获得了优化尺度下的机构传递性能图谱,分析了关键尺度参数对机构传递性能的影响;基于雅可比矩阵分析得到机构在优化尺度下工作空间内无奇异位形,基于运动/力传递性能分析得到机构无劣质工作空间,为该机构轨迹规划与应用提供理论依据。

参 考 文 献

[1] WAHL J. Articulated tool head: US6431802[P]. 2000-06-07.

[2] BI Z M, JIN Y. Kinematic modeling of Exechon parallel kinematic machine[J]. Robot Cim-Int. Manuf., 2011, 27: 186-193.

[3] SICILIANO B. The Tricept robot: inverse kinematics, manipulability analysis and closed-loop direct kinematics algorithm[J]. Robotica, 1999, 17: 437-445.

[4] HUANG T, LI M, ZHAO X, et al. Conceptual design and dimensional synthesis for a 3-DOF module of the TriVariant-a novel 5-DOF reconfigurable hybrid robot[J]. IEEE Trans. Robot, 2005, 21: 449-456.

[5] SUN T, SONG Y. Comparison between a 4-DOF hybrid module and Tricept module focusing on inverse kinematics and stiffness [C]// Proceedings of 2009 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO). New York: IEEE, 2009: 1597-1602.

[6] LIAN B, SUN T, SONG Y, et al. Stiffness analysis and experiment of a novel 5-DOF parallel kinematic machine considering gravitational effects[J]. International Journal of Machine Tool and Manufacturing, 2015, 95: 82-96.

[7] XIE F, LIU X J, LI T. A comparison study on the orientation capability and parasitic motions of two novel articulated tool heads with parallel kinematics[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2013, 5: 249103.

[8] 陈子明, 张扬, 黄坤, 等. 一种无伴随运动的对称两转一移并联机构[J]. 机械工程学报, 2016, 52(3): 9-17.
CHEN Ziming, ZHANG Yang, HUANG Kun, et al. Symmetrical 2R1T parallel mechanism without parasitic motion[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(3): 9-17. (in Chinese)

[9] WANG Feibo, CHEN Qiaohong, LI Qinchuan. Optimal design of a 2-UPR-RPU parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2015, 137(5): 054501.

[10] ZHANG D, XU Y, YAO J, et al. Analysis and optimization of a spatial parallel mechanism for a new 5-DOF hybrid serial-parallel manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 31(3): 60-68.

[11] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms[J]. Journal of Mechanism Design, 1983, 105: 705-712

[12] CHENG H, YIU Y, LI Z. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2003, 8(4): 483-491.

[13] SHANG W, CONG S H. Robust nonlinear control of a planar 2-DOF parallel manipulator with redundant actuation[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2014, 30: 597 – 604.

[14] MULLER A, HUFNAGEL T. Model-based control of redundantly actuated parallel manipulators in redundant coordinates[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2012, 60: 563 – 571.

[15] JEON D, KIM K, JEONG J, et al. A calibration method of redundantly actuated parallel mechanism machines based on projection technique[J]. CIRP Annals-Manufacturing Technology, 2010, 59(1): 413 – 416.

[16] MULLER A, MAISSER P. Generation and application of prestress in redundantly full-actuated parallel manipulators[J]. Multibody System Dynamics, 2007, 18: 259 – 275.

[17] WU J, WANG D, WANG L. A control strategy of a two degrees-of-freedom heavy duty parallel manipulator[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2015, 137: 061007 – 1 – 10.

[18] SAGLIA J, TSAGARAKIS N, DAI J, et al. A high-performance redundantly actuated parallel mechanism for ankle rehabilitation[J]. The International Journal of Robotics Research, 2009, 28(9): 1216 – 1227.

[19] ZHANG D, GAO Z. Forward kinematics, performance analysis, and multi-objective optimization of a bio-inspired parallel manipulator[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2012, 28(4): 484 – 492.

[20] DING B, CAZZOLATO B, GRAINGER S, et al. Active preload control of a redundantly actuated Stewart platform for backlash prevention[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2015, 32: 11 – 24.

[21] 赵福群, 郭盛, 徐梓淳, 等. 基于冗余并联机构的高性能机床设计与分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2019, 50(1): 67 – 74.
ZHAO Fuqun, GUO Sheng, XU Zichun, et al. Design and analysis of high performance machine tool based on redundant parallel mechanism[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2019, 50(1): 67 – 74. (in Chinese)

[22] ZHANG H, FANG H, ZHANG D, et al. Forward kinematics and workspace determination of a novel redundantly actuated parallel manipulator[J]. International Journal of Aerospace Engineering, 2019, 3: 1 – 14.

[23] WANG G, CONG M, XU W, et al. A biomimetic chewing robot of redundantly actuated parallel mechanism[J]. Industrial Robot-An International Journal, 2015, 42(2): 103 – 109.

[24] CHENG C, XU W, SHANG J. Optimal distribution of the actuating torques for a redundantly actuated masticatory robot with two higher kinematic pairs[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 79(2): 1235 – 1255.

[25] ZHAO Y, GAO F. Dynamic performance comparison of the 8PSS redundant parallel manipulator and its non-redundant counterpart-the 6PSS parallel manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44: 991 – 1008.

[26] 梁栋. 多驱动模式冗余并联机器人设计、多体动力学与控制研究[D]. 天津: 天津大学, 2017: 19 – 23.
LIANG Dong. Research on design, multibody dynamics and control of redundant parallel robot with multiple actuation modes [D]. Tianjin: Tianjin University, 2017: 19 – 23. (in Chinese)

[27] BOUDREAU R, MAO X, PODHORODEKI R. Backlash elimination in parallel manipulators using actuation redundancy[J]. Robotica, 2011, 30(3): 379 – 388.

[28] SHAHIDI S, LORENZ M, EDDINE S, et al. A survey on precision of redundantly actuated delta-type parallel kinematic Mechanisms[C]//2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Canada, 2017: 5376 – 5381.

[29] 周昌春, 方跃法, 叶伟, 等. 6 – RRS 超冗余驱动飞行模拟器的性能分析[J]. 机械工程学报, 2016, 52(1): 34 – 40.
ZHOU Changchun, FANG Yuefa, YE Wei, et al. Performance analysis of 6 – RRS over-redundant actuation flight simulator [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(1): 34 – 40. (in Chinese)

[30] 王向阳, 郭盛, 曲海波, 等. 并联机构驱动力优化配置方法及应用研究[J]. 机械工程学报, 2019, 55(1): 32 – 41.
WANG Xiangyang, GUO Sheng, QU Haibo, et al. Optimal allocation method of parallel mechanism and its application[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(1): 32 – 41. (in Chinese)

[31] 王冰, 周志权, 聂旭萌. 三自由度平面驱动冗余并联机器人刚度性能与尺寸关系研究[J]. 机床与液压, 2015, 43(3): 34 – 37.
WANG Bing, ZHOU Zhiquan, NIE Xumeng, et al. Study of relationship between stiffness and link lengths of planar three degree-of-freedom parallel manipulator with actuation redundancy[J]. Machine Tool & Hydraulics, 2015, 43(3): 34 – 37. (in Chinese)

[32] 杜烨, 李开明. 双冗余驱动并联机床工作空间的扩大与规整[J]. 机床与液压, 2018, 46(11): 11 – 15, 20.
DU Ye, LI Kaiming. Enlargement and regularity of workspace of parallel machine tool with two redundant actuation[J]. Machine Tool & Hydraulics, 2018, 46(11): 11 – 15,20. (in Chinese)

[33] SUMIN P, JEHYOK K, JAY J, et al. Optimal dimensioning of redundantly actuated mechanism for maximizing energy efficiency and workspace via Taguchi method[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C-Journal of Mechanical Engineering Science, 2017, 231(2): 326 – 340.

[34] WU J, ZHANG B, WANG L. Optimum design and performance comparison of a redundantly actuated solar tracker and its nonredundant counterpart[J]. Solar Energy, 2016, 127: 36 – 47.

[35] LIU H, HUANG T, KECSKEMETHY A, et al. Force/motion transmissibility analyses of redundantly actuated and

overconstrained parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 109: 126 - 138.

[36] LI Q, ZHANG N, WANG F. New indices for optimal design of redundantly actuated parallel manipulators[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2017, 9: 011007 - 3 - 10.

[37] 刘艳敏. 几类少自由度冗余驱动并联机构综合及优选研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2016: 116 - 122.
LIU Yanmin. Synthesis and optimization of some kinds of lower-mobility redundant actuation parallel mechanisms[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2016: 116 - 122. (in Chinese)

[38] 张飞, 张彬, 周烽, 等. 面向自动仓储的绳索牵引并联机器人构型选择与参数优化[J]. 机械工程学报, 2020, 56(1): 1 - 8.
ZHANG Fei, ZHANG Bin, ZHOU Feng, et al. Configuration selection and parameter optimization of redundantly actuated cable-driven parallel robots[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(1): 1 - 8. (in Chinese)

[39] CHAI X, ZHANG N, HE L, et al. Kinematic sensitivity analysis and dimensional synthesis of a redundantly actuated parallel robot for friction stir welding[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2020, 33(1): 1 - 10.

[40] WU C, LIU X, WANG L, et al. Optimal design of spherical 5R parallel manipulators considering the motion/force transmissibility[J]. Journal of Mechanical Design, 2010, 132(3): 031002.

[41] ZHANG H, FANG H, JIANG B, et al. Motion-force transmissibility characteristic analysis of a redundantly actuated and overconstrained parallel machine[J]. International Journal of Automation and Computing, 2019, 16(2): 150 - 162.

[42] LI Q, ZHANG N, WANG F. New indices for optimal design of redundantly actuated parallel manipulators[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2017, 9(1): 011007.

[43] WANG J, WU C, LIU X J. Performance evaluation of parallel manipulators: motion/force transmissibility and its index[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(10): 1462 - 1476.

[44] 李菊, 朱忠颀, 沈惠平, 等. 三平移并联机构拓扑设计与运动学分析[J]. 农业机械学报, 2022, 53(9): 425 - 433, 442.
LI Ju, ZHU Zhongqi, SHEN Huiping, et al. Topological design and kinematic analysis of novel three-translation parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(9): 425 - 433, 442. (in Chinese)

[45] 李菊, 朱忠颀, 沈惠平, 等. 两支链三平移并联机构动力学分析与性能优化[J]. 农业机械学报, 2022, 53(10): 412 - 422, 445.
LI Ju, ZHU Zhongqi, SHEN Huiping, et al. Dynamics analysis and performance optimization of two-chain and three-translation parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(10): 412 - 422, 445. (in Chinese)

[46] 梁栋, 刘军, 畅博彦, 等. 末端铰接三平动并联机构设计与性能优化[J]. 农业机械学报, 2022, 53(10): 446 - 458.
LIANG Dong, LIU Jun, CHANG Boyan, et al. Design and performance optimization of 3 DOF translational parallel mechanism with hinged end structure[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(10): 446 - 458. (in Chinese)