

具有多模式球面4R机构结构参数研究

刘伟^{1,2} 刘宏昭¹ 胡旭宇¹

(1. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 西安 710048; 2. 西安工程大学机电工程学院, 西安 710048)

摘要: 基于代数几何理论,结合双变量代数方程可因式分解的判定条件,对球面4R机构运动学方程进行研究,提出一种确定具有多模式球面4R机构结构参数的分析方法。可得5类具有约束奇异位形的球面4R机构,其中多模式球面4R机构可分为4类:具有定轴线和变轴线2种转动运动模式,具有2种变轴线转动运动模式,具有1种变轴线和2种定轴线3种转动运动模式,具有4种定轴线转动运动模式,总共4大类多模式机构。对球面4R机构连杆在约束奇异位形下的瞬时转动轴线进行计算,可得球面4R机构处于约束奇异位形时,其连杆的瞬时转动轴线均不重合,瞬时转动轴线均为2条。具有约束奇异位形且只具有一种运动模式的球面4R机构处于约束奇异位形时,虽然其运动可能产生分岔,但其运动模式不一定发生改变。运动分岔机构与多模式机构不能等同。使用该方法对球面4R机构的运动模式进行分析,研究多模式单环单自由度机构结构参数对其运动模式的影响,对拓展多模式机构构型具有一定的理论价值。

关键词: 运动模式; 准素分解; 球面4R机构; 变轴线转动

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2022)03-0440-09

OSID:



Structural Parameters of Spherical 4R Mechanism with Multiple Modes

LIU Wei^{1,2} LIU Hongzhao¹ HU Xuyu¹

(1. Faculty of Mechanical and Precision Instrument Engineering,
Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China

2. School of Electrical and Mechanical Engineering, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract: Based on the theory of algebraic geometry, the kinematic equation of spherical 4R mechanism was studied in combination with the judging condition of factorization of bivariate algebraic equation, and an analytical method for determining the structural parameters of spherical 4R mechanism with multi-mode was proposed. Five kinds of spherical 4R mechanisms with constrained singular configurations were found, among which the multi-mode spherical 4R mechanisms can be divided into four types: two rotational motion modes with fixed axis and variable axis, two rotational motion modes with variable axis, one rotational motion mode with variable axis and two rotational motion modes with fixed axis, and four rotational motion modes with fixed axis. The instantaneous rotation axes of spherical 4R linkage in constrained singular configuration were calculated. When the spherical 4R mechanism was in the constrained singular configuration, the instantaneous rotation axes of its connecting rod were not coincident. There were two instantaneous rotation axes of spherical 4R linkage in constrained singular configuration. When the spherical 4R mechanism with constrained singular configuration and only one motion mode was in constrained singular configuration, its motion mode did not necessarily change, although its motion may bifurcate. Bifurcation mechanism and multi-mode mechanism were not equal. Using this method, the motion modes of spherical 4R mechanism were analyzed comprehensively, which had certain theoretical value for studying the influence of structural parameters of multi-mode single loop single degree of freedom mechanism on its motion modes and expanding the type of multi-mode mechanism.

Key words: motion mode; prime decomposition; spherical 4R mechanism; variable axis rotation

收稿日期: 2021-03-24 修回日期: 2021-04-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(51275404)

作者简介: 刘伟(1985—),男,博士生,西安工程大学讲师,主要从事机构设计研究,E-mail: liuweilw@xpu.edu.cn

通信作者: 刘宏昭(1954—),男,教授,主要从事机械动力学和机构学研究,E-mail: liu-hongzhao@163.com

0 引言

多模式并联机构和多模式混联机构中含具有多模式的单环结构。一些并联机构中含有的多模式单环结构使得并联机构具有多种运动模式。将机构的结构参数看作变量,对单环机构^[1]运动模式进行分析时,现有的运动模式分析方法将遇到较大的挑战^[2]。多模式单环机构是多模式多环机构的基础,对多模式单环机构的运动模式分析时,将机构的结构参数作为变量,研究结构参数对多模式机构运动模式的影响,是多模式机构创新设计需要解决的重要问题之一。

多模式机构运动模式分析方法基本可分为6类:基于旋量理论、基于数值计算方法、基于高阶运动学分析、基于几何图像方法、基于位移流形理论、基于代数几何方法。①基于旋量理论方法。在机构多运动模式分析时,需要对机构的每种运动模式的运动旋量进行求解^[3]。结合给定结构参数,使用旋量理论对其进行运动模式分析比较简便有效,使用该理论研究结构参数对机构运动模式影响的文献较为少见。②基于数值计算方法。过约束机构在折叠结构中应用广泛^[4-5],设计时往往需要对机构在折叠过程中是否发生运动模式变换进行判断。数值计算方法在过约束机构运动学方程不具有解析解时,给定结构参数后,对其运动模式的研究可得到理想的结果。当机构结构参数作为变量时,需要进行大量的计算,不易全面分析结构参数对机构运动模式的影响。③基于高阶运动学方法。基于高阶运动学对机构的多种运动模式进行研究^[6-8],可得一些具有新型运动特征的机构,该方法主要对具有结构参数确定的机构分析其高阶运动特征,主要是通过高阶运动学分析机构的奇异位形运动特性。④基于几何图像方法。根据连杆输出点的空间位置,通过几何图像法对多模式机构模式进行分析^[9-10]。通过几何图像分析时,需要先确定机构结构参数,目前多使用该方法在分析具有多种移动运动模式机构所具有的运动模式。然而,机构空间运动较移动运动更为复杂,并且机构结构参数变换时,不容易使用该方法全面研究结构参数对机构运动模式的影响。⑤基于位移流形理论方法。位移流形理论在对机构运动模式分析时的能力较为有限^[11-12],主要是通过机构不同位形下,运动副之间的几何关系,结合机构奇异位形对机构运动模式进行分析。位移流形理论下运动链的表达式中不含有机构的结构参数信息,因此目前这方面的相关研究较少。⑥基于代数几何方

法。使用代数几何方法对机构运动模式进行分析,主要是将机构的运动学方程转换为代数方程后,对其对应的仿射簇进行相应的准素分解。文献[13]使用输入变量与输出变量的代数方程系数对平面4R机构进行了分类,将其结构参数与八面体空间中的点建立一个映射关系。文献[14]使用对偶四元数描述机构的约束方程,克服了使用万能代换求解时,需要对关节转角为 180° 时,单独进行分析的繁琐计算过程。文献[15]分析一般面对称6R机构的运动学方程,得到其具有多种运动模式时,机构参数所满足的条件,对这类6R机构的运动特性进行了全面分析。该方法研究了机构结构参数对一类6R机构运动模式的影响,文中指出存在一部分具有多种运动模式的该类6R机构,并不符合其提出的多运动模式判断依据。文献[16]使用代数计算软件,针对具有不同结构参数的3RER具有的运动模式进行全面分析。代数几何方法在机构运动模式分析时,一般能取得比较理想的结果。然而,由于机构运动学方程和机构结构参数数目的增多,使得机构运动模式分析困难。一方面,变量数目一定程度上决定了运动模式分析的复杂程度;另一方面,复杂的运动模式分析对软件计算^[17]的依赖程度较高,文献[18]研究表明,通过软件计算分析机构运动模式时,需要对计算结果进行特殊的分析处理才能得到正确结果,而这个过程较繁琐。

综上所述,基于旋量理论、数值计算、高阶运动学分析、位移流形理论,尚不能全面分析机构结构参数对其运动模式的影响。虽然现有文献中基于代数几何方法可以全面分析机构结构参数对机构运动模式的影响,但是该方法尚不能对机构实际具有的运动模式结果进行全面解释。使用软件分析结构参数对机构运动模式的影响计算量太大,且有时需要对计算结果进行分析才能得到正确结果。

本文使用代数几何理论,基于多项式可因式分解的条件,结合机构的运动模式,提出一种分析结构参数对球面4R机构运动模式影响的方法。

1 确定具有多种运动模式球面4R机构结构参数的方法

一般情况下,将机构运动学方程转换为代数方程后,当机构构型一定时,机构运动学方程的形式和结构基本确定,即运动学代数方程关于关节变量的各个多项式组成即可确定。不同的机构结构参数代入机构运动学方程,从而使得关节变量多项式系数发生改变。如果机构运动学代数方程可以在实数范围内进行准素分解^[19],则该机构具

有多种运动模式。那么可以根据机构运动学代数方程分析得到可准素分解的条件,求解代数方程中与机构结构参数有关的系数,从而设计具有多种运动模式的机构。文献[20]指出,对于一个代数方程而言,对该代数方程对应的多项式进行因式分解,即是一种特殊的准素分解。文献[19]给出了判断代数方程是否可以因式分解的依据,即该代数方程可写成有理分式的参数方程时,该代数方程可因式分解。

综上所述,可对球面4R机构对应的代数方程判断其是否可转换为有理分式表达的参数方程,对其运动模式进行分析。

使用因式分解方法对多运动模式球面4R机构结构参数对其运动模式影响的分析步骤为:

(1)根据球面4R机构的4个连杆的机构结构参数建立运动学方程

$$f(\theta_i, \theta_j) = 0 \quad (1)$$

(2)使用万能代换替换球面4R机构转动副关节变量 θ_i 、 θ_j 的三角函数,化简得到关于关节变量 θ_i 、 θ_j 的代数方程为

$$f'(t_i, t_j) = 0$$

其中 $t_i = \tan(\theta_i/2)$ $t_j = \tan(\theta_j/2)$

(3)将球面4R机构代数运动学方程中各多项式系数,分别置零后组合,得到结构参数满足的公式。

(4)将步骤(3)得到结构参数满足的关系,代入步骤(1)中球面4R机构的运动学方程,分析任意关节变量 $\theta_i = \pi$ 时的任意组合下机构具有的运动模式。

(5)将步骤(3)得到的不同结构参数满足的公式,代入步骤(2)中球面4R机构的运动学代数方程,判断该方程是否可进行因式分解,从而分析机构具有的运动模式。

(6)结合步骤(4)、(5)的结果,得到球面4R机构具有不同运动模式时,结构参数满足的关系。

2 球面4R机构运动学方程与多模式结构参数的关系

2.1 球面4R机构运动学方程

如图1所示球面4R机构,4个转动副 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 轴线相交于点 o , α_{ij} 为转动副 R_i 转动轴线 z_i 绕轴线 y'_i 转动到与轴线 z_{i+1} 重合时的角度。 θ_i 为轴线 x_i 绕轴线 z_i 转动到与轴线 x'_i 重合时的角度。可选取转动副 R_1 、 R_4 的关节变量转角 θ_1 、 θ_4 建立运动学方程。文献[21]给出的球面4R机构的运动学计算公式为

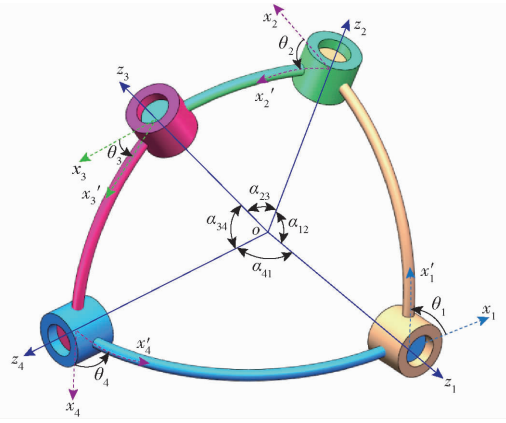


图1 球面4R机构结构参数

Fig.1 Structural parameters of spherical 4R mechanism

$$-s_{12}s_{41}c_{34}c_1 - s_{12}c_{41}s_{34}c_1c_4 + s_{12}s_{34}s_1s_4 - c_{12}s_{41}s_{34}c_4 + c_{12}c_{41}c_{34} - c_{23} = 0 \quad (2)$$

式(2)中 s_{ij} 、 c_{ij} 表示 α_{ij} 的正弦和余弦, s_i 、 c_i 表示转角 θ_i 的正弦和余弦。式(2)为第1节中步骤(1)中 $f(\theta_i, \theta_j) = 0, i = 1, j = 4$ 。即式(2)是关于关节变量 θ_1 、 θ_4 的运动学方程。

2.2 球面4R机构运动学方程转变为代数方程

使用万能代换, $t_1 = \tan(\theta_1/2)$, $t_4 = \tan(\theta_4/2)$,将球面4R运动学方程式(2)整理得到

$$A(t_1t_4)^2 + Bt_4^2 + Ct_1^2 + Dt_1t_4 + E = 0 \quad (3)$$

其中

$$A = s_{12}s_{41}c_{34} - s_{12}c_{41}s_{34} + c_{12}s_{41}s_{34} + c_{12}c_{41}c_{34} - c_{23} = c_{34}\cos(\alpha_{12} - \alpha_{41}) - s_{34}\cos(\alpha_{12} - \alpha_{41}) - c_{23} = \cos(\alpha_{12} - \alpha_{41} + \alpha_{34}) - c_{23}$$

$$B = -s_{12}s_{41}c_{34} + s_{12}c_{41}s_{34} + c_{12}s_{41}s_{34} + c_{12}c_{41}c_{34} - c_{23} = s_{12}\sin(\alpha_{34} - \alpha_{41}) + c_{12}\cos(\alpha_{34} - \alpha_{41}) - c_{23} = \cos(\alpha_{12} + \alpha_{41} - \alpha_{34}) - c_{23}$$

$$C = s_{12}s_{41}c_{34} + s_{12}c_{41}s_{34} - c_{12}s_{41}s_{34} + c_{12}c_{41}c_{34} - c_{23} = s_{12}\sin(\alpha_{34} + \alpha_{41}) + c_{12}\cos(\alpha_{34} + \alpha_{41}) - c_{23} = \cos(\alpha_{12} - \alpha_{41} - \alpha_{34}) - c_{23}$$

$$D = 4s_{12}s_{34}$$

$$E = -s_{12}s_{41}c_{34} - s_{12}c_{41}s_{34} - c_{12}s_{41}s_{34} + c_{12}c_{41}c_{34} - c_{23} = -s_{12}\sin(\alpha_{34} + \alpha_{41}) + c_{12}\cos(\alpha_{34} + \alpha_{41}) - c_{23} = \cos(\alpha_{12} + \alpha_{41} + \alpha_{34}) - c_{23}$$

式(3)为第1节步骤(2)中的 $f'(t_i, t_j) = 0$ 。

2.3 代数方程多项式系数分别置零进行组合

不考虑转动副 R_1 和 R_2 以及 R_3 和 R_4 轴线重合,机构中存在局部转动自由度的情况,因而式(3)中 $D \neq 0$ 。

当 $\alpha_{12} - \alpha_{41} + \alpha_{34} + \alpha_{23} = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$)时,式(3)中 A 为零,该机构自由度为零,这种情况舍去不做分析。同理,可根据式(3),当 $A = 0, B = 0, C = 0, E = 0$ 时分别可得到

$$\begin{cases} a_{12} - a_{41} + a_{34} - a_{23} = 2k\pi \\ a_{12} + a_{41} - a_{34} - a_{23} = 2k\pi \\ a_{12} - a_{41} - a_{34} + a_{23} = 2k\pi \\ a_{12} + a_{41} + a_{34} + a_{23} = 2k\pi \end{cases} \quad (4)$$

球面4R机构处于约束奇异位形时,4个转动副轴线共面。关节转角 θ_1 、 θ_4 只存在4种情况($\theta_1 = 0^\circ, \theta_4 = 0^\circ$; $\theta_1 = 0^\circ, \theta_4 = 180^\circ$; $\theta_1 = 180^\circ, \theta_4 = 0^\circ$; $\theta_1 = 180^\circ, \theta_4 = 180^\circ$)时,球面4R机构处于约束奇异位形,此时机构的运动模式将具有改变的可能性。将上述4组数值,代入式(2),变换为式(3)的代数方程,分别得到 $E=0, B=0, C=0, A=0$ 。即当该方程系数 A, B, C, E 分别为零时,球面4R机构具有4个转动轴线在同一平面的机构奇异位形。

将式(3)系数 A, B, C, E 分别置零进行组合,舍去机构自由度为零的情况,即 $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$,该15种情况分别为:

(1)组合 C_4^1 的4种情况为:① $A=0$ 。② $B=0$ 。③ $C=0$ 。④ $E=0$ 。

(2)组合 C_4^2 的6种情况为:⑤ $A=B=0$ 。⑥ $A=C=0$ 。⑦ $A=E=0$ 。⑧ $B=C=0$ 。⑨ $B=E=0$ 。⑩ $C=E=0$ 。

(3)组合 C_4^3 的4种情况为:⑪ $A=B=C=0$ 。⑫ $A=B=E=0$ 。⑬ $A=C=E=0$ 。⑭ $B=C=E=0$ 。

(4)组合 C_4^4 的1种情况为:⑮ $A=B=C=E=0$ 。

由于转动副 R_1, R_4 均连接机架,可将分别满足条件 $B=0$ 和条件 $C=0$ 的机构看作一种机构。同理,⑤和⑥、⑨和⑩、⑫和⑬同为一类机构。因而总共可分为11种情况。

3 不同结构参数球面4R机构运动模式分析

根据文献[19]可知,当一个代数方程转变为参数方程后,参数方程均为有理代数分式时,则该代数方程不能被因式分解。从而可对球面4R机构运动学代数方程是否可以因式分解进行判断,进而得到球面4R机构的运动模式。

3.1 球面4R机构运动模式(1号 $A=0$)

当 $a_{12} - a_{41} + a_{34} - a_{23} = 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$),且 $\theta_1 = \pm\pi$ 或 $\theta_4 = \pm\pi$ 时,根据式(2)得到, θ_4 或 θ_1 为定值,此时机构不具有固定轴线转动运动模式。

当 $a_{12} - a_{41} + a_{34} - a_{23} = 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$),且 $\theta_1 \neq \pm\pi$ 且 $\theta_4 \neq \pm\pi$ 时,此时式(3)中的系数 A 为零,且 B, C, D, E 均不为零时,将方程式(3)看作 t_4 的一元二次方程,得到

$$t_4 = \frac{-Dt_1 \pm \sqrt{(D^2 - 4BC)t_1 - 4BE}}{2B} \quad (5)$$

其中 $D^2 - 4BC = 16s_{12}s_{34}s_{41}s_{23}$

式(5)可以分解时,需要 t_4 的表达式可以写成有理分式的形式,需满足 $D^2 - 4BC > 0, BE = 0$,或 $D^2 - 4BC = 0, BE < 0$,可得

$$t_4 = \begin{cases} \frac{-Dt_1 \pm t_1 \sqrt{D^2 - 4BC}}{2B} & (D^2 - 4BC > 0, BE = 0) \\ \frac{-Dt_1 \pm \sqrt{-4BE}}{2B} & (D^2 - 4BC = 0, BE < 0) \end{cases}$$

此时机构的运动学方程可因式分解。

然而,当球面4R机构结构参数仅使得式(3)中 A 为零,则 $BE, D^2 - 4BC$ 不为零。因而,此时式(3)不能写成两个有理分式相乘的形式,可知此时式(3)不能分解因式,当球面4R机构结构参数仅满足 A 为零,当 $\theta_1 \neq \pm\pi$ 且 $\theta_4 \neq \pm\pi$ 时,机构只具有一种变轴线转动运动模式。

现以结构参数使得式(3)中 A 为零的球面4R机构为例,对其运动模式进行分析。机构的结构参数 $\alpha_{41} = 90^\circ, \alpha_{12} = 60^\circ, \alpha_{23} = 30^\circ, \alpha_{34} = 60^\circ$,该结构参数满足 $a_{12} - a_{41} + a_{34} - a_{23} = 2k\pi$,且该机构结构参数不满足式(4)中的其他几个关系式,如图2球面4R机构3维模型所示。由图2d可知,当机构处于约束奇异位形时,其存在运动分岔的可能性,但当使得 θ_4 随 θ_1 变化的斜率不发生突变时,机构将通过该约束奇异位形且保持运动不发生分岔。

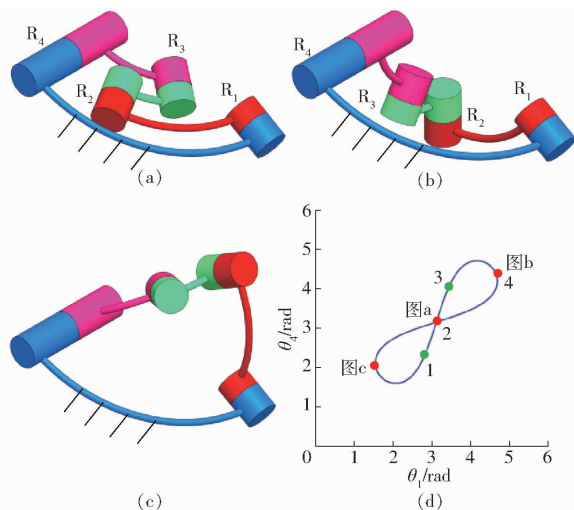


图2 球面1号4R机构位形

Fig. 2 Configuration of No. 1 spherical 4R mechanism

当机构从图2d中点1机构位形,保持 θ_4 随 θ_1 变化的速率与点1、2、3所在曲线斜率相同时,该机构能动态通过点2对应的机构约束奇异位形,到达点3所对应的机构位形,即该机构可以通过点2处约束奇异位形而不发生运动分岔。实际上当机构速度不为零,从图2d点1对应位形运动到点2对应位形时, θ_4 随 θ_1 变化的速率与点1、2所在曲线斜率相

同。则当机构从点1所在机构位形运动到点2对应位形时,速度不为零时,即可通过点2所示约束奇异位形,且不发生运动分岔现象。同理,当机构从点3所示位形,运动到点4所示机构死点位形时,使得 θ_1 的速度不为零时,机构可通过该死点位置。可以发现,在机构的点2对应的约束奇异位形和点4对应的死点位形下,机构均可动态通过,最终可到达所有的机构位形。

同理可知当式(3)中的系数 $B=0$,或 $C=0$,或 $E=0$ 时,球面4R机构只具有1种变轴线转动运动模式,且结构参数满足这些条件的球面机构均与图2所示机构类似,机构可动态通过约束奇异位形,可运动到机构所有的位形。

3.2 球面4R机构运动模式(5号 $A=B=0$)

当 $a_{12} - a_{41} + a_{34} - a_{23} = 2k\pi$, $a_{12} + a_{41} - a_{34} - a_{23} = 2k\pi$, $\theta_1 = \pm\pi$ 时,将机构结构参数代入式(2), θ_4 为定值,此时机构不具有定轴转动模式。 $\theta_4 = \pm\pi$ 时,将机构的结构参数代入式(2),整理得到恒等方程 $0=0$ 。可知 θ_1 可任意取值,机构具有一种以转动副 R_1 为轴线的定轴转动运动模式。

当 $\theta_1 \neq \pm\pi$, $\theta_4 \neq \pm\pi$ 时, A, B 为零, C, D, E 均不为零,整理式(3)得到的方程为二元二次方程。将该方程看作 t_1 的一元二次方程,得到

$$Ct_1^2 + Dt_1t_4 + E = 0 \quad (6)$$

其中 $t_1 = \frac{-Dt_4 \pm \sqrt{D^2t_4^2 - 4CE}}{2C}$

$Ct_1^2 + Dt_1t_4 + E = 0$ 可进行因式分解,即需满足 $CE=0$ 或 $D=0$,且 $CE < 0$ 。

然而,当球面4R机构结构参数仅满足 A, B 为零时, CE, D 均不为零,因而式(6)不能分解因式。从而,根据运动模式的定义可知,当球面4R机构结构参数仅满足 A, B 为零,当 $\theta_1 \neq \pm\pi$, $\theta_2 \neq \pm\pi$ 时,连杆的瞬时轴线在随 t_1, t_4 不断变化,因而此时机构只具有一种变轴线运动模式。

现以结构参数使得式(3)中 A, B 为零的球面4R机构为例,对其运动模式进行分析。如图3球面4R机构的3维模型所示,机构的结构参数 $\alpha_{41} = 90^\circ$, $\alpha_{12} = 45^\circ$, $\alpha_{23} = 45^\circ$, $\alpha_{34} = 90^\circ$,该结构参数满足式(4)中的关系式 $a_{12} - a_{41} + a_{34} - a_{23} = 2k\pi$, $a_{12} + a_{41} - a_{34} - a_{23} = 2k\pi$ 。从图3d可知,当机构处于约束奇异位形时,其存在运动分岔的可能性,但当使得 θ_4 随 θ_1 变化的斜率不发生突变时,机构将通过该约束奇异位形且保持运动模式不发生改变。

当机构从图3d中点1机构位形(图3b),保持 θ_4 随 θ_1 变化的变化率与点1、2所在曲线斜率相同时,该机构能动态通过点2对应的机构约束奇异位

形(图3a),但无法到达点3所对应的机构位形(图3c),即该机构可以通过点2处约束奇异位形而不产生运动分岔。同理,当机构从图3d中点3机构位形,保持 θ_4 随 θ_1 变化的变化率与点2、3所在曲线斜率相同时,该机构能动态通过点2对应的机构约束奇异位形,但无法到达点1所对应的机构位形,即该机构可以动态通过点2处约束奇异位形而不发生运动模式改变。

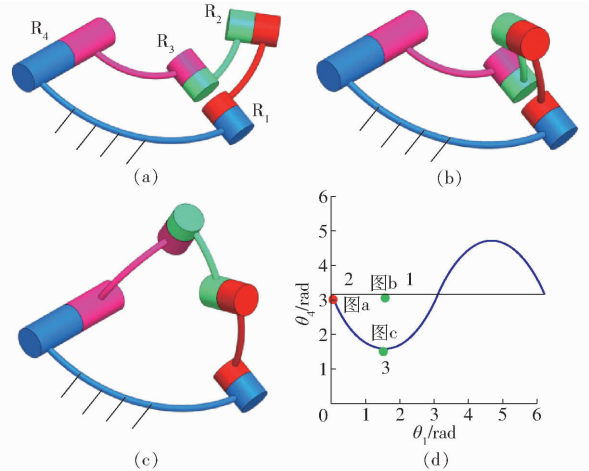


图3 球面5号4R机构位形

Fig. 3 Configuration of No. 5 spherical 4R mechanism

从图3d可知,点1所对应的机构位形变换到点3所示机构位形时,通过在图3d点2所示位形时, θ_4 随 θ_1 变化的变化率需要发生突变,从而实现机构运动模式的改变。一般情况下,使机构在运动中实现图3d所示两种运动模式的变换,十分的困难。可以使机构处于点2所示奇异位形时,保持机构静止不动,使得转动副 R_4 和 R_1 的转角速度为零,然后控制转动副 R_4 与转动副 R_1 转动实现机构运动模式的变换。

同理可知,当式(3)中的系数 $A=B=0$,或 $A=C=0$,或 $B=E=0$,或 $C=E=0$ 时,球面4R机构只具有1种定轴转动和1种变轴线转动共2种运动模式。

3.3 球面4R机构运动模式(8号 $B=C=0$)

当 $a_{12} + a_{41} - a_{34} - a_{23} = 2k\pi$, $a_{12} - a_{41} - a_{34} + a_{23} = 2k\pi$ 且 $\theta_1 = \pm\pi$ 或 $\theta_4 = \pm\pi$ 时,根据式(2)得到, θ_4 或 θ_1 为定值,此时机构不具有固定轴线转动运动模式。

当 $\theta_1 \neq \pm\pi$, $\theta_4 \neq \pm\pi$ 时,将8号球面机构结构参数代入式(3)整理得到 B, C 为零, A, D, E 均不为零,得到的方程为二元四次方程,即

$$A(t_1t_4)^2 + Dt_1t_4 + E = 0 \quad (7)$$

其中 $t_1t_4 = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4AE}}{2A}$ $D^2 - 4AE = 16s_{12}^2$

$A(t_1t_4)^2 + Dt_1t_4 + E = 0$ 可分解为有理式,需满

足 $D^2 - 4AE = 16s_{12}^2 \geq 0$ 。当球面 4R 机构结构参数仅满足 $B、C$ 为零, 当 $s_{12} \neq 0$ 时, $D^2 - 4AE > 0$, 因而式(7)可以分解因式。从而, 根据运动模式的定义可知, 当球面 4R 机构结构参数仅满足 $B、C$ 为零, 当 $\theta_1 \neq \pm \pi, \theta_4 \neq \pm \pi$ 时, 机构具有两种变轴线转动运动模式, 且该两种运动模式下机构连杆的瞬时轴线随 $t_1、t_4$ 不断变化。

如图 4 球面 4R 机构的 3 维模型所示, 机构结构参数 $\alpha_{41} = 90^\circ、\alpha_{12} = 45^\circ、\alpha_{23} = 90^\circ、\alpha_{34} = 45^\circ$ 。该结构参数满足式(4)中的关系式 $a_{12} + a_{41} - a_{34} - a_{23} = 2k\pi, a_{12} - a_{41} - a_{34} + a_{23} = 2k\pi$, 如图 4e 所示, 当机构处于约束奇异位形时, 其存在运动分岔的可能性, 但当使得 θ_4 随 θ_1 变化的斜率不发生突变时, 机构将通过该约束奇异位形且保持运动不发生分岔。点 3 与点 6 所对应的机构位形相同, 点 1 与点 5 所对应的机构位形相同。从图 4e 所示点 1 位形通过点 2 到达点 3, 通过点 6 到达点 5 机构位形, 这整个运动过程属于第 1 种运动模式; 从图 4e 所示点 1 位形通过点 7 到达点 6, 通过点 3、4 到达点 5 机构位形, 这整个运动过程属于第 2 种运动模式。上述两种运动模式下, 连杆的瞬时转动轴线均随转角 θ_1 和 θ_4 不断发生变化, 即 8 号球面机构只具有两种变轴线转动运动模式。使机构处于奇异位形时, 保持机构静止不动, 使得转动副 R_4 和 R_1 的转角速度为零, 然后控制转动副 R_4 与转动副 R_1 转动实现机构运动模式的变换。

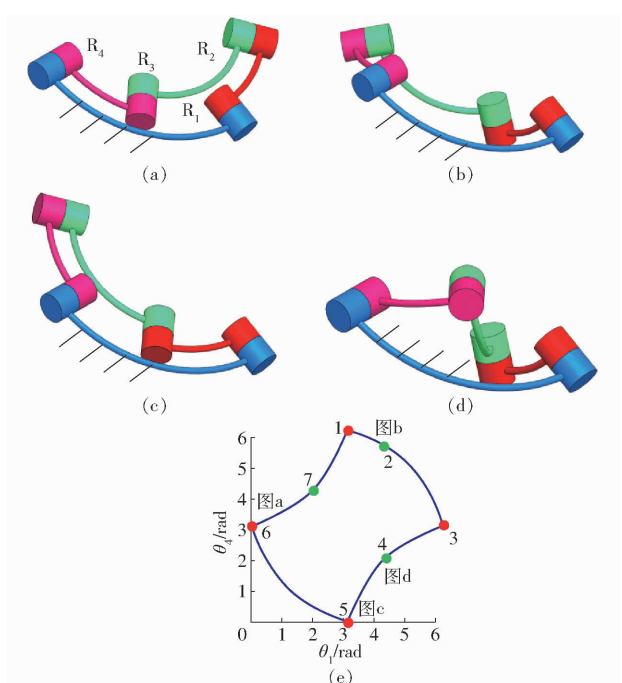


图 4 球面 8 号 4R 机构位形

Fig. 4 Configuration of No. 8 spherical 4R mechanism

同理可知, 当式(3)中的系数 $B = C = 0$ 时, 球面 4R 机构只具有 2 种变轴线转动运动模式。

3.4 球面 4R 机构运动模式 (14 号 $B = C = E = 0$)

当 $a_{12} + a_{41} - a_{34} - a_{23} = 2k\pi, a_{12} - a_{41} - a_{34} + a_{23} = 2k\pi, a_{12} + a_{41} + a_{34} + a_{23} = 2k\pi$, 且 $\theta_1 = \pm \pi$ 或 $\theta_4 = \pm \pi$ 时, 根据式(2)得到, θ_4 或 θ_1 为定值, 此时机构不具有固定轴线转动运动模式。

当 $\theta_1 \neq \pm \pi, \theta_4 \neq \pm \pi$ 时, 将 14 号球面机构结构参数代入式(3)整理得到 $B、C、E$ 为零, $A、D$ 均不为零, 得到的方程为二元四次方程

$$t_1 t_4 (A t_1 t_4 + D) = 0 \quad (8)$$

当球面 4R 机构结构参数仅满足 $B、C、E$ 为零, $A、D$ 均不为零, 该式可以分解因式。从而, 根据运动模式的定义可知, 当球面 4R 机构结构参数仅满足 $B、C、E$ 为零, 球面 4R 机构恒具有 3 种运动模式。两种为定轴转动模式, 一种为变转动轴线转动模式。

如图 5 所示, 球面 4R 机构的 3 维模型机构的结构参数 $\alpha_{41} = 120^\circ、\alpha_{12} = 60^\circ、\alpha_{23} = 120^\circ、\alpha_{34} = 60^\circ$ 。该结构参数满足式(4)中的关系式, $a_{12} - a_{41} + a_{34} - a_{23} = 2k\pi, a_{12} - a_{41} - a_{34} + a_{23} = 2k\pi, a_{12} + a_{41} + a_{34} + a_{23} = 2k\pi$ 。

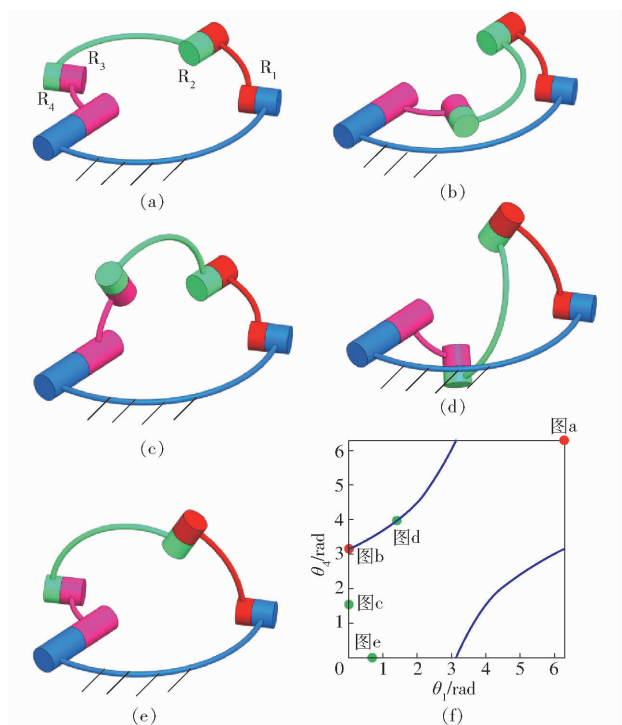


图 5 球面 14 号 4R 机构位形

Fig. 5 Configuration of No. 14 spherical 4R mechanism

如图 5f 所示, 当机构处于约束奇异位形时, 其存在运动分岔的可能性, 但当使得 θ_4 随 θ_1 变化的斜率不发生突变时, 机构将通过该约束奇异位形且保持运动模式不发生改变。使机构处于奇异位形时, 保持机构静止不动, 使得转动副 R_4 和 R_1 的转角速度为零, 然后控制转动副 R_4 与转动副 R_1 转动实现机构运动模式的变换。

同理可知,当式(3)中的系数 $A = B = C = 0$, 或 $A = B = E = 0$, 或 $A = C = E$ 时,球面 4R 机构只具有 2 种定轴线转动和 1 种变轴线转动共 3 种运动模式。

3.5 球面 4R 机构运动模式(15 号 $A = B = C = E = 0$)

将 15 号球面 4R 机构结构参数代入式(2),当 $\theta_1 = \pm\pi$ 时,得到 $0 = 0$,即该式恒成立。即转动副 R_1 的转角 θ_1 为 $\pm\pi$ 时,转动副 R_4 的转角 θ_4 可自由转动,此时对应球面 4R 机构连杆可以绕转动副 R_4 的轴线做定轴转动。当 $\theta_4 = \pm\pi$ 时,将该式整理得到 $0 = 0$,即该式恒成立。即转动副 R_4 的转角 θ_4 为 $\pm\pi$ 时,转动副 R_1 的转角 θ_1 可自由转动,此时对应球面 4R 机构连杆可以绕转动副 R_1 的轴线做定轴转动。

当 $\theta_1 \neq \pm\pi, \theta_4 \neq \pm\pi$ 时,将 15 号球面机构结构参数代入式(3)整理得到 $A、B、C、E$ 为零, D 不为零,得到二元二次方程

$$t_1 t_4 = 0 \tag{9}$$

当球面 4R 机构结构参数仅满足 $A、B、C、E$ 为零, D 不为零,该式可以分解因式。即 $t_1 = 0$ 对应转动副 R_1 的转角 θ_1 为 0 时,转动副 R_4 的转角 θ_4 可自由转动,此时对应球面 4R 机构连杆可以绕转动副 R_4 的轴线做定轴转动。 $t_4 = 0$ 对应转动副 R_4 的转角 θ_4 为 0 时,转动副 R_1 的转角 θ_1 可自由转动,此时对应球面 4R 机构连杆可以绕转动副 R_1 的轴线做定轴转动。

从而可知,当球面 4R 机构结构参数仅满足 $A、B、C、E$ 为零,球面 4R 机构恒具有 4 种定轴转动运动模式。

如图 6 球面 4R 机构的 3 维模型所示,机构的结

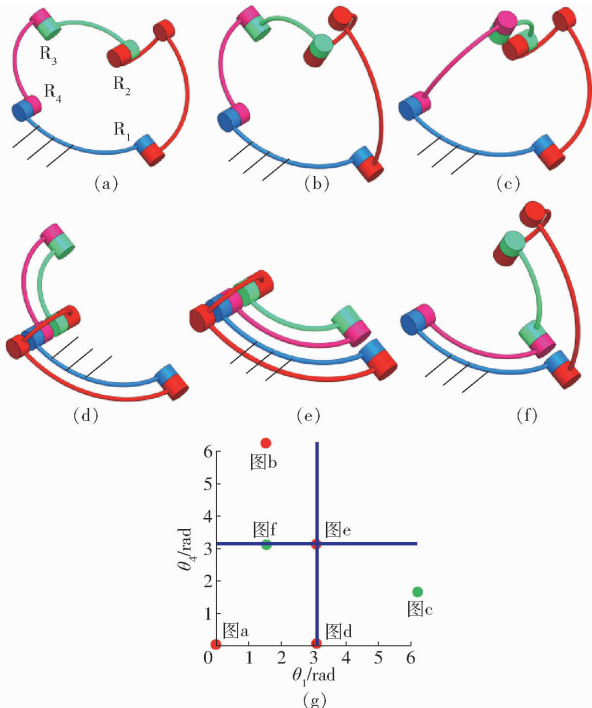


图 6 球面 15 号 4R 机构位形

Fig. 6 Configuration of No. 15 spherical 4R mechanism

构参数 $\alpha_{41} = 90^\circ, \alpha_{12} = 90^\circ, \alpha_{23} = 90^\circ, \alpha_{34} = 90^\circ$, 其结构参数满足式(4)。从图 6g 可知,当机构处于约束奇异位形时,其存在运动分岔的可能性,但当使得 θ_4 随 θ_1 变化的斜率不发生突变时,机构将通过该约束奇异位形且保持运动模式不发生改变。使机构处于奇异位形时,保持机构静止不动,使得转动副 R_4 和 R_1 的角速度为零,然后控制转动副 R_4 与转动副 R_1 转动实现机构运动模式的变换。

综上所述,可将式(3)的多项式系数 $A、B、C、E$ 分别置零,进行组合后,得到的结构参数关系式,可设计具有不同运动模式特征的球面 4R 机构。这类球面 4R 机构所具有的运动模式如表 1 所示。表 1 中 S_m 为机构运动模式数目, S_f 为球面 4R 机构固定轴线转动运动模式数目, S_v 为球面 4R 机构变轴线运动模式数目。

表 1 具有约束奇异位形的球面 4R 机构运动模式数目

Tab.1 Motion mode of spherical 4R mechanism with constrained singular configuration

序号	参数	S_m	S_f	S_v
1	$A = 0$	1	0	1
2	$B = 0$	1	0	1
3	$C = 0$	1	0	1
4	$E = 0$	1	0	1
5	$A = B = 0$	2	1	1
6	$A = C = 0$	2	1	1
7	$A = E = 0$	2	0	2
8	$B = C = 0$	2	0	2
9	$B = E = 0$	2	1	1
10	$C = E = 0$	2	1	1
11	$A = B = C = 0$	3	2	1
12	$A = B = E = 0$	3	2	1
13	$A = C = E = 0$	3	2	1
14	$B = C = E = 0$	3	2	1
15	$A = B = C = E = 0$	4	4	0

根据表 1 可知,1~4 号机构只具有 1 种变轴线转动运动模式;5、6、9、10 号机构只具有 1 种定轴线和 1 种变轴线共 2 种转动运动模式;7、8 号机构具有 2 种变轴线共 2 种转动运动模式;11~14 号机构具有 1 种变轴线、2 种定轴线 3 种转动运动模式;15 号机构具有 4 种定轴线转动运动模式。

4 球面 4R 机构约束奇异位形瞬时转动轴线

建立如图 7 所示的球面 4R 机构坐标系,当机构的 4 个转动副轴线在 XOY 平面内,相交于点 O 。转动副 R_4 的轴线与向量 OA 重合,转动副 R_1 的轴线与向量 OB 重合。转动副 $R_1、R_2$ 轴线所在平面 Σ_{12} 与转动副 $R_4、R_3$ 轴线所在平面 Σ_{43} 的交线与 OC 重合,转动副 R_4 绕向量 OA 转动有限角度 θ_4 后,转动副 R_1 转动有限角度 θ_1 ,转动副 $R_4、R_3$ 轴线所在平面

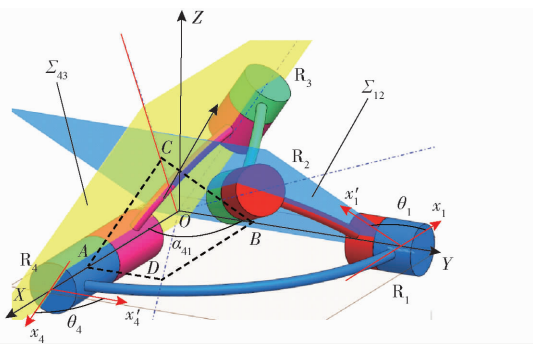


图7 球面4R机构连杆瞬时轴线几何关系

Fig.7 Geometric relationship of instantaneous axis of connecting rod of spherical 4R mechanism

OAC 的法线沿 Z 轴方向,绕转轴 R_4 转动 $\pi - \theta_4$;转动副 R_1, R_2 轴线所在平面 OBC 的法线沿 Z 轴方向,绕转轴 R_1 转动 θ_1 。

平面 OAC 的法线在 $OXYZ$ 坐标系中为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_4 & -s_4 \\ 0 & s_4 & -c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -s_4 \\ -c_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

平面 OBC 的法线在 $OXYZ$ 坐标系中为

$$\begin{bmatrix} c_{41} & -s_{41} & 0 \\ s_{41} & c_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{41}s_1 \\ -c_{41}s_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

平面 OAC, OBC 法线的共垂线平行于向量

$$\mathbf{a} = [-s_4c_1 - c_{41}c_4s_1 \quad -s_{41}c_4s_1 \quad s_{41}s_4s_1]^T \quad (12)$$

式(12)可写成形式

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{s_4c_1}{s_{41}c_4s_1} + \frac{c_{41}}{s_{41}} & 1 & -\frac{s_{41}s_4}{s_{41}c_4} \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

式(12)为球面4R机构连杆的瞬时转动轴线的方向向量。当球面4R机构趋近于奇异位形时,式(12)的极限值即为球面4R机构趋近于奇异位形时连杆的瞬时转动轴线。当球面4R机构趋近于奇异位形时 $c_1/c_4 = \pm 1$ 。因而,约束奇异位形下连杆瞬时转动轴线方向向量式(13)的极限值为

$$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} \pm \frac{s_4}{s_{41}s_1} + \frac{c_{41}}{s_{41}} & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

式(14)可通过几何方法进行验证。如图7所示 OA 与转动副 R_4 的轴线重合, OB 与转动副 R_1 的轴线重合。 CA 为转动副 R_4, R_3 所在平面 Σ_{43} 的直线, CB 为转动副 R_1, R_2 所在平面 Σ_{12} 的直线。 OC 即为上述两平面的交线,即球面4R机构连杆的瞬时转动轴线。点 A, B 均在平面 OXY 上,点 C 在平面 OXY 上的投影为点 D, DA 垂直于 OA, BD 垂直于 OB 。由于 CD 垂直于 AD, CD 垂直于 OA ,且 AD 垂直于 OA ,因而根据转动副 R_4 的转角 θ_4 得出 $\angle CAD$ 为

$\pi - \theta_4$ 。同理,根据转动副 R_1 的转角 θ_1 得出 $\angle CBD$ 为 $\pi - \theta_1$ 。

根据图7的几何关系,可得到

$$\begin{cases} \frac{\sin(\pi - \theta_4)}{\sin(\pi - \theta_1)} = \frac{l_{CB}}{l_{AC}} \\ \frac{l_{CB}}{l_{AC}} = \frac{l_{BD}}{l_{AD}} \\ \frac{l_{BD}}{l_{AD}} = \frac{\sin \angle DOB}{\sin \angle AOD} \end{cases} \quad (15)$$

$$\frac{s_4}{s_1} = \frac{\sin \angle DOB}{\sin \angle AOD} \quad (16)$$

$$\frac{\sin \angle DOB}{\sin \angle AOD} = \frac{\sin(\angle AOB - \angle AOD)}{\sin \angle AOD} = \frac{\sin \angle AOB \cos \angle AOD - \cos \angle AOB \sin \angle AOD}{\sin \angle AOD} =$$

$$\sin \angle AOB \frac{\cos \angle AOD}{\sin \angle AOD} - \cos \angle AOB \quad (17)$$

根据式(15)~(17)可得到

$$\frac{1}{\sin \angle AOB} \frac{s_4}{s_1} + \frac{\cos \angle AOB}{\sin \angle AOB} = \frac{\cos \angle AOD}{\sin \angle AOD} \quad (18)$$

当机构趋近于约束奇异位形时,点 C 无限接近于点 D ,连杆的瞬时转动轴线 OC 无限接近于其在平面 OXY 上的投影 OD ,因而此时, OD 即为连杆在约束奇异位形时的瞬时连续转动轴线,当点 C 从 Z 轴正向无限趋近于点 D 时, θ_4 趋近于 π, θ_1 趋近于 π 。此时向量 \mathbf{l}_{OD} 为 $(\cos \angle AOD / \sin \angle AOD \quad 1 \quad 0)$ 。因而结合式(14)、(18),可知当 θ_4 趋近于 π, θ_1 趋近于 π 时,通过几何方法得到连杆在约束奇异位形下的瞬时转动轴线与通过代数方法得到的轴线方向向量一致。同理,可得到当球面4R机构处于其他约束奇异位形时的瞬时转动轴线的表达式与式(14)一致。在 θ_4, θ_1 使得球面4R机构趋近于约束奇异位形时,结合式(2)消去 θ_4 或 θ_1 ,从而计算式(14)的极限值,得到连杆在机构约束奇异位形时不同运动模式下的瞬时转动轴线的方向向量。

球面4R机构在运动分岔时分3种情况,第1种,两分岔轨迹均为变轴线运动模式。第2种,两分岔轨迹均为定轴线运动模式。第3种,两分岔轨迹中一个为定轴线运动模式,另外一个为变轴线运动模式;计算分岔运动轨迹在机构位形趋近于约束奇异位形时 s_4/s_1 的值。结合上述3种情况由式(14)可知,表1中球面4R机构在趋近于约束奇异位形时,不同分岔运动轨迹连杆的瞬时转动轴线均不重合。

5 结论

(1)提出一种研究球面4R机构运动学代数方

程可分解因式的条件的方法,全面分析了结构参数对其运动模式的影响。

(2)发现了5类具有约束奇异位形的球面4R机构,其中多模式球面4R机构可分为4类。即具有1种定轴线和1种变轴线共2种转动运动模式,具有2种变轴线共2种转动运动模式,具有1种变轴线、2种定轴线3种转动运动模式和具有4种定

轴线转动运动模式,总共4类多模式球面4R机构。

(3)具有约束奇异位形的球面4R机构处于约束奇异位形时,虽然其运动可能产生分岔,但其运动模式不一定发生改变。因而,运动分岔机构与多模式机构不能等同。球面4R机构处于约束奇异位形时,其连杆的瞬时转动轴线均不重合。

参 考 文 献

- [1] 朱小蓉,李世杰,周宇东,等. 含双驱动五杆回路的弱耦合并联机构型综合[J]. 农业机械报,2021,52(10):434-442.
ZHU Xiaorong, LI Shijie, ZHOU Yudong, et al. Structural synthesis of parallel mechanisms containing dual drive five-bar loop [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(10): 434-442. (in Chinese)
- [2] 于靖军,刘凯,孔宪文. 多模式机构研究进展[J]. 机械工程学报, 2020, 56(19): 14-27.
YU Jingjun, LIU Kai, KONG Xianwen. State of the art of multi-mode mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(19): 14-27. (in Chinese)
- [3] 刘伟,刘宏昭. 具有2T1R与2R1T运动模式3自由度并联机构型综合[J]. 农业机械学报, 2018, 49(7): 401-409.
LIU Wei, LIU Hongzhao. Type synthesis of 3-DOF parallel mechanism with 2T1R and 2R1T motion mode[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(7): 401-409. (in Chinese)
- [4] CHEN Y, YOU Z. Two-fold symmetrical 6R foldable frame and its bifurcations[J]. International Journal of Solids and Structures, 2009, 46(25-26): 4504-4514.
- [5] CHEN Y, CHAI W. Bifurcation of a special line and plane symmetric Bricard linkage[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(4): 515-533.
- [6] MÜLLER A. Higher order local analysis of singularities in parallel mechanisms[C]//ASME 2002 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference-Montreal, 2002: 515-522.
- [7] MÜLLER A. Local analysis of singular configurations of open and closed loop manipulators[J]. Multibody System Dynamics, 2002, 8(3): 297-326.
- [8] MÜLLER A. Geometric characterization of the configuration space of rigid body mechanisms in regular and singular points[C]//ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference-Long Beach, 2005: 827-840.
- [9] LÓPEZ-CUSTODIO P, MULLER A, KANG X, et al. Tangential intersection of branches of motion[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 147: 1037301-10373013.
- [10] LÓPEZ-CUSTODIO P, DAI J, JOSÉ M. Branch reconfiguration of bricard loops based on toroids intersections: line-symmetric case[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2018, 10(3): V05BT08A081-V05BT08A094.
- [11] LEE C, HERVÉ J. Three novel discontinuously movable spatial 7-link mechanisms[C]//ASME 2006 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference-Philadelphia, 2006: 1185-1192.
- [12] CHUNG-CHING L, JACQUES M H. The metamorphic Bennett linkages[C]//The 14th IFToMM World Congress, 2015.
- [13] HAYES M, ROTZOLL M, INGALLS C, et al. Design parameter space of planar four-bar linkages[M]. Advances in Mechanism and Machine Science, 2019.
- [14] KONG X. Reconfiguration analysis of a 3-DOF parallel mechanism using Euler parameter quaternions and algebraic geometry method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 74(6): 188-201.
- [15] FENG H, CHEN Y, DAI J, et al. Kinematic study of the general plane-symmetric Bricard linkage and its bifurcation variations[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 116: 89-104.
- [16] KONG Xianwen. Classification of a 3-RER parallel manipulator based on the type and number of operation modes[J]. J. Mechanisms Robotics, 2021, 13(2): 0210131-0210139.
- [17] 单彦霞,张建伟,于靖军,等. 多模式并联机构操作模式变换方法研究[J]. 农业机械学报, 2020, 51(6): 396-403.
SHAN Yanxia, ZHANG Jianwei, YU Jingjun, et al. Operation mode transformation method of multi-mode parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(6): 396-403. (in Chinese)
- [18] HE X, KONG X, CHABLAT D, et al. Kinematic analysis of a single-loop reconfigurable 7R mechanism with multiple operation modes[J]. Robotica, 2014, 32(7): 1171-1188.
- [19] COX D, LITTLE J, OSHEA D. Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra, undergraduate texts in mathematics series[M]. Springer International Publishing: Cham, Switzerland, 2015.
- [20] EISENBUD D, HUNEKE C, VASCONCELOS W. Direct methods for primary decomposition[J]. Inventiones Mathematicae, 1992, 110(1): 207-235.
- [21] CARL D, CRANE I, JOSEPH D. Kinematic analysis of robot manipulators[M]. Cambridge University, 1998.