

具有固定转动轴线和变转动轴线 3T1R 并联机构构型综合

刘伟^{1,2} 刘宏昭¹ 胡旭宇¹

(1. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 西安 710048; 2. 西安工程大学机电工程学院, 西安 710048)

摘要: 使用位移流形理论对具有固定转动轴线和变转动轴线两种运动模式的 3T1R 并联机构进行了构型综合。分析空间球面 4R 机构的一般运动学方程,通过求极限计算了一种特殊空间球面 4R 机构连杆在奇异位形的两个瞬时连续转动轴线。根据具有固定转动轴线和变转动轴线两种运动模式的球面机构,得到其连杆位移流形的表达式,从而设计了具有两种运动模式的 3T1R 并联机构。通过旋量理论,验证该 3T1R 机构在运动模式变换过程中的自由度和驱动副选取的正确性。结果表明,该 3T1R 并联机构具有固定转动轴线和变转动轴线两种 3T1R 运动模式,4 条支链的 4 个驱动副能实现上述两种模式下机构的控制,当机构处于两种运动模式的变换位形时,需要增加一个辅助驱动副,才能实现该机构两种运动模式的变换。

关键词: 并联机构; 运动模式; 变转动轴线; 位移流形; 构型综合

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2022)02-0451-08 OSID: 

Type Synthesis of 3T1R Parallel Machine with Fixed Rotation Axis and Variable Rotation Axis

LIU Wei^{1,2} LIU Hongzhao¹ HU XuYu¹

(1. Faculty of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China
2. School of Electrical and Mechanical Engineering, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract: Based on the displacement manifold theory, the configuration synthesis of 3T1R parallel mechanism with fixed rotation axis and variable rotation axis was carried out. According to the general kinematics equation of spatial 4R spherical mechanism, the characteristics of rotation axis of spherical 4R mechanism with two fixed axes were analyzed. The characteristics of rotation axis of spherical 4R mechanism with fixed axis rotation and variable axis rotation were analyzed. Through limit calculation, the two instantaneous continuous rotation axes of the connecting rod of the spherical 4R mechanism with fixed rotation axis and variable rotation axis in the motion mode transformation configuration were analyzed. The results showed that the two instantaneous continuous rotation axes of this kind of mechanism did not coincide under the motion mode transformation configuration. According to the spherical mechanism with two motion modes of fixed rotation axis and variable rotation axis, the expression of connecting rod displacement manifold was established. The frame of the spherical mechanism was connected with three moving pairs, and a new 3T1R motion mode generator was obtained. Based on its displacement manifold, a 3T1R parallel mechanism with two motion modes was designed. Through the screw theory, the correctness of the degree of freedom and the selection of driving pair of the mechanism in the transformation of 3T1R motion mode with variable axis rotation and 3T1R motion mode with fixed axis rotation were verified. The results showed that the 3T1R parallel mechanism had two 3T1R motion modes: fixed rotation axis and variable rotation axis. Four drive pairs of four branch chains can realize the control of the mechanism under the above two modes. When the mechanism was in the transformation configuration of the two motion modes, an auxiliary drive pair needed to be added to realize the transformation of the two motion modes of the mechanism.

Key words: parallel machine; motion mode; variable rotation axis; displacement manifold; type synthesis

收稿日期: 2021-03-16 修回日期: 2021-04-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(51275404)

作者简介: 刘伟(1985—),男,博士生,西安工程大学讲师,主要从事机构设计研究,E-mail: liuweilw@xpu.edu.cn

通信作者: 刘宏昭(1954—),男,教授,主要从事机械动力学和机构学研究,E-mail: liu-hongzhao@163.com

0 引言

多模式并联机构对复杂任务具有较好的工作适应能力^[1]。文献[2]在球面 4R 机构上增加转动副,使得球面 4R 机构处于折叠位形时,机构具有平面 4R 机构运动模式,从而设计了具有直线移动和球面滚动两种模式的移动机器人。在航天领域,具有多种运动模式的并联机构也可用来设计可展结构^[3],从而适应航天运载工具的狭小空间限制。具有多模式的并联机构可设计具有可重构性重型抓取机械手^[4]。文献[5]使用平面变胞机构,设计了可根据炮筒姿态调节的自适应弹药输填装置。文献[6]利用 3-RPS 并联机构的两种运动模式,对其结构参数进行优化使其用于脚踝关节的康复设备。

高性能的 3T1R^[7-8] 并联机构设计是工业应用和机构构型研究的热点。H4^[9]、I4^[10]、IR4^[11]、Part4^[12]等 3T1R 型并联机构在电子器件高速分拣以及食品与医药包装自动线上具有较好的应用前景^[13]。文献[14-15]设计了零耦合度且解耦的 3T1R 并联机构。文献[16]通过两个共轴且反向等螺距螺旋副设计了具有整周回转能力的 3T1R 并联机构。

文献[17]使用李群理论综合了具有两种不同转动方向的 3T1R 并联机构。文献[18]使用有限位移量设计了具有可变转动轴线的 3T1R 并联机构。文献[19]综合了具有 3T1R 和 2T1R 运动模式的并联机构,且这两个模式的转动轴线不平行。文献[20]分析了 4-CRU 并联机构所具有的 3 种运动模式,其具有 2 种 3T1R 运动模式和 1 种 1R2T 运动模式,2 种 3T1R 运动模式通过 1R2T 机构位形进行变换。

目前,具有多种 3T1R 运动模式的并联机构构型有限,该 3T1R 运动模式下转动运动的轴线方向只能在两个方向上变换。具有固定转动轴线和变转动轴线 3T1R 运动模式的并联机构在应用于移动式调姿平台或机器人手腕具有一定的前景。本文在对具有固定转动轴线和变转动轴线的球面 4R 机构进行分析的基础上,综合一类具有变转动轴线和固定

转动轴线的 3T1R 并联机构。

1 具有两种定轴线转动运动模式的球面 4R 机构

图 1 为一种球面 4R 机构的结构简图,图 2 为其三维模型图。如图 2a 所示球面 4R 机构,4 个转动副轴线分别与 X、Y 轴重合,相邻转轴轴线夹角 $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{34} = \alpha_{41} = 90^\circ$ 。

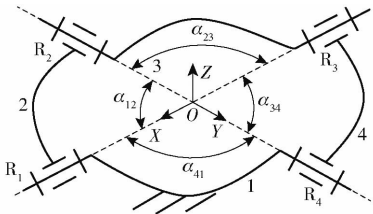


图 1 两种固定转动轴线的球面 4R 机构简图

Fig.1 Sketch of spherical 4R mechanisms with two fixed rotation axes

当机构处于图 2a 所示位形时,运动链 R₁R₂和 R₄R₃施加在连杆 3 上的约束旋量在坐标系 OXYZ 中均可表示为

$$\begin{cases} {}^O\mathcal{S}_1^r = (0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0) \\ {}^O\mathcal{S}_2^r = (0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0) \\ {}^O\mathcal{S}_3^r = (1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0) \\ {}^O\mathcal{S}_4^r = (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1) \end{cases} \quad (1)$$

在图 2a 所示机构位形下,由于运动链 R₁R₂和 R₄R₃施加在连杆 3 上的 4 个约束旋量相同,动平台上施加的约束系存在 4 个冗余约束,采用修正的 Kutzbach-Grübler 公式计算机构自由度,即

$$M = 6(n - g - 1) + \sum f_i + v - \zeta \quad (2)$$

- 式中 M——机构自由度
n——机构构件总数
g——机构运动副数
f_i——第 i 个运动副的自由度
v——冗余约束数
ζ——局部自由度

计算得自由度为 2。对连杆 3 上的约束系计算与其互易积为零的旋量系,可知在图 2a 所示位形下,连杆 3 可以过点 O 在 XOY 平面上的任意两条

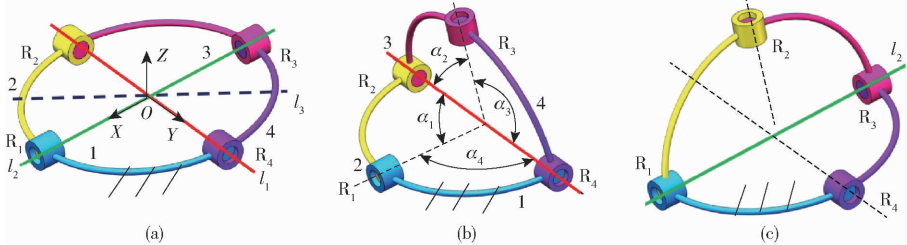


图 2 具有两种固定转动轴线的球面 4R 机构运动模式变换

Fig.2 Motion mode transformation of spherical 4R mechanism with two fixed rotation axes

轴线做瞬时转动。然而,上述过点 O 在 XOY 平面上的转动轴线,并不全是连杆 3 的连续转动轴线,需要对 XOY 平面上的转动轴线的连续性进行判断^[21-22]。转动轴线的连续性可通过建立机构运动学方程进行分析。文献[23]给出球面 4R 机构运动学计算式为

$$c_1(s_{12}Y_4) + s_1(s_{12}X_4) + (c_{12}Z_4 - c_{23}) = 0 \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} X_4 &= s_{34}s_4 \\ Y_4 &= -(s_{41}c_{34} + c_{41}s_{34}c_4) \\ Z_4 &= c_{41}c_{34} - s_{41}s_{34}c_4 \end{aligned}$$

式中 $s_{ij}、c_{ij}$ ——转轴 i 转动到 j 的正弦函数和余弦函数

$s_i、c_i$ ——转轴 R_i 转角的正弦函数和余弦函数

将 $s_{12} = s_{23} = s_{34} = s_{41} = 1, c_{12} = c_{34} = 0$ 代入式(3)得到

$$s_1s_4 = 0 \quad (4)$$

假设图 2a 中连杆 3 绕一般轴线 l_3 做有限转动, R_1 和 R_4 的转角都应不为零,将其代入式(4),等式两边不相等,因而轴线 l_3 不是连续转动轴线。由式(4)可知,当转动副 R_4 的转角不为零时,转动副 R_1 的转角必为零,此时机构位形如图 2b 所示,连杆 3 绕固定转动轴线 l_1 做连续转动;当转动副 R_1 的转角不为零时,转动副 R_4 的转角必为零,此时机构位形如图 2c 所示,连杆 3 绕固定轴线 l_2 做连续转动。由于机构离开图 2a 所示位形后,机构自由度减少为 1,发生了改变,因而图 2a 所示机构位形下,机构具有两个自由度是瞬时的,且连杆 3 的两个连续转动轴线分别为 l_1 和 l_2 ,即图 2 所示 4R 机构的连杆 3 具有两种运动模式,分别为沿轴线 l_1 和 l_2 的固定轴线转动。文献[15]利用图 2 所示空间 4R 机构的该特征,设计了具有两种 3T1R 运动模式并联机构。

2 具有固定转动轴线和变转动轴线两种转动运动模式的球面 4R 机构

当图 3 中空间 4R 机构的结构参数 α_{ij} 取一般值时,空间 4R 机构连杆的瞬时转动轴线不是固定的,而是在不断发生变化,文献[16]根据这一点设计了

具有变转动轴线的 3T1R 并联机构。 $\alpha_{12} = \alpha, \alpha_{23} = 180^\circ - \alpha, \alpha_{34} = 90^\circ, \alpha_{41} = 90^\circ$ 时,该空间 4R 球面机构简图如图 3 所示,取 $\alpha = 120^\circ$,该空间 4R 球面机构的三维模型图如图 4 所示。

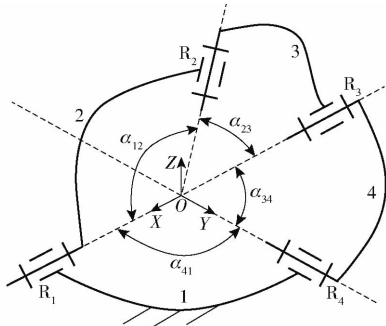


图 3 具有固定转动轴线和变转动轴线两种模式的球面 4R 机构运动简图

Fig. 3 Sketch of spherical 4R mechanism with two motion modes with fixed rotation axis and variable rotation axis

当机构处于图 4a 所示位形时,运动链 R_1R_2 和 R_4R_3 施加在连杆 3 上的约束旋量系在坐标系 $OXYZ$ 中均与式(1)相同,因而图 4a 中机构有两个自由度,需要对这两个转动自由度的瞬时性和转动轴线的连续性进行判断。将 $s_{12} = s_{23}, c_{12} = -c_{23}, s_{34} = s_{41} = 1, c_{34} = c_{41} = 0$,代入式(3)得到

$$s_1s_{12}s_4 - c_{12}c_4 + c_{12} = 0 \quad (5)$$

2.1 变转动轴线运动模式

当 R_4 的转角不为零时,式(5)可写成

$$s_1 = \frac{c_{12}c_4 - c_{12}}{s_{12}s_4} \quad (6)$$

根据式(6)可知, R_4 的转角不为零时, R_1 的转角也不为零。转动副 $R_1、R_4$ 做有限转动后,连杆 3 在特定位形下的瞬时转动轴线应为轴线 R_1 与 R_2 所在平面 Π_1 与轴线 R_4 与 R_3 所在平面 Π_2 的交线,该交线也是上述两平面法线的共垂线。在图 4a 所示位形下,当转动副 R_4 转动有限角度 θ_4 后,转动副 R_1 转动有限角度 θ_1 ,平面 Π_2 的法线从图 4a 所示的沿 Z 轴方向,绕转轴 R_4 ,即 Y 轴转动 θ_4 ;平面 Π_1 的法线从图 4a 所示的沿 Z 轴方向,绕转轴 R_1 ,即绕 X 轴转动 $-\theta_1$ 。

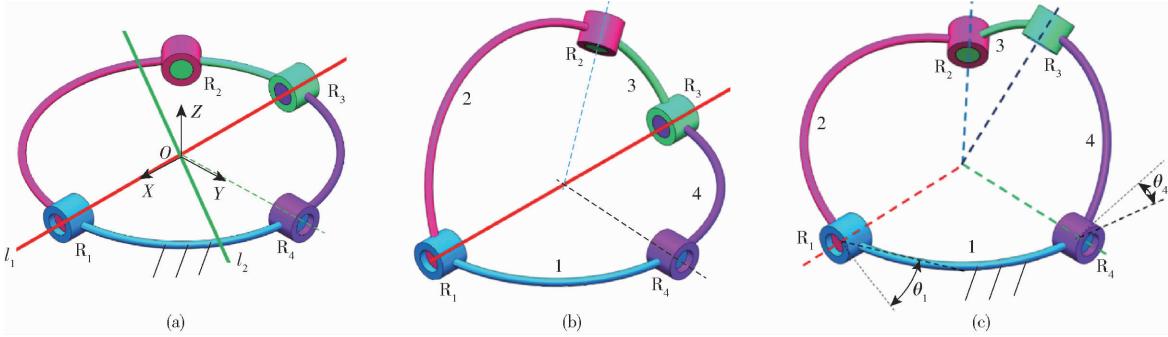


图 4 具有固定转动和变转动轴线球面 4R 机构运动模式变换

Fig. 4 Motion mode transformation of spherical 4R mechanism with fixed and variable rotation axis

平面 Π_1 的法线在 $OXYZ$ 坐标系中为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

平面 Π_2 的法线在 $OXYZ$ 坐标系中为

$$\begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_4 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_4 \\ 0 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

平面 Π_1 、 Π_2 法线的共垂线平行于向量 $(-c_4s_1, -s_4c_1, s_4s_1)^T$, 可写成 $(c_4s_1/(s_4c_1), 1, -s_1/c_1)^T$ 。将式(6)代入平面 Π_1 、 Π_2 法线的共垂线方向向量的第 3 个分量得到

$$\begin{cases} \lim_{\theta_4 \rightarrow 0} s_1 = \lim_{\theta_4 \rightarrow 0} \frac{c_{12}c_4 - c_{12}}{s_{12}s_4} = \lim_{\theta_4 \rightarrow 0} \frac{-c_{12}s_4}{s_{12}c_4} = 0 \\ \lim_{\theta_4 \rightarrow 0} -\frac{s_1}{c_1} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

平面 Π_1 、 Π_2 法线的共垂线方向向量的第 1 个分量为

$$\begin{cases} \lim_{\theta_4 \rightarrow 0} \frac{s_1}{s_4} = \lim_{\theta_4 \rightarrow 0} \frac{c_{12}c_4 - c_{12}}{s_4s_{12}s_4} = \lim_{\theta_4 \rightarrow 0} -\frac{c_{12}}{2s_{12}c_4} \\ \lim_{\theta_4 \rightarrow 0} \frac{c_4}{c_1} = \lim_{\theta_4 \rightarrow 0} \frac{c_4}{\pm \sqrt{1 - \left(\frac{c_{12}c_4 - c_{12}}{s_{12}s_4} \right)^2}} \\ \lim_{\theta_4 \rightarrow 0} \left[1 - \left(\frac{c_{12}c_4 - c_{12}}{s_{12}s_4} \right)^2 \right] = 1 \end{cases} \quad (10)$$

根据式(10)可知,当 $\theta_4 \rightarrow 0$ 时, c_4/c_1 的极限不存在,当 c_1 分别取正负值时, c_4/c_1 的极限存在。当 $\alpha_{12} = 120^\circ$ 时,将其代入式(10),图 4 所示空间 4R 机构当 $\theta_4 \rightarrow 0$ 时,连杆 3 的瞬时连续转动轴线为 $[\pm\sqrt{3}/6 \quad 1 \quad 0]^T$ 。

第 1 分量的“ $\pm$ ”号,是由于当图 4 所示机构 θ_4 一定时, θ_1 具有两个解,如图 5 所示。图 5a 中 R_4 的转角 θ_4 与图 5b 中 R_4 的转角相同,机构具有两种位形。图 5a 所示机构位形下,轴线 l_2 是连杆 3 在机构图 5a 位形下的瞬时连续转动轴线;图 5b 中轴线 l'_2 是连杆 3 的瞬时转动轴线。结合连杆 3 的瞬时连续转动轴线向量和图 5 的几何分析,可知当 R_4 的转角 $\theta_4 \rightarrow 0$ 时,图 5 所示机构有两种位形,连杆 3 有两个连续转动轴线 l_2 、 l'_2 ,且由于平面 Π_1 与平面 Π_2 在空间不断连续变化,因而其交线在空间连续不断变化,即转动轴线 l_2 、 l'_2 在空间连续变化。

2.2 固定转动轴线运动模式

转轴 R_4 转角为 0 时,即 $s_4 = 0, c_4 = 1$ 时,式(5)可写成

$$-c_{12} + c_{12} = 0 \quad (11)$$

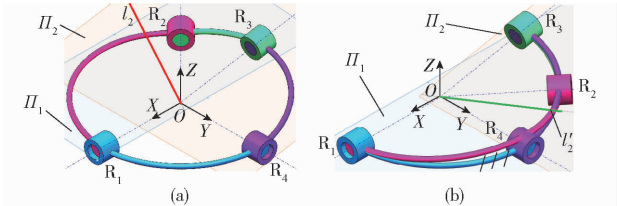


图 5 θ_4 微小转角对应的两个球面 4R 机构位形图

Fig. 5 Two configuration diagrams of spherical 4R mechanism when θ_4 had small value

此时该空间 4R 机构位形如图 4b 所示,转轴 R_1 的转角任意选取,这种情况下,连杆 3 沿定轴线 l_1 连续转动,此时连杆 3 具有固定转动轴线 1 维转动运动模式。

2.3 奇异位形

图 4a 所示机构处于 R_1 、 R_4 的转角均为零的位形。式(10)中转轴 R_4 的转角 $\theta_4 \rightarrow 0$ 时,考虑到机构运动的连续性,机构从图 5a 所示位形下不能在 R_4 的转角 $\theta_4 \rightarrow 0$ 时,运动到图 5b 所示位形下,结合 2.1、2.2 节的分析结果,可知机构在图 4a 所示位形下,连杆 3 具有两个连续转动轴线,分别为 l_1 、 l_2 ,转动轴线 l_1 保持固定,转动轴线 l_2 随 R_4 的转角 θ_4 的变化在空间中连续变化。在图 4a 所示位形下,机构处于奇异位形,当锁定转动副 R_4 的转角 θ_4 ,令其为零,控制转动副 R_1 的转角 θ_1 ,可使得连杆 3 绕固定转动轴线 l_1 连续转动;当控制转动副 R_4 的转角 θ_4 (且令其不等于零),控制转动副 R_1 的转角 θ_1 ,可使得连杆 3 绕变转动轴线 l_2 连续转动。

综上所述,图 4 所示机构具有两种运动模式,可通过对转动副 R_1 、 R_4 的控制,实现机构在图 4a 所示变换位形下,在两种不同运动模式之间的变换。值得注意的是,该空间 4R 机构的两种运动模式性质不同,一种为沿固定轴线转动,该运动属于 1 维转动位移子群;另一种转动轴线在空间连续变化,该运动属于 1 维转动位移流形。利用这种空间 4R 球面机构所具有的运动特性,可设计具有固定转动轴线和变转动轴线两种运动模式的 3T1R 并联机构。

3 具有固定转动轴线和变转动轴线的两种 3T1R 运动模式的并联机构

由图 4 机构的运动特性可知,空间 4R 球面机构的结构参数 $\alpha_{12} = \alpha, \alpha_{23} = 180^\circ - \alpha, \alpha_{34} = 90^\circ, \alpha_{41} = 90^\circ$,且 $\alpha \neq 90^\circ$ 时,空间 4R 机构具有两种运动模式,连杆具有固定转动轴线和变转动轴线的两种 1 维转动运动模式。将 3 个沿坐标系,移动方向正交的移动副串联后,连接图 4 所示机构的连杆 1 后,连杆 3 所具有的运动可用位移流形表示为

$$\begin{aligned} & \{T_X\}\{T_Y\}\{T_Z\}(\{R(X)\} \cup \{R(v)\}) = \\ & \{T_X\}\{T_Y\}\{T_Z\}\{R(X)\} \cup \{T_X\}\{T_Y\}\{T_Z\}\{R(v)\} \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\{R(X)\}$ ——1 维转动位移子群^[24], 转轴平行于 X 轴

$\{T_X\}$ 、 $\{T_Y\}$ 、 $\{T_Z\}$ ——沿坐标轴的 1 维移动子群

v ——可变的转动轴线, 这种特殊的转动运动并不属于 12 种位移子群

$\{R(v)\}$ ——1 维转动位移流形

$\{T_X\}\{T_Y\}\{T_Z\}\{R(v)\}$ 不属于 12 种位移子群, 代表 4 维位移流形。式 (12) 中的 $(\{R(X)\} \cup \{R(v)\})$ 表示两种运动模式的并集, 根据产生这种运动的生成元, 可写成

$$\begin{aligned} & (\{R(X)\} \cup \{R(v)\}) = \\ & \{R(X)\}\{R(u)\} \cap \{R(Y)\}\{R(X)\} \end{aligned} \quad (13)$$

式 (13) 中 $\{R(X)\}\{R(u)\}$ 对应的生成元为图 4 的支链 R_1R_2 , 式 (13) 中 $\{R(Y)\}\{R(X)\}$ 对应的生成元为图 4 中的支链 R_4R_3 , 结合式 (12), 得到

$$\begin{aligned} & \{T_X\}\{T_Y\}\{T_Z\}(\{R(X)\} \cup \{R(v)\}) = \\ & \{T_X\}\{T_Y\}\{T_Z\}(\{R(X)\}\{R(u)\} \cap \\ & \{R(Y)\}\{R(X)\}) = \\ & \{T_X\}\{T_Y\}\{T_Z\}\{R(X)\}\{R(u)\} \cap \\ & \{T_X\}\{T_Y\}\{T_Z\}\{R(Y)\}\{R(X)\} \end{aligned} \quad (14)$$

由于两种 3T1R 运动模式都具有 4 个自由度, 使用式 (14) 中位移流形 $\{T_X\}\{T_Y\}\{T_Z\}\{R(X)\}\{R(u)\}$ 、 $\{T_X\}\{T_Y\}\{T_Z\}\{R(Y)\}\{R(X)\}$ 对应的运动链作为并联机构的两条支链, 再加上 2 个与其结构相同的并联支链后, 支链末端的运动求交, 运动不会发生改变。支链 1 的结构为 ${}^ZP^Y P^X P^X R^u R$, 支链 1 与支链 3 的机构相同, 令向量 X 转到 u 的转角为 α , 支链 2 的结构为 ${}^Y P^X P^Z P^Y R^X R$, 支链 2 与支链 4 的机构相同, 机构的结构简图如图 6 所示。文献[25]根据移动副和转动副的数目列举了 PPPRR 类型的运动链。可选取 RRRRR 支链进行建模, 其结构简图如图 7 所示。运动链 B_1A_1 的结构为 ${}^Y R^Y R^Y R^u R^u R$ 。旋转轴 R_{13} 和旋转轴 R_{14} 之间的角度为 60° 。运动链 B_1A_1 的结构与运动链 B_3A_3 的结构相同。运动链 B_2A_2 的结构为 ${}^X R^X R^X R^Y R^Y R$ 。运动链 B_2A_2 的结构与运动链 B_4A_4 的结构相同。运动链 3 对动平台施加的约束与运动链 1 对动平台施加的约束相同。运动链 4 对动平台施加的约束与运动链 2 对动平台施加的约束相同。

3.1 固定转动轴线 3T1R 运动模式

3.1.1 自由度分析

如图 8 所示支链 B_1A_1 的结构为 ${}^Y R^Y R^Y R^u R^u R$ 。转轴 R_{13} 和转轴 R_{14} 之间的角度为 60° 。运动链 B_1A_1

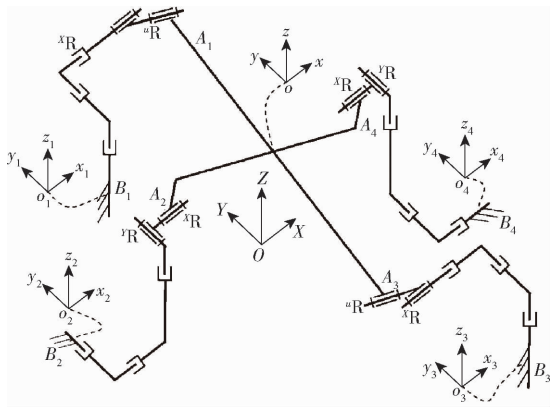


图 6 具有固定转动轴线和变转动轴线的 3T1R 并联机构简图

Fig. 6 Sketch of 3T1R parallel mechanism with fixed and variable rotation axis

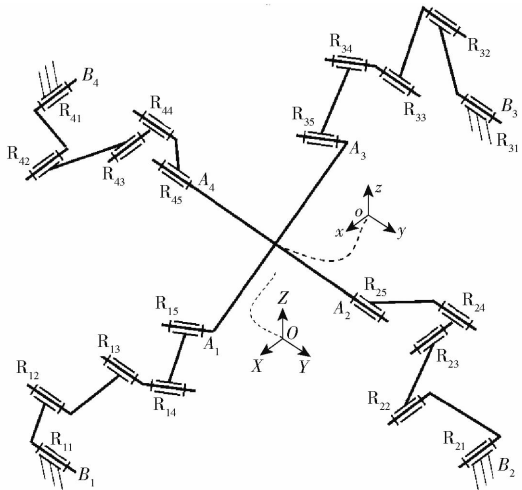


图 7 不含有被动副的具有固定转动轴线和变转动轴线的 3T1R 并联机构简图

Fig. 7 Sketch of 3T1R parallel mechanism with fixed and variable rotation axis without passive moving pair

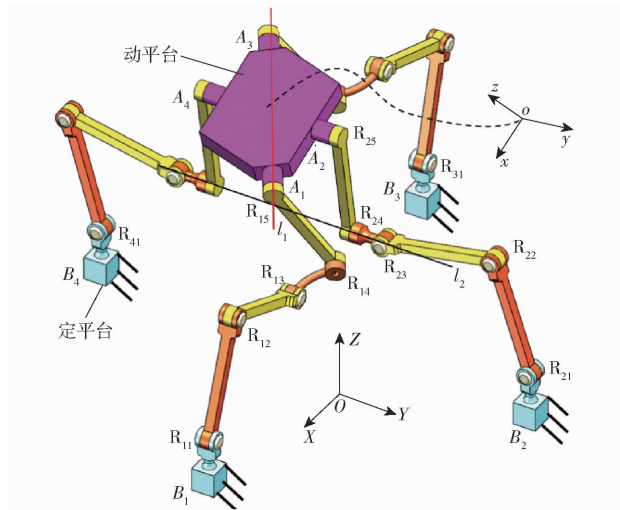


图 8 定轴线 3T1R 运动模式

Fig. 8 Fixed axis 3T1R motion mode

的结构与运动链 B_3A_3 的结构相同。运动链 B_2A_2 的结构为 ${}^X R^X R^X R^Y R^Y R$ 。运动链 B_2A_2 的结构与运动链

B_4A_4 的结构相同。运动链 3 对动平台施加的约束与运动链 1 对移动平台施加的约束相同。运动链 4 对动平台施加的约束与运动链 2 对动平台施加的约束相同。在图 8 中,运动链 B_1A_1 、 B_2A_2 施加在动平台上的约束旋量可以在固定坐标系 $OXYZ$ 中表示为

$$\begin{cases} {}^0\mathcal{S}_{11}^r = (0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & b_1) \\ {}^0\mathcal{S}_{21}^r = (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1) \end{cases} \quad (15)$$

支链 1 与支链 3,支链 2 与支链 4 施加在动平台上的约束相同,在机构的一般位形下,动平台上施加的约束系存在冗余约束, $v=2$,采用修正的 Kutzbach-Grübler 公式计算机构的自由度为 4。

结合动平台上的约束,对其求解互易积,可知机构在图 8 所示位形下,具有 3T1R 运动模式,转动轴线平行于 Y 轴。根据文献[26]中的方法判定运动模式是否瞬时,对应每一个自由度和其性质依次给出相对起始位型的一个足够小的有限位移量。可以验证该 3T1R 运动模式是全周的。

3.1.2 固定转动轴线 3T1R 模式驱动副选择合理性分析

选择转动副 R_{11} 、 R_{21} 、 R_{31} 和 R_{41} 作为驱动副。当驱动副 R_{11} 、 R_{21} 、 R_{31} 和 R_{41} 在图 8 中被锁定时,施加到动平台的驱动力旋量为

$$\begin{cases} {}^0\mathcal{S}_1^a = (a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1) \\ {}^0\mathcal{S}_2^a = (a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2) \\ {}^0\mathcal{S}_3^a = (a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3) \\ {}^0\mathcal{S}_4^a = (a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4) \end{cases} \quad (16)$$

驱动力旋量 ${}^0\mathcal{S}_1^a$ 是一个空间力旋量,其方向是转轴 R_{12} 和 R_{13} 所在平面与 R_{14} 和 R_{15} 所在平面的交线。由式(15)、(16)中的旋量组成的旋量系可知,在机构的一般位形下,该 8 个旋量在 3T1R 运动模式下线性相关,施加在移动平台上的约束系统有两个冗余约束 $v=2$,计算锁定驱动后机构自由度为 0。

锁定 4 个驱动副后,该机构具有 0 自由度。在图 8 所示的机构位形下,所选择的 4 个驱动副可实现机构在固定转动轴线 3T1R 运动模式下的控制。

3.2 3T1R 运动模式变换位形

3.2.1 机构自由度分析

机构在图 8 所示位形绕平行于 Y 轴的轴线转动后,机构处于图 9 所示机构位形,此位形下,4 条支链中的转动副轴线均平行于 OXY 平面。运动链 1、2 施加在动平台上的约束旋量可以在固定坐标系 $OXYZ$ 中表示为

$$\begin{cases} {}^0\mathcal{S}_{11}^r = (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1) \\ {}^0\mathcal{S}_{21}^r = (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1) \end{cases} \quad (17)$$

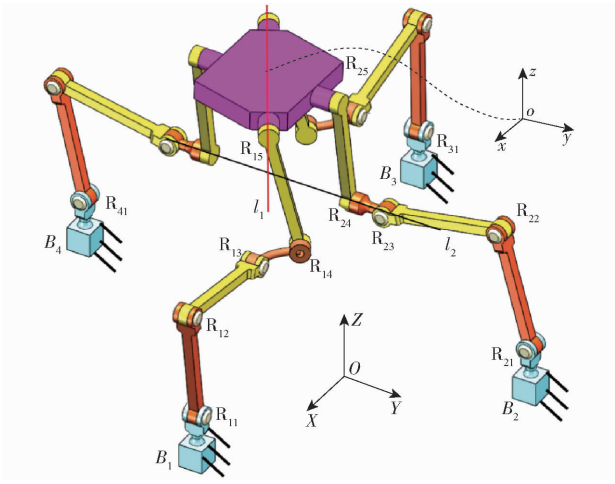


图 9 运动模式变换位形

Fig. 9 Motion mode transformation configuration

式(17)中 ${}^0\mathcal{S}_{11}^r$ 、 ${}^0\mathcal{S}_{21}^r$ 表示两个平行于 Z 轴的力偶旋量,由于支链 1 与支链 3,支链 2 与支链 4 施加在动平台上的约束相同,在机构的一般位形下,动平台上施加的约束系存在冗余约束 $v=3$,计算机构的自由度为 5。

机构具有 5 个自由度,结合动平台上的约束,对其求解互易积,可知机构在图 9 所示位形下,具有 3T2R 运动。根据 3.1 节的分析可知,当机构从图 9 所示位形绕平行于 Y 轴的轴线转动后,机构进入固定转动轴线 3T1R 运动模式,因而图 9 所示机构具有的 3T2R 运动是瞬时的。

3.2.2 驱动副选择的合理性分析

在图 9 所示机构位形下,驱动副 R_{11} 、 R_{21} 、 R_{31} 和 R_{41} 被锁定后,施加到动平台的驱动力旋量为

$$\begin{cases} {}^0\mathcal{S}_1^a = (g_1 & h_1 & i_1 & j_1 & k_1 & l_1) \\ {}^0\mathcal{S}_2^a = (g_2 & h_2 & i_2 & j_2 & k_2 & l_2) \\ {}^0\mathcal{S}_3^a = (g_3 & h_3 & i_3 & j_3 & k_3 & l_3) \\ {}^0\mathcal{S}_4^a = (g_4 & h_4 & i_4 & j_4 & k_4 & l_4) \end{cases} \quad (18)$$

由式(17)、(18)组成的旋量系可知,在图 9 的机构位形下,旋量系中的 8 个旋量是线性相关的。施加在移动平台上的约束旋量系中有 3 个冗余约束 $v=3$,计算机构的自由度为 1。

锁定机构 4 个驱动副后,该机构有 1 个自由度。在图 9 所示的机构位形下,所选的 4 个驱动副无法实现机构运动模式变换。因而需要增加 1 个辅助驱动副,来实现机构运动模式的变换。选择转动副 R_{12} 作为辅助驱动副。锁定该驱动副后,作用在动平台上的驱动力旋量为

$${}^0\mathcal{S}_{11}^a = (a_1' & b_1' & c_1' & d_1' & e_1' & f_1') \quad (19)$$

由式(17)~(19)组成的旋量系可知,在机构的运动模式变换位形下,该 9 个旋量线性相关。在动

平台上作用的约束旋量系中有 3 个冗余约束 $v = 3$ ，计算机构的自由度为 0。

锁定 4 个驱动副和 1 个辅助驱动副后，该机构自由度为 0。在图 9 所示的配置下，4 个驱动副和 1 个辅助驱动副可以实现机构 3T2R 瞬时自由度位形下的控制。

3.3 变转动轴线 3T1R 运动模式

3.3.1 机构自由度分析

控制图 9 中 4 个驱动副和 1 个辅助驱动副，使得机构处于图 10 所示机构位形，支链 1、2 施加在动平台上的约束旋量，在定坐标系 $OXYZ$ 中可表示为

$$\begin{cases} {}^0\mathcal{S}_{11}^r = (0 & 0 & 0 & l_1 & 0 & m_1) \\ {}^0\mathcal{S}_{21}^r = (0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2) \end{cases} \quad (20)$$

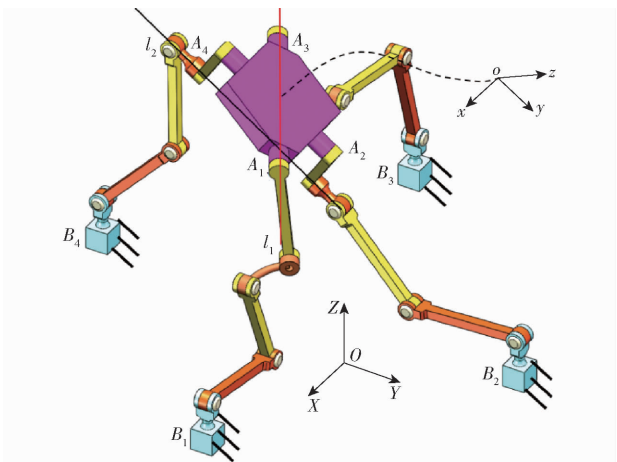


图 10 变轴线 3T1R 运动模式

Fig. 10 Variable axis 3T1R motion mode

由于支链 1 与支链 3，支链 2 与支链 4 施加在动平台上的约束相同，在机构的一般位形下，动平台上施加的约束系存在冗余约束， $v = 2$ ，采用修正的 Kutzbach – Grübler 公式计算机构自由度为 4。

动平台具有 4 个自由度，结合动平台上的约束，对其求解互易积，可知机构在图 10 所示位形下，具有 3T1R 运动模式，可沿垂直于力偶 ${}^0\mathcal{S}_{11}^r$ 、 ${}^0\mathcal{S}_{21}^r$ 的轴线转动， ${}^0\mathcal{S}_{11}^r$ 、 ${}^0\mathcal{S}_{21}^r$ 的方向矢量分别在 XOZ 平面和 YOZ 平面，它们并不固定，因而动平台的转动轴线是变动的。可以验证该变转动轴线 3T1R 运动模式

是全周的。

3.3.2 驱动副选择的合理性分析

当驱动副 R_{11} 、 R_{21} 、 R_{31} 和 R_{41} 在图 10 中被锁定时，4 个支链施加到动平台上的驱动力旋量为

$$\begin{cases} {}^0\mathcal{S}_1^a = (p_1 & q_1 & r_1 & s_1 & t_1 & u_1) \\ {}^0\mathcal{S}_2^a = (p_2 & q_2 & r_2 & s_2 & t_2 & u_2) \\ {}^0\mathcal{S}_3^a = (p_3 & q_3 & r_3 & s_3 & t_3 & u_3) \\ {}^0\mathcal{S}_4^a = (p_4 & q_4 & r_4 & s_4 & t_4 & u_4) \end{cases} \quad (21)$$

由式 (20)、(21) 组成的旋量系可知，在机构的一般构型下，旋量系中的 8 个旋量在变转动轴线的 3T1R 运动模式下线性相关。施加在动平台上的约束旋量系中有两个冗余约束 $v = 2$ ，计算机构的自由度为 0。

锁定 4 个驱动副后，该机构自由度为 0。在图 10 所示机构位形下，选择的 4 个驱动副可以实现机构在变转动轴线 3T1R 运动模式下机构的控制。

综上所述，图 10 所示的机构具有固定转动轴线和变转动轴线的两种 3T1R 运动模式。可以使用 4 个驱动副来控制机构的这两种运动模式。当机构运动模式改变时，机构支链中需要增加一个辅助驱动副。辅助驱动副只在机构运动模式变换位形下工作。

4 结论

(1) 通过分析空间 4R 球面机构的一般运动学方程，对一种具有特殊结构参数的空间 4R 球面机构具有的运动模式进行了讨论，结果表明该空间球面 4R 机构的连杆具有两种运动模式，其具有固定转动轴线和变转动轴线两种转动运动模式。

(2) 使用位移流形理论对具有固定转动轴线和变转动轴线两种运动模式的 3T1R 并联机构进行了综合，在机构运动模式变换的不同位形下，进行了机构自由度和驱动副选取合理性的验证，结果表明该类机构能实现两种模式的运动，在机构运动模式变换位形下，使用辅助驱动副可以实现机构运动模式变换。

参 考 文 献

[1] 康熙，戴建生. 机构学中机构重构的理论难点与研究进展——变胞机构演变内涵、分岔机理、设计综合及其应用[J]. 中国机械工程, 2020, 31(1): 57–71.
KANG Xi, DAI Jiansheng. Theoretical difficulties and research progress of mechanism reconfiguration in mechanism-evolution connotation, furcation principle, design synthesis and application of metamorphic mechanism [J]. China Mechanical Engineering, 2020, 31(1): 57–71. (in Chinese)

[2] WANG J, YAO Y, KONG X. A rolling mechanism with two modes of planar and spherical linkages[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2016, 230 (12): 2110–2123.

[3] LI R, YAO Y, KONG X. A class of reconfigurable deployable platonic mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 105: 409–427.

- [4] GAO Changqing, HUANG Hailin, LI Bing. Design of a truss-shaped deployable grasping mechanism using mobility bifurcation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 139: 346–358.
- [5] 胡胜海, 郭春阳, 余伟, 等. 基于变胞原理的舰炮装填机构刚-柔耦合动力学建模及误差分析[J]. 兵工学报, 2015, 36(8): 1398–1404.
HU Shenghai, GUO Chunyang, YU Wei, et al. Rigid – flexible coupling dynamic modeling and error analysis of loading mechanism of naval gun based on metamorphic principle[J]. Acta Armamentarii, 2015, 36(8): 1398–1404. (in Chinese)
- [6] NURAHMI L, CARO S, SOLICHIN M. A novel ankle rehabilitation device based on a reconfigurable 3 – RPS parallel manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 134: 135–150.
- [7] 沈惠平, 顾晓阳, 李菊, 等. 基于拓扑降耦的 3T1R 并联机构设计与运动学特性分析[J]. 农业机械学报, 2021, 52(8): 406–415.
SHEN Huiping, GU Xiaoyang, LI Ju, et al. Topological coupling-reducing based design of 3T1R parallel mechanism and kinematics performances analysis[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(8): 406–415. (in Chinese)
- [8] 朱小蓉, 吴昊, 沈惠平. 基于虚关节法的 3T1R 混联机构静刚度特性分析[J]. 农业机械学报, 2021, 52(9): 400–409.
ZHU Xiaorong, WU Yu, SHEN Huiping. Static stiffness analysis of 3T1R hybrid manipulator based on virtual joint method[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(9): 400–409. (in Chinese)
- [9] PIERROT F. H4: a new family of 4 – DOF parallel robots[C]//Advanced Intelligent Mechatronics. IEEE, 1999: 508–513.
- [10] KRUT S, BENOIT M, OTA H, et al. I4: a new parallel mechanism for Scara motions[C]//Robotics and Automation, Proceedings of ICRA03, IEEE International Conference on. IEEE, 2003: 1875–1880.
- [11] KRUT S, NABAT V, PIERROT F. A high-speed parallel robot for Scara motions[C]//Robotics and Automation, Proceedings of ICRA'04, IEEE International Conference on. IEEE, 2004: 4109–4115.
- [12] NABAT V, RODRIGUEZ M, COMPANY O, et al. Par4: very high speed parallel robot for pick-and-place[C]//Intelligent Robots and Systems 2005 (IROS 2005), IEEE/RSJ International Conference on. IEEE, 2005: 553–558.
- [13] 方斌, 李剑锋, 卿建喜. 同构支链 H4 并联机构的奇异性分析[J]. 机械工程学报, 2010, 46(21): 42–47.
FANG Bin, LI Jianfeng, QING Jianxi. Singularity analysis of the H4 parallel mechanisms with isomorphic sub-chains[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(21): 42–47. (in Chinese)
- [14] 沈惠平, 许正骁, 许可, 等. 零耦合度且部分解耦的 3T1R 并联机构设计与运动分析[J]. 农业机械学报, 2019, 50(4): 382–392.
SHEN Huiping, XU Zhengxiao, XU Ke, et al. Design and kinematic analysis of zero coupling and partially decoupled 3T1R parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(4): 382–392. (in Chinese)
- [15] 沈惠平, 许可, 杨廷力, 等. 一种零耦合度且运动解耦的新型 3T1R 并联操作手 2 – (RPa3R)3R 的设计及其运动学[J]. 机械工程学报, 2019, 55(5): 53–64.
SHEN Huiping, XU Ke, YANG Tingli, et al. New 3T1R parallel manipulator 2 – (RPa3R)3R with zero coupling degree and partial decoupling: design and kinematics[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(5): 53–64. (in Chinese)
- [16] 贺磊盈, 涂叶凯, 叶伟, 等. 一种可整周回转的新型 3T1R 并联机构运动学分析[J]. 机械工程学报, 2018, 54(11): 151–160.
HE Leiying, TU Yekai, YE Wei, et al. Kinematics analysis of a novel 3T1R parallel manipulator with full rotational capability[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(11): 151–160. (in Chinese)
- [17] LI Q, HERVE J M. Parallel mechanisms with bifurcation of schoenflies motion[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(1): 158–164.
- [18] YANG S, SUN T, HUANG T. Type synthesis of parallel mechanisms having 3T1R motion with variable rotational axis[J]. Mechanism & Machine Theory, 2017, 109: 220–230.
- [19] KONG X. Type synthesis of variable degrees of freedom parallel manipulators with both planar and 3T1R operation modes[C]//ASEM International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2012.
- [20] PUTRAYUDANTO P, NURAHMI L, WEI G. Multi operation modes of 4 – CRU parallel mechanism for 3d-printing building[M]. Mechanism and Machine Science, 2021.
- [21] XU Y, ZHANG D, YAO J, et al. Type synthesis of the 2R1T parallel mechanism with two continuous rotational axes and study on the principle of its motion decoupling[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 108: 27–40.
- [22] ZHAO T, LI E, BIAN H, et al. Type synthesis and analysis of rotational parallel mechanisms with a virtual continuous axis[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 109: 139–154.
- [23] CARL D, CRANE III, JOSEPH D. Kinematic analysis of robot manipulators[M]. Cambridge University Press, 1998: 77.
- [24] JACQUES M H. The mathematical group structure of the set of displacements[J]. Mechanism and Machine Theory, 1994, 29(1): 73–81.
- [25] LEE C, HERVE J. Generators of the product of two Schoenflies motion groups[J]. European Journal of Mechanics, 2010, 29(1): 97–108.
- [26] HUANG Zhen, LI Qingchuan, DING Huafeng. Theory of parallel mechanisms[M]. Springer Netherlands, 2013.