

2-UPR-PRU 并联机构静刚度模型建立与性能分析

饶晨阳¹ 徐灵敏¹ 陈巧红²

(1. 浙江理工大学机械与自动控制学院, 杭州 310018; 2. 浙江理工大学信息学院, 杭州 310018)

摘要: 针对 2-UPR-PRU 两转一移三自由度并联机构, 采用螺旋理论和应变能方法对其进行系统的静刚度模型建立与性能分析。基于闭环矢量法建立 2-UPR-PRU 并联机构的运动学逆解模型。考虑分支杆件的柔性, 采用螺旋理论和应变能方法推导 2-UPR-PRU 并联机构各分支的刚度矩阵, 结合变形协调方程构建 2-UPR-PRU 并联机构的整体刚度矩阵, 得到外载作用下机构在不同位型的变形情况和整体柔度矩阵, 并通过 ANSYS 软件进行数值仿真验证。基于静刚度模型分析 2-UPR-PRU 并联机构的虚功刚度指标, 获得 2-UPR-PRU 并联机构在不同外载和操作高度情况下的静刚度性能分布图谱。研究结果对于设计样机、提高机构的控制精度方面有重要的参考价值。

关键词: 并联机构; 螺旋理论; 静刚度模型; 性能分析; 应变能

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2021)11-0402-09

OSID:



Elastostatic Stiffness Modeling and Performance Analysis of 2-UPR-PRU Parallel Manipulator

RAO Chenyang¹ XU Lingmin¹ CHEN Qiaohong²

(1. Faculty of Mechanical Engineering and Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

2. School of Information, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Parallel manipulators with two rotations and one translation have been attracted the interest from both academic and industry. They can be selected as parallel modules and used in the workpieces machining. A systemic stiffness modeling and performance analysis of a 2-UPR-PRU three degrees of freedom parallel manipulator was presented based on the screw theory and strain energy, where U, P and R denoted universal, prismatic and revolute joint, respectively. Firstly, the inverse kinematics of the 2-UPR-PRU parallel manipulator was presented by using the closed-loop method. Next, considering the compliances of limbs, the stiffness matrices of limbs in the 2-UPR-PRU parallel manipulator were derived through the screw theory and strain energy, and the overall stiffness matrix of the parallel manipulator was obtained by combining the deformation compatibility equations. Under the external wrench, the deformations and overall compliance matrix of the 2-UPR-PRU parallel manipulator in different configurations were obtained, and a numerical simulation based on the ANSYS software was used to verify the correctness of the theoretical result. Finally, the distributions of virtual-work stiffness index were used to evaluate and discuss the stiffness performances of the 2-UPR-PRU parallel manipulator in different external wrenches and operational heights. The stiffness modeling and performance analysis of the 2-UPR-PRU parallel manipulator can provide an important reference for the design of prototype and the high precise control of system.

Key words: parallel manipulator; screw theory; elastostatic stiffness model; performance analysis; strain energy

收稿日期: 2020-11-25 修回日期: 2020-12-31

基金项目: 国家自然科学基金项目(51775513)和浙江省自然科学基金项目(LY17E050028)

作者简介: 饶晨阳(1995—),男,博士生,主要从事并联机构理论和机器学习研究,E-mail: raochy3@gmail.com

通信作者: 陈巧红(1978—),女,副教授,主要从事机器人机构学、人工智能及模式识别研究,E-mail: chen_lisa@zstu.edu.cn

0 引言

相比于串联机构,并联机构具有精度高、载荷能力强、动态性能好等优点,作为骨架已广泛应用于各种先进制造装备中^[1-3]。考虑末端执行器的输出特性,三自由度两转一移(Two rotations and one translation, 2R1T)并联机构适用于复杂曲面加工の場合^[2-7]。通过结合两个串联式移动导轨或在末端安装二自由度串联摆头,整机可实现五自由度运动,用于大型航空结构件加工打磨等^[8-9]。

对用于高速高精度加工场合的 2R1T 并联机构,在设计阶段进行静刚度建模必不可少,既是机构静刚度性能分析的基础,同时也为实际样机设计和提高控制精度提供重要参考依据。静刚度建模主要研究在系统静力平衡的情况下,机构末端执行器的变形情况和外部载荷间的映射关系^[10]。现有的并联机构刚度建模方法主要有^[11-22]:有限元分析法^[11-14]、矩阵结构分析法^[15-18]和虚拟关节建模法^[19-22]。有限元分析法通过借助有限元分析软件对模型进行网格划分,计算外部载荷作用下机构在某一位置下的变形情况,具有较高的精度。但由于机构在不同位置时需重新建模和划分网格,过程较为繁琐且耗时,不适用于参数优化。矩阵结构分析法则通过矩阵运算直接得到机构刚度矩阵,无需网格划分。但该方法涉及到高维矩阵运算,不适用于解析静刚度建模。虚拟关节建模法则通过考虑关节柔性,建立机构末端变形和外部载荷的关系,精度较高。但对于一些结构复杂的并联机构,该方法需进行大量的逆矩阵运算,计算效率不高。

基于并联机构刚度矩阵的特性,现已提出一些刚度指标用于性能评估及参数优化^[11, 23-25],如最大/最小特征值^[24]、特征值平均数^[11]、行列式^[25]等。然而由于刚度矩阵中的元素量纲不统一,会导致基于刚度矩阵的指标物理意义不明确和解释错误^[23]。

本文将对 2-UPR-PRU 三自由度 2R1T 并联机构^[3-4]进行静刚度建模和性能评估。通过螺旋理论和应变能方法^[26-28]得到各分支和整体刚度矩阵。借助 ANSYS 有限元软件,对 2-UPR-PRU 并联机构的理论变形结果和整体柔度矩阵进行数值仿真验证。利用虚功刚度指标(Virtual-work stiffness index, VSI)^[28]评价 2-UPR-PRU 并联机构抵抗外部载荷的能力。通过改变 2-UPR-PRU 并联机构的操作高度分析讨论机构在姿态空间中的刚度性能分布图谱。

1 机构描述与位置逆解

1.1 机构描述

图 1 为 2-UPR-PRU 并联机构的三维模型,其中定平台和动平台由 2 条对称分布的 UPR 分支(B_1A_1/B_2A_2)和 1 条 PRU 分支(B_3A_3)连接,通过驱动 3 个 P 副可实现动平台的 2 个转动和 1 个移动。各分支中的关节转轴定义如下:2 条 UPR 分支中 U 副的第 1 个转轴共线,且方向和 PRU 分支中 U 副的第 1 个转轴和固接在定平台上的 R 副转轴平行;2 个 UPR 分支中 U 副的第 2 个转轴相互平行,且同时平行于和动平台固接的 R 副转轴和 PRU 分支中 U 副的第 2 个转轴。

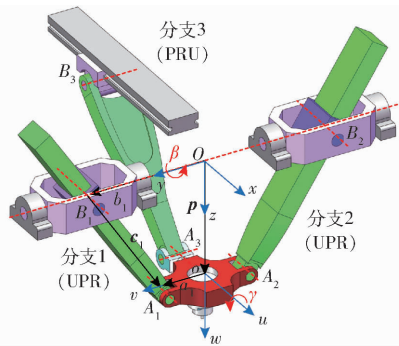


图 1 2-UPR-PRU 并联机构

Fig. 1 2-UPR-PRU parallel manipulator

如图 1 所示,2-UPR-PRU 并联机构定/动坐标系定义为:定坐标系 $Oxyz$ 的原点 O 为 B_1B_2 的中心点, x 轴与 B_3O 重合, y 轴指向点 B_1 , z 轴根据右手定则垂直向下。动坐标系 $ouvw$ 的原点 o 为 A_1A_2 的中心点, u 轴沿着 A_3o 方向, v 轴沿着 oA_1 方向, w 轴垂直于动平台向下。2-UPR-PRU 并联机构的杆件参数定义如下: oA_1 、 oA_2 为 l_1 , OB_1 、 OB_2 为 l_2 , oA_3 为 l_3 , B_3A_3 为 l 。

1.2 位置逆解

2-UPR-PRU 并联机构位置逆解是通过已知尺寸参数和动平台末端点 o 的位姿矢量 $\mathbf{p} = [\beta \ \gamma \ z_o]^T$ (β 为绕 y 轴的旋转角, γ 为绕 u 轴的旋转角, z_o 为点 O 和 o 之间的距离),结合旋转矩阵求解出各分支中 P 副的移动距离 q_i ($i = 1, 2, 3$),是进行后续机构静刚度分析和性能评估的基础。

根据 2-UPR-PRU 并联机构的旋转特点^[3-4],动坐标系 $ouvw$ 相对于定坐标系 $Oxyz$ 的旋转矩阵 oR_o 可表示为

$${}^oR_o = \mathbf{R}_{y,\beta} \mathbf{R}_{u,\gamma} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta & s\beta s\gamma & s\beta c\gamma \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{R}_{y,\beta}$ 、 $\mathbf{R}_{u,\gamma}$ ——绕 y 轴和 u 轴的旋转矩阵
 s 、 c ——正弦函数和余弦函数

由于 2-UPR-PRU 并联机构的结构特征,动平台末端点 o 的运动限制在 $y=0$ 平面内,这一特点大大降低了机构反解推导的复杂性。如图 1 所示, \mathbf{c}_i 表示 B_iA_i ($i=1,2,3$) 位置矢量。另外,机构中的 oA_i 和 OB_i 位置矢量可分别表示为

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = {}^o\mathbf{R}_o [0 \quad l_1 \quad 0]^T \\ \mathbf{a}_2 = {}^o\mathbf{R}_o [0 \quad -l_1 \quad 0]^T \\ \mathbf{a}_3 = {}^o\mathbf{R}_o [-l_3 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathbf{b}_1 = [0 \quad l_2 \quad 0]^T \\ \mathbf{b}_2 = [0 \quad -l_2 \quad 0]^T \\ \mathbf{b}_3 = [-q_3 \quad 0 \quad 0]^T \end{cases} \quad (2)$$

联立式(1)、(2),代入到闭环矢量链 $\mathbf{c}_i = \mathbf{p} + \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i$ 中,可得到 2-UPR-PRU 并联机构的逆解表达式为

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{(z_o \sec\beta + l_1 s\gamma)^2 + (l_1 c\gamma - l_2)^2} \\ q_2 = \sqrt{(z_o \sec\beta - l_1 s\gamma)^2 + (l_2 - l_1 c\gamma)^2} \\ q_3 = \sqrt{l^2 - (z_o + l_3 s\beta)^2} + l_3 c\beta - z_o \tan\beta \end{cases} \quad (3)$$

2 静刚度建模

结合螺旋理论和应变能方法,对 2-UPR-PRU 并联机构进行各分支和整机的静刚度建模分析,用于评估外部载荷对末端位姿输出的影响。在构建静刚度模型前,需进行如下假设:①本研究考虑杆件的柔性,包括弯曲、剪切、拉伸/压缩和扭转变形。②机构中的定平台、动平台和所有运动关节均被认为是刚体。③忽略机构中各部件的重力和摩擦力。

2.1 分支刚度矩阵

选用第 1 条 UPR 分支和 PRU 分支作为研究对象。在构建分支刚度矩阵前,需确定分支的驱动力螺旋和约束力螺旋^[29]。参照文献[3],在定坐标系下,第 1 条 UPR 分支的驱动/约束力螺旋可表示为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1^T = (c_1/|c_1|; \mathbf{b}_1 \times c_1/|c_1|) \\ \mathcal{S}_{11}^r = (c\beta \quad 0 \quad -s\beta; -s\beta l_2 \quad 0 \quad -c\beta l_2) \\ \mathcal{S}_{12}^r = (0 \quad 0 \quad 0; s\beta \quad 0 \quad c\beta) \end{cases} \quad (4)$$

式中 \mathcal{S}_1^T ——过点 B_1 且沿着 B_1A_1 方向的驱动螺旋
 \mathcal{S}_{11}^r ——过点 B_1 且沿着 R 副轴线方向的约束螺旋
 \mathcal{S}_{12}^r ——垂直于 U 副的约束螺旋

如图 2a 所示,驱动/约束力螺旋的幅值分别定义为 f_{11} 、 f_{12} 和 m_{11} 。为方便进行投影,在 UPR 分支中建立分支坐标系 $A_1x_1y_1z_1$,其中 y_1 轴沿着 R 副的轴线方向, z_1 轴沿着 B_1A_1 方向, x_1 轴可通过右手定则

得到,如图 2b 所示。根据力学知识,作用于点 B_1 的约束力 f_{12} 等效于作用于点 A_1 的约束力 f_{12} 加上沿着 x_1 轴的约束力矩 m_{12} ,其可表示为

$$\mathbf{m}_{12} = -q_1 \mathbf{z}_1 \times f_{12} \mathbf{y}_1 = q_1 f_{12} \mathbf{x}_1 = m_{12} \mathbf{x}_1 \quad (5)$$

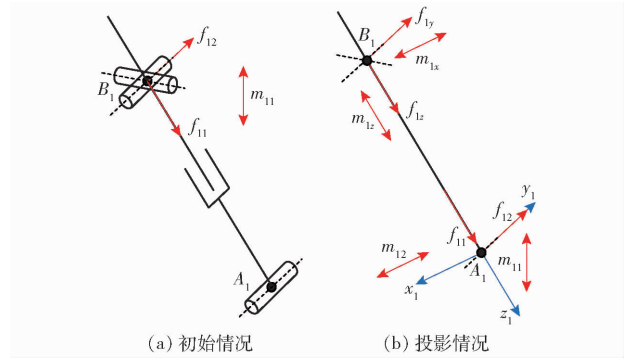


图 2 UPR 分支上驱动力和约束力的分布情况
 Fig. 2 Distributions of actuation and constraint wrenches acting on UPR limb

根据图 2b 中驱动/约束力的投影结果,UPR 分支中任意横截面处的内力/内力矩可表示为

$$\begin{cases} f_{1x} = 0 \\ f_{1y} = f_{12} \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1 = f_{12} \\ f_{1z} = f_{11} \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1 = f_{11} \\ m_{1x} = (v_1 \mathbf{z}_1 \times f_{12} \mathbf{y}_1) \cdot \mathbf{x}_1 + m_{11} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + m_{12} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 = \\ \quad m_{11} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + q_1 f_{12} - v_1 f_{12} \\ m_{1y} = m_{11} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{y}_1 + m_{12} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_1 = 0 \\ m_{1z} = m_{11} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{z}_1 + m_{12} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{z}_1 = m_{11} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{z}_1 \end{cases} \quad (6)$$

式中 \mathbf{n}_1 ——约束力矩 m_{11} 的方向矢量
 v_1 ——选定横截面到点 A_1 的距离

因此,UPR 分支应变能可表示为

$$\begin{aligned} U_1 = \int_0^{q_1} & \left(\frac{f_{1z}^2}{2E_{q_1} A_{q_1}} + \frac{f_{1y}^2}{2G_{q_1} A_{q_1y}} + \frac{m_{1x}^2}{2E_{q_1} I_{q_1x}} + \frac{m_{1z}^2}{2G_{q_1} J_{q_1}} \right) dv_1 = \\ & \frac{q_1}{2E_{q_1} A_{q_1}} f_{11}^2 + \frac{q_1}{2G_{q_1} A_{q_1y}} f_{12}^2 + \\ & \int_0^{q_1} \frac{(m_{11} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + q_1 f_{12} - v_1 f_{12})^2}{2E_{q_1} I_{q_1x}} dv_1 + \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{z}_1)^2 q_1}{2G_{q_1} J_{q_1}} m_{11}^2 = \\ & \frac{q_1}{2E_{q_1} A_{q_1}} f_{11}^2 + \frac{q_1}{2G_{q_1} A_{q_1y}} f_{12}^2 + \frac{q_1^3}{6E_{q_1} I_{q_1x}} f_{12}^2 + \\ & \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1 q_1^2}{2E_{q_1} I_{q_1x}} f_{12} m_{11} + \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1)^2 q_1}{2E_{q_1} I_{q_1x}} m_{11}^2 + \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{z}_1)^2 q_1}{2G_{q_1} J_{q_1}} m_{11}^2 \end{aligned} \quad (7)$$

式中 E_{q_1} ——UPR 分支弹性模量
 G_{q_1} ——UPR 分支剪切模量
 A_{q_1} ——分支横截面面积
 A_{q_1y} ——分支横截面沿着 y_1 轴的有效面积
 I_{q_1x} ——关于 x_1 轴的横截面惯性矩
 J_{q_1} ——横截面极惯性矩
 根据式(7),第 1 条 UPR 分支沿着 3 个驱动/约

束力方向的变形矢量 $\delta_1 = [\delta_{11} \ \delta_{12} \ \psi_{11}]^T$ 可通过运用卡氏第二定理得到,即

$$\begin{cases} \delta_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial f_{11}} = \frac{q_1}{E_{q_1} A_{q_1}} f_{11} \\ \delta_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial f_{12}} = \frac{q_1}{G_{q_1} A_{q_1,y}} f_{12} + \frac{q_1^3}{3E_{q_1} I_{q_1,x}} f_{12} + \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1 q_1^2}{2E_{q_1} I_{q_1,x}} m_{11} \\ \psi_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial m_{11}} = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1 q_1^2}{2E_{q_1} I_{q_1,x}} f_{12} + \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1)^2 q_1}{E_{q_1} I_{q_1,x}} m_{11} + \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{z}_1)^2 q_1}{G_{q_1} J_{q_1}} m_{11} \end{cases} \quad (8)$$

将式(8)表示为矩阵形式

$$[\delta_{11} \ \delta_{12} \ \psi_{11}]^T = \mathbf{C}_1 [f_{11} \ f_{12} \ m_{11}]^T \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{C}_1 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{q_1}{E_{q_1} A_{q_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q_1}{G_{q_1} A_{q_1,y}} + \frac{q_1^3}{3E_{q_1} I_{q_1,x}} & \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1 q_1^2}{2E_{q_1} I_{q_1,x}} \\ 0 & \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1 q_1^2}{2E_{q_1} I_{q_1,x}} & \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1)^2 q_1}{E_{q_1} I_{q_1,x}} + \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{z}_1)^2 q_1}{G_{q_1} J_{q_1}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中 \mathbf{C}_1 ——3×3 的对称分支柔度矩阵

因此,根据式(10)可得到第 1 条 UPR 分支的刚度矩阵 \mathbf{K}_1 为

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{C}_1^{-1} \quad (11)$$

PRU 分支的刚度矩阵构建过程类似于 UPR 分支。在定坐标系下,该分支的驱动/约束力螺旋可表示为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_3^T = (\mathbf{c}_3 / |\mathbf{c}_3|; \mathbf{b}_3 \times \mathbf{c}_3 / |\mathbf{c}_3|) \\ \mathcal{S}_{31}^r = (0 \ 1 \ 0; -x_{A_3} \tan\beta - z_{A_3} \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{32}^r = (0 \ 0 \ 0; s\beta \ 0 \ c\beta) \end{cases} \quad (12)$$

式中 \mathcal{S}_3^T ——过点 B_3 且沿着 B_3A_3 方向的驱动螺旋
 \mathcal{S}_{31}^r ——过点 A_3 且沿着 R 副轴线方向的约束螺旋
 \mathcal{S}_{32}^r ——垂直于 U 副的约束螺旋

PRU 分支上的 3 个驱动/约束力如图 3a 所示,

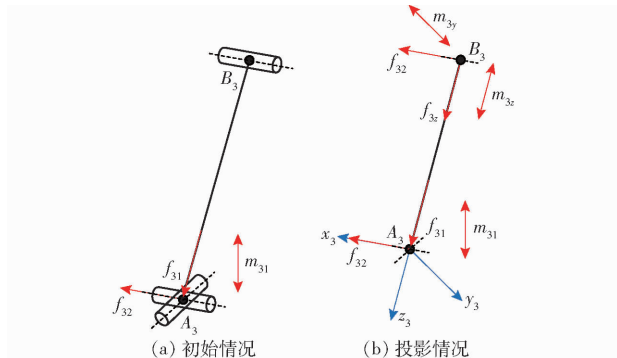


图 3 PRU 分支上驱动力和约束力的分布情况
 Fig.3 Distributions of actuation and constraint wrenches acting on PRU limb

其幅值分别定义为 f_{31} 、 f_{32} 和 m_{31} 。同样地,在 PRU 分支中建立分支坐标系 $A_3x_3y_3z_3$,其中 x_3 轴沿着 R 副的轴线方向, z_3 轴沿着 B_3A_3 方向, y_3 轴可通过右手定则得到,如图 3b 所示。PRU 分支中任意横截面处的内力/内力矩可表示为

$$\begin{cases} f_{3x} = f_{32} \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3 = f_{32} \\ f_{3y} = 0 \\ f_{3z} = f_{31} \mathbf{z}_3 \cdot \mathbf{z}_3 = f_{31} \\ m_{3x} = m_{31} \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{x}_3 = 0 \\ m_{3y} = (v_3 \mathbf{z}_3 \times f_{32} \mathbf{x}_3) \cdot \mathbf{y}_3 + m_{31} \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{y}_3 = m_{31} \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{y}_3 + v_3 f_{32} \\ m_{3z} = m_{31} \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{z}_3 \end{cases} \quad (13)$$

式中 \mathbf{n}_3 ——约束力矩 m_{31} 的方向矢量

v_3 ——选定横截面到点 A_3 的距离

通过得到 PRU 分支的应变能,该分支的变形矢量 $\delta_3 = [\delta_{31} \ \delta_{32} \ \psi_{31}]^T$ 和驱动/约束力幅值之间的关系可通过 PRU 分支柔度矩阵得到

$$[\delta_{31} \ \delta_{32} \ \psi_{31}]^T = \mathbf{C}_3 [f_{31} \ f_{32} \ m_{31}]^T \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} \frac{l}{E_l A_l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{G_l A_{lx}} + \frac{l^3}{3E_l I_{ly}} & \frac{\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{y}_3 l^2}{2E_l I_{ly}} \\ 0 & \frac{\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{y}_3 l^2}{2E_l I_{ly}} & \frac{(\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{y}_3)^2 l}{E_l I_{ly}} + \frac{(\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{z}_3)^2 l}{G_l J_l} \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中 E_l ——PRU 分支弹性模量

G_l ——PRU 分支剪切模量

A_l ——分支横截面的面积

A_{lx} ——分支横截面沿着 x_3 轴的有效面积

I_{ly} ——关于 y_3 轴的横截面惯性矩

J_l ——横截面极惯性矩

同理,PRU 分支的刚度矩阵 \mathbf{K}_3 为

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{C}_3^{-1} \quad (16)$$

2.2 整体刚度矩阵

根据 UPR 和 PRU 分支中驱动/约束力的分布情况,可得到作用于机构动平台的外部载荷和反作用力,如图 4 所

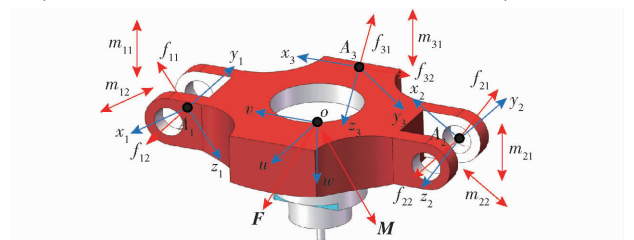


图 4 动平台上作用的外部载荷和反作用力
 Fig.4 External wrench and reaction forces acting on moving platform

示, $\mathbf{W} = [\mathbf{F}^T \quad \mathbf{M}^T]^T$ 为作用于动平台原点 o 的外部载荷, $\mathbf{F} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T$ 表示施加的力矢量, $\mathbf{M} = [M_x \quad M_y \quad M_z]^T$ 表示施加的力矩矢量。

动平台的力/力矩平衡方程可表示为

$$\mathbf{W} = [\mathbf{J}_{w_1} \quad \mathbf{J}_{w_2} \quad \mathbf{J}_{w_3}] [\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3] = \mathbf{J}_w \mathbf{f} \quad (17)$$

其中 $\mathbf{J}_{w_1} = [\mathcal{S}_1^T \quad \mathcal{S}_{11}^r \quad \mathcal{S}_{12}^r]$

$$\mathbf{J}_{w_2} = [\mathcal{S}_2^T \quad \mathcal{S}_{21}^r \quad \mathcal{S}_{22}^r]$$

$$\mathbf{J}_{w_3} = [\mathcal{S}_3^T \quad \mathcal{S}_{31}^r \quad \mathcal{S}_{32}^r]$$

$$\mathbf{f}_1 = [f_{11} \quad f_{12} \quad m_{11}]^T$$

$$\mathbf{f}_2 = [f_{21} \quad f_{22} \quad m_{21}]^T$$

$$\mathbf{f}_3 = [f_{31} \quad f_{32} \quad m_{31}]^T$$

式中 \mathbf{J}_{w_1} ——分支 1 中维度为 6×3 的力矩阵

\mathbf{J}_{w_2} ——分支 2 中维度为 6×3 的力矩阵

\mathbf{J}_{w_3} ——分支 3 中维度为 6×3 的力矩阵

\mathbf{J}_w —— 6×9 的力矩阵

\mathbf{f}_1 ——分支 1 中 3×1 的力幅值矢量

\mathbf{f}_2 ——分支 2 中 3×1 的力幅值矢量

\mathbf{f}_3 ——分支 3 中 3×1 的力幅值矢量

\mathbf{f} —— 9×1 的力幅值矢量

根据虚功原理, 各分支变形矢量和动平台原点的变形矢量 \mathbf{D} 满足如下关系

$$\mathbf{W}^T \mathbf{D} = [\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3]^T [\boldsymbol{\delta}_1 \quad \boldsymbol{\delta}_2 \quad \boldsymbol{\delta}_3] = \mathbf{f}_1^T \boldsymbol{\delta}_1 + \mathbf{f}_2^T \boldsymbol{\delta}_2 + \mathbf{f}_3^T \boldsymbol{\delta}_3 \quad (18)$$

其中 $\mathbf{D} = [\delta x \quad \delta y \quad \delta z \quad \delta \theta \quad \delta \varphi \quad \delta \psi]^T$

式中 $\delta x, \delta y, \delta z$ ——机构沿着 x 轴、 y 轴和 z 轴的线性变形

$\delta \theta, \delta \varphi, \delta \psi$ ——机构绕着 x 轴、 y 轴和 z 轴的角度变形

结合式(17)、(18), $\boldsymbol{\delta}_i (i = 1, 2, 3)$ 和 \mathbf{D} 的变形协调方程可表示为

$$[\boldsymbol{\delta}_1 \quad \boldsymbol{\delta}_2 \quad \boldsymbol{\delta}_3] = [\mathbf{J}_{w_1}^T \quad \mathbf{J}_{w_2}^T \quad \mathbf{J}_{w_3}^T] \mathbf{D} \quad (19)$$

将式(9)、(14)、(19)代入式(17)可得

$$\mathbf{W} = \mathbf{J}_{w_1} \mathbf{K}_1 \mathbf{J}_{w_1}^T \mathbf{D} + \mathbf{J}_{w_2} \mathbf{K}_2 \mathbf{J}_{w_2}^T \mathbf{D} + \mathbf{J}_{w_3} \mathbf{K}_3 \mathbf{J}_{w_3}^T \mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{J}_{w_i} \mathbf{K}_i \mathbf{J}_{w_i}^T \mathbf{D} = \mathbf{K} \mathbf{D} \quad (20)$$

从式(20)可得 2-UPR-PRU 并联机构的整体刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{J}_{w_i} \mathbf{K}_i \mathbf{J}_{w_i}^T \quad (21)$$

通过式(19)~(21)得到机构中各分支的力幅值矢量表示为

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{K}_i \mathbf{J}_{w_i}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{W} \quad (22)$$

2.3 理论刚度模型和有限元模型对比

在分析机构刚度性能前, 需验证 2-UPR-PRU

并联机构理论刚度模型的正确性。通过在 ANSYS 软件中建立有限元模型进行对比验证。在有限元模型中, 定平台、动平台和所有运动关节均设为刚性。2-UPR-PRU 并联机构中的杆件长度和材料参数如表 1 所示, 需要注意的是此处 3 个运动分支的横截面均设为相同大小的圆截面, 且各分支的弹性模量和剪切模量相同。

表 1 2-UPR-PRU 并联机构的长度及材料参数

Tab.1 Length and material parameters of 2-UPR-PRU parallel manipulator

参数	数值
l_1/mm	135
l_2/mm	400
l_3/mm	172.5
l/mm	550
d/mm	100
A/mm^2	7 853.98
E/GPa	210
G/GPa	80
β/rad	$\pm \frac{2\pi}{9}$
γ/rad	$\pm \frac{2\pi}{9}$

由于使用有限元模型计算 2-UPR-PRU 并联机构工作空间中所有点的刚度是一个耗时且困难的过程, 因此选取位型和外载不同的 3 个示例进行结果验证, 如表 2 所示。通过建模分析, 可得到 ANSYS 软件中 3 个示例的变形结果, 包括线性变形和角度变形, 如图 5 所示。另外, 表 3 为 2-UPR-PRU 并联机构动平台原点 o 的理论模型变形结果和有限元仿真变形结果, 可以发现两个模型的结果基本一致, 3 个示例中所有的变形相对误差均不超过 0.78%。

表 2 2-UPR-PRU 并联机构的 3 个选择示例

Tab.2 Three selected cases of 2-UPR-PRU parallel manipulator

参数	示例 1	示例 2	示例 3
z/mm	400	400	400
β/rad	0	0	$\frac{\pi}{6}$
γ/rad	0	0	$\frac{\pi}{6}$
F_x/N	0	1	1
F_y/N	0	1	1
F_z/N	1	1	1
$M_x/(\text{N}\cdot\text{m})$	0	1	1
$M_y/(\text{N}\cdot\text{m})$	0	1	1
$M_z/(\text{N}\cdot\text{m})$	0	1	1

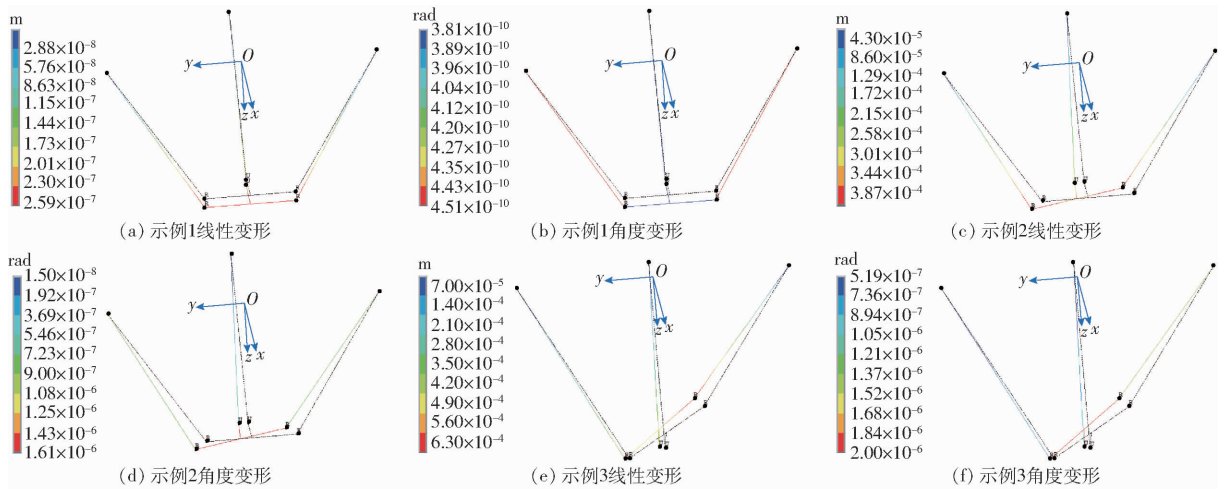


图 5 在 3 个示例下 2-UPR-PRU 并联机构的变形结果

Fig. 5 Deformation results of 2-UPR-PRU parallel manipulator in three cases

表 3 2-UPR-PRU 并联机构理论结果和仿真结果的变形对比

Tab. 3 Deformation comparison between theoretical and simulation results of 2-UPR-PRU parallel manipulator

示例	理论及仿真结果	沿 x 轴线性 变形/mm	沿 y 轴线性 变形/mm	沿 z 轴线性变 形/mm	绕 x 轴角度变 形/rad	绕 y 轴角度变 形/rad	绕 z 轴角度变 形/rad
1	理论结果	-1.5223×10^{-7}	0	2.093×10^{-7}	0	-3.8055×10^{-10}	0
	仿真结果	-1.5234×10^{-7}	-5.5057×10^{-21}	2.0946×10^{-7}	4.1359×10^{-25}	-3.8085×10^{-10}	6.6972×10^{-24}
	相对误差/%	0.07		0.08		0.08	
2	理论结果	-5.1442×10^{-6}	3.1851×10^{-4}	-3.2347×10^{-7}	1.5745×10^{-6}	3.9322×10^{-8}	2.7470×10^{-7}
	仿真结果	-5.1845×10^{-6}	3.2023×10^{-4}	-3.2372×10^{-7}	1.5830×10^{-6}	3.9551×10^{-8}	2.7589×10^{-7}
	相对误差/%	0.78	0.54	0.08	0.54	0.58	0.43
3	理论结果	2.1978×10^{-4}	3.2224×10^{-4}	-2.5205×10^{-3}	1.7192×10^{-6}	7.1147×10^{-7}	-6.8988×10^{-7}
	仿真结果	2.2090×10^{-4}	3.2411×10^{-4}	-2.5341×10^{-3}	1.7300×10^{-6}	7.1542×10^{-7}	-6.9228×10^{-7}
	相对误差/%	0.51	0.58	0.54	0.62	0.55	0.35

除了对比变形结果,也可通过对比两种模型的整体柔度矩阵来验证理论模型的正确性。以示

例 3 为例,其整体理论柔度矩阵和仿真柔度矩阵分别为

$$C_{\text{Theory}} = \begin{bmatrix} 4.8240 \times 10^{-5} & 3.7891 \times 10^{-5} & -4.2934 \times 10^{-5} & 1.8808 \times 10^{-7} & 9.4408 \times 10^{-8} & -1.0590 \times 10^{-7} \\ 3.7891 \times 10^{-5} & 5.7948 \times 10^{-5} & -4.3998 \times 10^{-5} & 2.9389 \times 10^{-7} & 1.2293 \times 10^{-7} & -1.4643 \times 10^{-7} \\ -4.2934 \times 10^{-5} & -4.3998 \times 10^{-5} & 4.2284 \times 10^{-5} & -2.2152 \times 10^{-7} & -1.0335 \times 10^{-7} & 1.1747 \times 10^{-7} \\ 1.8808 \times 10^{-7} & 2.9389 \times 10^{-7} & -2.2152 \times 10^{-7} & 1.5333 \times 10^{-9} & 6.2624 \times 10^{-10} & -7.0077 \times 10^{-10} \\ 9.4408 \times 10^{-8} & 1.2293 \times 10^{-7} & -1.0335 \times 10^{-7} & 6.2624 \times 10^{-10} & 2.8660 \times 10^{-10} & -3.1536 \times 10^{-10} \\ -1.0590 \times 10^{-7} & -1.4643 \times 10^{-7} & 1.1747 \times 10^{-7} & -7.0077 \times 10^{-10} & -3.1536 \times 10^{-10} & 4.6112 \times 10^{-10} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$C_{\text{Simulation}} = \begin{bmatrix} 4.8015 \times 10^{-5} & 3.8102 \times 10^{-5} & -4.2885 \times 10^{-5} & 1.8921 \times 10^{-7} & 9.4772 \times 10^{-8} & -1.0632 \times 10^{-7} \\ 3.8102 \times 10^{-5} & 5.8247 \times 10^{-5} & -4.4234 \times 10^{-5} & 2.9548 \times 10^{-7} & 1.2357 \times 10^{-7} & -1.4706 \times 10^{-7} \\ -4.2885 \times 10^{-5} & -4.4234 \times 10^{-5} & 4.2347 \times 10^{-5} & -2.2278 \times 10^{-7} & -1.0381 \times 10^{-7} & 1.1795 \times 10^{-7} \\ 1.8921 \times 10^{-7} & 2.9548 \times 10^{-7} & -2.2278 \times 10^{-7} & 1.5421 \times 10^{-9} & 6.2963 \times 10^{-10} & -7.0358 \times 10^{-10} \\ 9.4772 \times 10^{-8} & 1.2357 \times 10^{-7} & -1.0381 \times 10^{-7} & 6.2963 \times 10^{-10} & 2.8796 \times 10^{-10} & -3.1671 \times 10^{-10} \\ -1.0632 \times 10^{-7} & -1.4706 \times 10^{-7} & 1.1795 \times 10^{-7} & -7.0358 \times 10^{-10} & -3.1671 \times 10^{-10} & 4.6343 \times 10^{-10} \end{bmatrix} \quad (24)$$

两个柔度矩阵中各个元素的相对误差为

$$\Delta C = \begin{bmatrix} 0.47 & 0.55 & 0.11 & 0.60 & 0.38 & 0.40 \\ 0.55 & 0.51 & 0.53 & 0.54 & 0.52 & 0.43 \\ 0.11 & 0.53 & 0.15 & 0.57 & 0.44 & 0.41 \\ 0.60 & 0.54 & 0.57 & 0.57 & 0.54 & 0.40 \\ 0.38 & 0.52 & 0.44 & 0.54 & 0.47 & 0.43 \\ 0.40 & 0.43 & 0.41 & 0.40 & 0.43 & 0.53 \end{bmatrix} \quad (25)$$

从式(25)可以发现,所有相对误差均不超过0.60%,是可接受的。上述两个对比结果均证明了2-UPR-PRU并联机构理论静刚度模型的正确性,其可替代ANSYS软件的分析结果,为后续的静刚度性能分析提供保障。

3 静刚度性能分析

利用VSI^[28]评估2-UPR-PRU并联机构静刚度性能。不同于其他基于刚度矩阵代数特性的刚度指标,VSI可通过能量来描述机构的刚度性能,且其与外部载荷的大小和方向直接相关,避免了刚度矩阵内元素量纲不同所带来的问题。在外载 \mathbf{W} 作用下,并联机构的虚功 W_v 可表示为

$$W_v = \mathbf{W}^T \mathbf{D} \quad (26)$$

将式(20)代入式(26)中,虚功 W_v 可表示为

$$W_v = \mathbf{W}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{W} \quad (27)$$

根据式(27)虚功刚度指标VSI可定义为

$$\kappa = 1 / (\mathbf{W}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{W}) \quad (28)$$

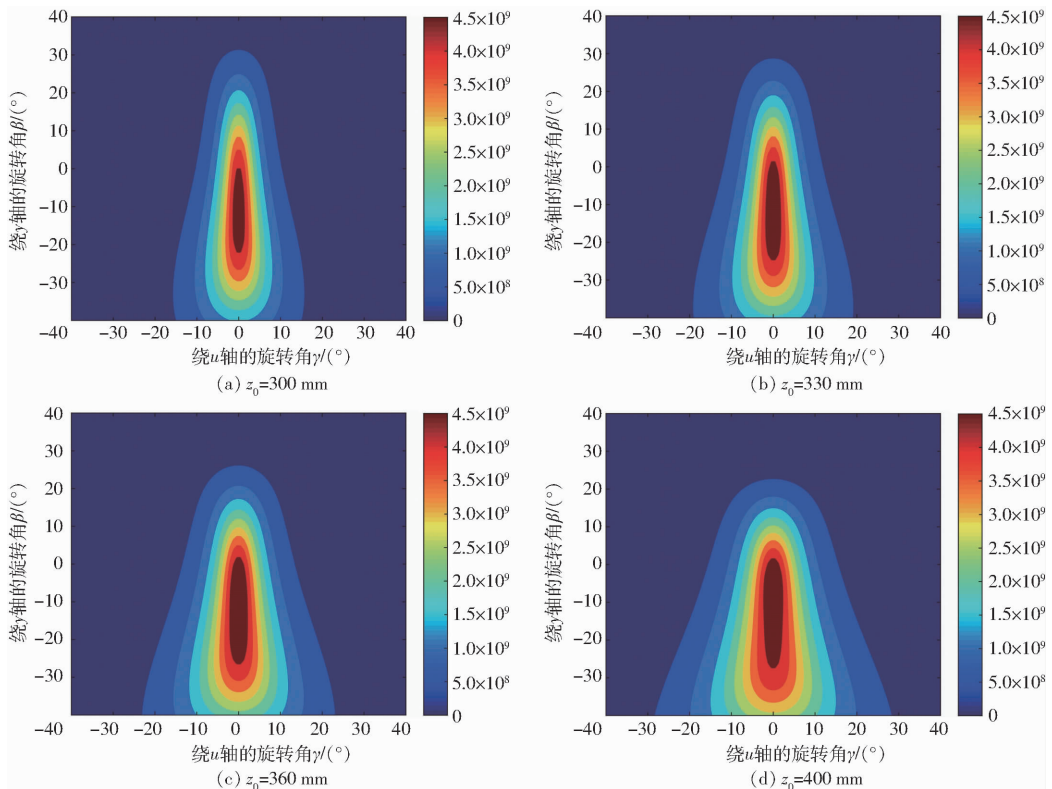


图6 $\mathbf{W} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ 时虚功刚度指标在不同操作高度下的分布情况

Fig. 6 Distributions of VSI in different operational heights when $\mathbf{W} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$

尽管刚度矩阵 \mathbf{K} 中的元素具有不同的量纲,但VSI将其混合的单位转换成了 J^{-1} ,可用于直接测量机构抵抗变形的能力。显而易见, κ 越大,机构在该位型下的刚度性能越好。

根据表1中的杆件参数,可得到2-UPR-PRU并联机构在不同外载和操作高度下的刚度性能分布图谱。图6为2-UPR-PRU并联机构在 $\mathbf{W} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ 作用下的性能分布图谱。可以发现,在不同操作高度下机构的刚度性能均关于 $y=0$ 的平面对称,符合2-UPR-PRU并联机构的结构特征。另外,机构沿着 $\gamma=0^\circ$ 的静刚度性能较好;随着操作高度的增加,机构的刚度性能逐渐变好。在该外载情况下,当操作高度为 $z_0 = 400 \text{ mm}$,姿态范围为 $\beta \in (-30^\circ, 10^\circ)$, $\gamma \in (-10^\circ, 10^\circ)$ 时,2-UPR-PRU并联机构具有较好的刚度性能。图7为2-UPR-PRU并联机构在 $\mathbf{W} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ 作用下的性能分布图谱。不同于图6的分布情况,机构在该外载作用下的性能分布并不关于 $y=0$ 的平面对称,这是由于外载方向造成的;并且机构的刚度性能随着操作高度的增加逐渐变差。在该外载情况下,当操作高度为 $z_0 = 300 \text{ mm}$,姿态范围为 $\beta \in (25^\circ, 35^\circ)$, $\gamma \in (-40^\circ, -20^\circ)$ 时,2-UPR-PRU并联机构具有较好的刚度性能。结合图6、7可以发现,操作高度以及外载的大小和方向对2-UPR-PRU并联机构的刚度性能

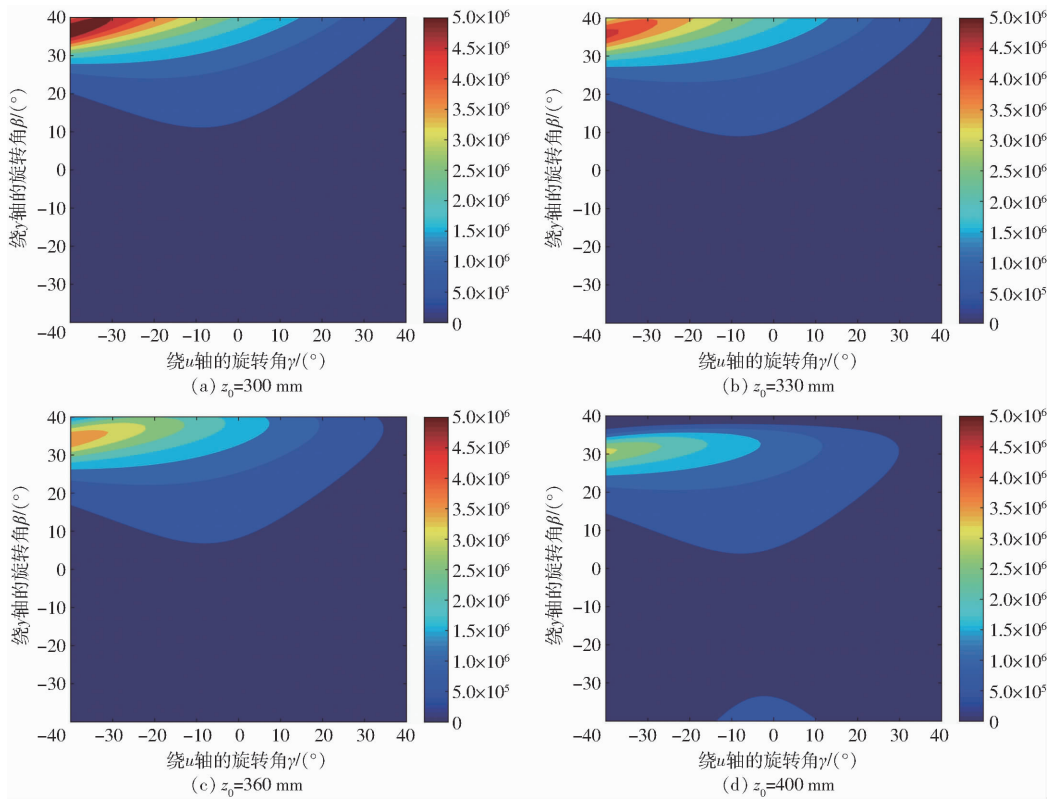


图 7 $\mathbf{W} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ 时虚功刚度指标在不同操作高度下的分布情况

Fig. 7 Distributions of VSI in different operational heights when $\mathbf{W} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

分布有重要影响,为机构的样机设计提供了参考依据。对于只受 z 向外力载荷的情况,可通过在一定范围内提高 2-UPR-PRU 并联机构的操作高度以保障刚度,同时尽量选取机构工作空间的中心区域;对于受一般外部载荷的情况,则需根据机构的刚度性能分布合理选取机构在加工过程中的操作高度及姿态变化范围,通过轨迹规划尽量避开低刚度区域,同时也可根据实际情况适当增大杆件截面以提升 2-UPR-RPU 并联机构的整体刚度。

4 结论

(1) 基于螺旋理论和应变能方法建立了

2-UPR-PRU 并联机构的分支和整体静刚度模型,建模简单,表达直接且含意清晰。

(2) 以机构动平台的变形和整体柔度矩阵为验证对象,和有限元模型的仿真结果进行对比,结果表明理论刚度模型变形和柔度矩阵元素的相对误差分别不超过 0.78% 和 0.60%,验证了 2-UPR-PRU 并联机构理论静刚度模型的正确性,可用于替代 ANSYS 软件进行机构的刚度分析。

(3) 以 VSI 对 2-UPR-PRU 并联机构进行静刚度性能分析,确定了操作高度以及外载大小和方向对 2-UPR-PRU 并联机构刚度性能的影响,为样机设计提供参考。

参 考 文 献

- [1] CLAVEL R. Delta, a fast robot with parallel geometry[C]//Proceedings of 18th International Symposium on Industrial Robots, New York, 1988: 91-100.
- [2] JIN Yan, KONG Xianwen, HIGGINS C, et al. Kinematic design of a new parallel kinematic machine for aircraft wing assembly [C]//Proceedings of the IEEE 10th International Conference on Industrial Informatics, Beijing, 2012: 669-674.
- [3] XU Lingmin, ZHU Xubiao, YE Wei, et al. Kinematic analysis and dimensional synthesis of a new 2R1T parallel kinematic machine [C]//Proceedings of the ASME 2018 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Quebec, 2018: 1-9.
- [4] LI Qinchuan, HERVÉ J M. Type synthesis of 3-DOF RPR - Equivalent parallel mechanisms [J]. IEEE Transactions of Robotics, 2014, 30(6): 1333-1343.
- [5] LI Qinchuan, XU Lingmin, CHEN Qiaohong, et al. New family of RPR - Equivalent parallel mechanisms: design and application [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2017, 30(2): 217-221.
- [6] 张俊, 池长城, 蒋舒佳. 2UPR-SPR 型并联机构精度设计 [J/OL]. 农业机械学报, 2021, 52(7): 411-420.
ZHANG Jun, CHI Changcheng, JIANG Shujia. Accuracy design of 2UPR-RPS parallel mechanism [J/OL]. Transactions of

- the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(7): 411–420. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20210746&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2021.07.046. (in Chinese)
- [7] 沈惠平, 王达, 李菊, 等. 1T2R 并联机构拓扑降耦设计与运动性能分析[J/OL]. 农业机械学报, 2021, 52(5): 370–377. SHEN Huiping, WANG Da, LI Ju, et al. Topological coupling-reducing design and kinematic performance analysis for 1T2R parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(5): 370–377. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20210541&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2021.05.041. (in Chinese)
- [8] WAHL J. Articulated tool head: Germany, WO2000025976A2[P]. 2001–05–11.
- [9] NEUMANN K E. Robot:US,4732525[P]. 1988–03–22.
- [10] SICILIANO B, KHATIB O. Handbook of robotics[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg, 2008: 451–452.
- [11] EI-KHASAWNEH B S, FERREIRA P M. Computation of stiffness and stiffness bounds for parallel link manipulators[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 1999, 39(2): 321–342.
- [12] HUANG Tiao, ZHAO Xingyu, WHITEHOUSE D J. Stiffness estimation of a tripod-based parallel kinematic machine[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2002, 18(1): 50–58.
- [13] AKIN J E. Finite element analysis with error estimators: an introduction to the FEM and adaptive error analysis for engineering students[M]. Butterworth-Heinemann, Burlington, 2005.
- [14] KLIMCHIK A, PASHKEVICH A, CHABLAT D. CAD-based approach for identification of elasto-static parameters of robotic manipulators[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2013, 75: 19–30.
- [15] SOARES JÚNIOR G D L, CARVALHO J C M, GONCALVES R S. Stiffness analysis of multibody systems using matrix structural analysis-MSA[J]. Robotica, 2015, 34(10): 2368–2385.
- [16] YU Guang, WANG Liping, WU Jun. Stiffness modeling approach for a 3-DOF parallel manipulator with consideration of nonlinear joint stiffness[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 123: 137–152.
- [17] DEBLAISE D, HERNOT X, MAURINE P. A systematic analytical method for PKM stiffness matrix calculation[C]// Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Orlando, Florida, 2006: 4213–4219.
- [18] PASHKEVICH A, CHABLAT D, WENGER P. Stiffness analysis of overconstrained parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44: 966–982.
- [19] GOSSELIN C, ZHANG Dan. Stiffness analysis of parallel mechanisms using a lumped model[J]. International Journal of Robotics and Automation, 2002, 17(1): 17–27.
- [20] HOEVENAARS A G, LAMBERT P, HERDER J. Jacobian-based stiffness analysis method for parallel manipulators with non-redundant legs[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2015, 230(3): 341–352.
- [21] MAJOU F, GOSSELIN C, WENGER P, et al. Parametric stiffness analysis of the orthoglide[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42: 296–311.
- [22] SUN T, LIAN B B, SONG Y M. Stiffness analysis of a 2-DOF over-constrained RPM with an articulated traveling platform[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 96: 165–178.
- [23] CARBONE G, CECCARELLI M. Comparison of indices for stiffness performance evaluation[J]. Frontiers of Mechanical Engineering, 2010, 5(3): 270–278.
- [24] COURTEILLE E, DEBLAISE D, MAURINE P. Design optimization of a delta-like parallel robot through global stiffness performance evaluation[C]// Proceedings of 2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Missouri, 2009: 5159–5166.
- [25] XU Qingsong, LI Yangmin. GA-based architecture optimization of a 3-PUU parallel manipulator for stiffness performance[C]// Proceedings of the IEEE 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, Dalian, 2006: 9099–9103.
- [26] HUANG Zhen, LI Qinchuan. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint-synthesis method[J]. International Journal of Robotics Research, 2003, 22(1): 59–79.
- [27] YANG Chao, LI Qinchuan, CHEN Qiaohong, et al. Elastostatic stiffness modeling of overconstrained parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 112: 58–74.
- [28] YAN S J, ONG S K, NEE A Y C. Stiffness analysis of parallelogram-type parallel manipulators using a strain energy method[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2016, 37: 13–22.
- [29] JOSHI S A, TSAI L W. Jacobian analysis of limited-DOF parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(2): 254–258.