doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2021.06.041

3 - RHUR/PUS + PP 混联机器人构型与性能分析

田　昕[1,2]　赵铁石[1,2]　王　唱[1,2]　李二伟[1,2]　盛　煜[1,2]

(1. 燕山大学河北省并联机器人与机电系统实验室, 秦皇岛 066004;
2. 燕山大学先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室, 秦皇岛 066004)

摘要: 为提升串并混联机器人大行程刚度与综合性能,提出一种带随动滑筒的 3 - RHUR/PUS 三自由度并联头串联 *XY* 双导轨的混联五自由度机器人构型。根据非线性约束方程组给出其位置正反解,并基于螺旋理论建立了串并混联的正逆运动学映射关系,基于建立的混联机器人的柔度模型讨论了其方向刚度;综合考虑机器人的转动能力、力传递性能、速度和刚度性能,在利用线性加权法对机器人进行多目标优化的基础上,提出最优拉丁超立方采样(Optimal Latin hypercube sampling, OptLHS)与插值相结合的优化算法,从而缩短了优化计算所需时间,得到了机器人最优尺寸参数。

关键词: 串并混联机器人; 五自由度; 运动学; 刚度; 多目标优化

中图分类号: TP242　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2021)06-0386-11　　**OSID**:

Configuration and Performance Analysis of 3 - RHUR/PUS + PP Hybrid Robot

TIAN Xin[1,2]　ZHAO Tieshi[1,2]　WANG Chang[1,2]　LI Erwei[1,2]　SHENG Yu[1,2]

(1. *Hebei Provincial Key Laboratory of Parallel Robot and Mechatronic System*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*
2. *Key Laboratory of Advanced Forging and Stamping Technology and Science*, *Ministry of Education*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: In order to improve the large travel stiffness in direction *Z* and the comprehensive performance of the hybrid robot, a five degree-of-freedom (DOF) hybrid robot 3 - RHUR/PUS + PP was proposed, which was composed of a 3-DOF parallel head with a following sliding barrel in series double slideways. Firstly, the forward and inverse position solutions were given based on the nonlinear constrained equations. Considering the parallel mechanism and the series mechanism, the forward and inverse kinematics mapping relationships of the hybrid robot were established based on the screw theory, which provided the basis for the research on the overall performance of hybrid robots. The stiffness of the direction without DOF was infinity, because the hybrid robot was lower-mobility hybrid mechanism. Its direction stiffness was discussed by the flexibility model of the hybrid robot. Secondly, taking into account the rotational ability, force transmission performance, speed performance and stiffness performance of the 3 - RHUR/PUS + PP hybrid robot, the hybrid robot was optimized with multiple objectives on the basis of the linear weighted method. The optimization algorithm combining optimal Latin hypercube sampling (OptLHS) and interpolation was proposed, which shortened the time required to optimize the calculation and obtainedthe optimal parameters of the robot. Finally, according to the optimization result, the preferred robot parameters were obtained, and its rotational ability, speed performance and stiffness performance were studied.

Key words: series - parallel hybrid robot; five degree-of-freedom; kinematics; stiffness; multi-target optimization

收稿日期: 2021 - 02 - 22　修回日期: 2021 - 03 - 26

基金项目: 河北省科技计划项目(18961828D)和国家自然科学基金项目(51875496)

作者简介: 田昕(1992—),女,博士生,主要从事混联机器人理论研究,E-mail: txin@vip.163.com

通信作者: 赵铁石(1963—),男,教授,博士生导师,主要从事并联机构理论及其应用研究,E-mail: tszhao@ysu.edu.cn

0　引言

与串联机构相比，并联机构具有结构紧凑、刚度高、承载能力大等优点，因此有关学者对此进行了广泛研究[1-5]。但并联机构工作空间相对较小，串并混联机构可以结合串联机构和并联机构的优点，更易满足机器人工作空间和高刚度的综合性能需求。Tricept 系列[6-7] 和 Exechon 系列[8] 机器人以及 TriVariant 混联机械手[9-10] 等，通过采用两转一移三自由度并联机构串联两自由度摆头的混联形式，取得了良好效果。但由于工作空间小、双摆头结构复杂和制造精度要求高等原因，影响了其推广使用。采用并联头串联移动导轨形式的混联机器人，如搭载 3 - PRS 机构的 ECOSPEED 系列混联机器人[11-12]，其自身刚度更易保障，且易获得导轨移动方向更大的工作空间。由于 3 - PRS 机构工作空间与 RS 铰链间连杆长度成正相关，影响了其大工作空间的刚度性能。TIAN 等[13] 提出了四自由度并联头串联移动导轨的五自由度机器人构型，但由于并联机构的限制，其 Y 方向移动量很小，只适用于该方向小范围移动的情况。

在提升机器人综合性能方面，LIU 等[14-15] 提出了运动/力传递性能指标，并对 3 - PRS 并联机构进行了优化和尺寸设计。ZHANG 等[16] 采用遗传算法对球形机构的全局条件数和工作空间进行了优化。ZHANG 等[17] 采用差分进化算法对 3 - UPU 并联机构的刚度和可达工作空间进行了优化。文献[18]考虑机构的动力学性能、速度性能和刚度性能，采用改进的加权求和法进行了多目标优化。文献[19]根据工作空间与力传递效率性能指标对五自由度混联机器人 R(2RPR)R/SP + RR 进行了尺寸优化。文献[20]建立了 2 - PUR - PSR 并联机构尺度综合多目标优化数学模型，并验证了 MPSO 算法的有效性。

为进一步提升串并混联机器人大行程刚度等综合性能，本文提出一种带随动滑筒的 3 - RHUR/PUS 并联头串联 XY 双导轨的混联五自由度机器人构型，对其位姿及运动学进行分析，研究混联机器人的方向刚度，并采用 OptLHS 采样与三次插值结合的算法对混联机器人进行多目标优化。

1　五自由度混联机器人

1.1　机器人构型

本文提出的 3 - RHUR/PUS 并联头串联 XY 双导轨机构如图 1 所示。

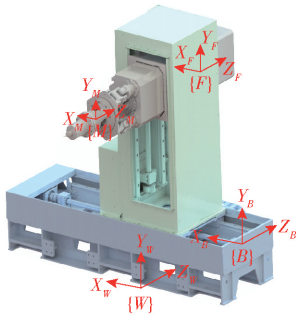


图 1　五自由度混联机器人

Fig. 1　5-DOF hybrid robot

串联双导轨方向与并联头驱动 H 副轴线方向两两互相垂直。如图 2 所示，并联头包含 3 条 RHUR 驱动分支和 1 条 PUS 随动分支，其螺旋副(H 副)和移动副(P 副)平行固定于并联头基座，H 副沿半径为 R 的圆周均匀布置，由各分支第一转动副(R 副)驱动，P 副过该圆中心。为了保证并联头大行程刚度，避免 H 副伸出杆大行程时对机器人性能的影响，该中间 PUS 随动分支的 P 副设计为随动滑筒结构，为 3 条 RHUR 驱动分支的 H 副提供大行程移动支撑，从而解决了并联头刚度精度降低问题。H 副通过万向铰(U 副)连接长度为 L 的连杆，连杆另一端与并联头动平台通过第二转动副连接。随动分支连杆通过 U 副和球副(S 副)分别连接随动分支 P 副和并联头动平台。动平台上 3 个第二转动副沿圆周均布，半径为 r，S 副位于该圆圆心。并联头连接及尺寸关系如图 3 所示。

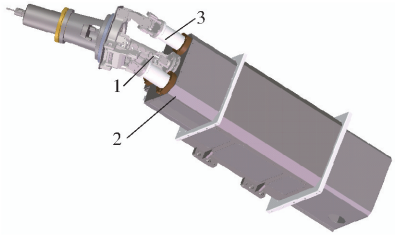


图 2　并联头示意图

Fig. 2　Parallel head

1. PUS 随动分支　2. 随动滑筒　3. RHUR 驱动分支

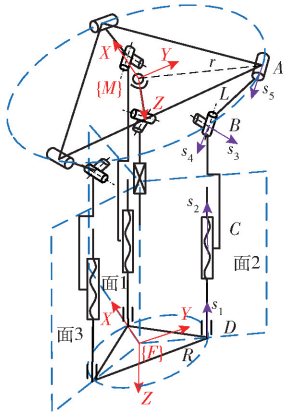


图 3　并联头机构简图

Fig. 3　Mechanism diagram of parallel head

1.2 机器人自由度

据修正的 G-K 公式[21]计算 3-RHUR/PUS 空间机构的自由度为

$$M_{DOF}=d(n-g-1)+\sum_{i=1}^{g}f_{DOFi}+v-\zeta$$

3-RHUR/PUS 并联机构的阶 d 为 6;单驱动分支含有构件数为 3,关节数为 4,随动分支含构件数为 2,关节数为 3,因此总构件数 $n=10$,总关节数 $g=12$;机构不存在公共约束 v 和局部自由度 ζ;螺旋副 H 自由度为 1、万向铰 U 自由度为 2、转动副 R 自由度为 1、移动副 P 自由度为 1,因此,自由度总数 $\sum_{i=1}^{g}f_{DOFi}=21$。可得,该 3-RHUR/PUS 并联头的自由度为 $M_{DOF}=3$。

五自由度混联机器人为并联头串联双移动导轨形成的 3-RHUR/PUS+PP 混联机构。该 3-RHUR/PUS+PP 机器人具有沿 X、Y、Z 轴移动和绕 X、Y 轴转动自由度。

2 运动学与刚度

2.1 混联机器人位置正反解

建立包含工件坐标系 $\{W\}$、混联机器人基坐标系 $\{B\}$、并联头基坐标系 $\{F\}$ 以及并联头动平台坐标系 $\{M\}$ 4 个坐标系的坐标系系统,如图 1 所示。其中,工件坐标系 $\{W\}$、基坐标系 $\{B\}$ 与定系 $\{F\}$ 仅存在平移而无方位改变,其相对关系可表示为

$$\boldsymbol{P}_B^W=[{}_B^WX\quad {}_B^WY\quad {}_B^WZ]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{P}_F^B=[P_x\quad P_y\quad {}_F^BZ]^{\mathrm{T}}$$

式中 P_x、P_y——X、Y 移动导轨驱动量

${}_B^WX$、${}_B^WY$、${}_B^WZ$、${}_F^BZ$——常数,由混联机器人的结构决定

并联头动平台坐标系称动系 $\{M\}$。坐标系固定于并联头动平台,原点 M 位于 S 副圆心,初始位置时,坐标轴方向与工件坐标系 $\{W\}$、基坐标系 $\{B\}$、定系 $\{F\}$ 均一致,其 X 轴始终过第一分支上平台转动铰链点 A^1。

采用偏转角 θ 和方位角 φ 对末端执行器进行描述,可更清晰地表达其方向,令末端点到机器人方向为其正方向,其方向向量为

$$\boldsymbol{n}=[\sin\theta\cos\varphi\quad \sin\theta\sin\varphi\quad \cos\theta]^{\mathrm{T}}$$

且 $\theta\in[0°,90°]$,$\varphi\in[0°,360°]$。

由于工件坐标系 $\{W\}$、基坐标系 $\{B\}$ 与定系 $\{F\}$ 方位完全一致,3-RHUR/PUS 三自由度并联机构的运动姿态在 3 个坐标系中的表达相同。且动系 $\{M\}$ 的 Z 轴方向向量与刀具方向向量相同,满足 $\boldsymbol{n}_z=\boldsymbol{n}$。采用 ZYZ 欧拉角对动系 $\{M\}$ 姿态进行描述,其旋转变换矩阵为

$${}_M^F\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(Z,\varphi)\boldsymbol{R}(Y_1,\theta)\boldsymbol{R}(Z_2,\psi)$$

参考图 3 中关节位置点与轴线方向,建立关系。规定 $\|\boldsymbol{P}_{B^iB_0^i}\|=h^i(i=1,2,3)$,$h^i$ 用于表达 H 副螺母的移动量,B^i 为运动过程中第 i 分支 U 副的位置,B_0^i 为初始位置 $h^i=0$ 时,第 i 分支 U 副所在位置。可得 B_0^i 和 B^i 在定系 $\{F\}$ 中的坐标描述及并联头动平台第二转动副铰链点 A^i 和其方向向量 $\boldsymbol{s}_5^i$ 在动系 $\{M\}$ 中表示为${}^MA^i$、${}^M\boldsymbol{s}_5^i$。

假设末端点 T 在工件坐标系 $\{W\}$ 中的位姿参数为

$$\boldsymbol{T}=({}^WT_x,{}^WT_y,{}^WT_z,\varphi,\theta)$$

其中,${}^W\boldsymbol{T}=[{}^WT_x\quad {}^WT_y\quad {}^WT_z]^{\mathrm{T}}$ 为末端点 T 在工件坐标系 $\{W\}$ 中坐标位置参数,由此易知末端点 T 在基坐标系 $\{B\}$ 中的坐标为${}^B\boldsymbol{T}$。令末端点 T 到动系 $\{M\}$ 原点的距离为 L_t,可得动系 $\{M\}$ 原点在基坐标系 $\{B\}$ 的坐标为${}^B\boldsymbol{M}$,在定系 $\{F\}$ 中的坐标为${}^F\boldsymbol{M}$。

在定系 $\{F\}$ 中并联头动平台上第二转动副中心点 A^i 和方向向量 $\boldsymbol{s}_5^i$ 为

$$A^i={}_M^F\boldsymbol{R}^MA^i+{}^F\boldsymbol{M}\quad(i=1,2,3)$$
$$\boldsymbol{s}_5^i={}_M^F\boldsymbol{R}^M\boldsymbol{s}_5^i\quad(i=1,2,3)$$

第 i 分支 U 副绕 H 副轴线转动角,即丝母被动转动量

$$R_{\mathrm{U}}^i=\arccos(\boldsymbol{s}_3^i,\boldsymbol{s}_{30}^i)$$

式中,$\boldsymbol{s}_3^i$、$\boldsymbol{s}_{30}^i$分别为并联头驱动分支 U 副的第一转动副在运动过程中和初始位置时的方向向量在定系 $\{F\}$ 中的表示。

若 H 副节距为 P_d,则并联头转动驱动 R^i 为

$$R^i=\begin{cases}2\pi\dfrac{h^i}{P_d}-R_{\mathrm{U}}^i & (\arccos(\boldsymbol{s}_3^i,\boldsymbol{s}_{40}^i)>90°)\\ 2\pi\dfrac{h^i}{P_d}+R_{\mathrm{U}}^i & (\arccos(\boldsymbol{s}_3^i,\boldsymbol{s}_{40}^i)<90°)\end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{s}_{40}^i$——第 i 分支 U 副第二转动副初始位置时的方向向量

根据连杆长度 L 恒定,并由转动副运动特性知,连杆方向始终与分支第二转动副轴线方向垂直,建立约束方程

$$\begin{cases}\|\boldsymbol{P}_{B^iA^i}\|=L\\ \boldsymbol{P}_{B^iA^i}\boldsymbol{s}_5^i=0\end{cases}\quad(i=1,2,3)$$

将末端位姿参数${}^W\boldsymbol{T}$作为位置反解的输入参数,由于${}_B^WX$、${}_B^WY$、${}_B^WZ$、${}_F^BZ$、R、r、L、L_t、P_d 等机器人结构尺寸参数为定值,基于最小二乘法求解根据约束方程建立的非线性方程组,采用信赖域狗腿算法[22],可求得 $\boldsymbol{q}=[R^1\quad R^2\quad R^3\quad P_x\quad P_y]^{\mathrm{T}}$ 5 个末端驱动参数及转角 ψ,且并联头运动产生的伴随运动${}^FM_x$、${}^FM_y$ 为

$${}^FM_x={}^BM_x-P_x$$
$${}^FM_y={}^BM_y-P_y$$

同理，该混联机器人由驱动到末端的正解位姿亦可求得，将 5 个驱动参数 $\boldsymbol{q}=[R^1 \quad R^2 \quad R^3 \quad P_x \quad P_y]^{\mathrm{T}}$ 作为输入，由 6 个非线性约束方程组可解得 $\boldsymbol{T}$ 的 5 个末端参数及转角 ψ。

2.2　混联机器人速度与加速度

末端点在工件坐标系 $\{W\}$ 的速度 $\boldsymbol{V}_T$ 和加速度 $\boldsymbol{A}_T$ 为包含角速度 $\boldsymbol{\omega}_T=[\omega_{Tx} \quad \omega_{Ty} \quad \omega_{Tz}]^{\mathrm{T}}$、线速度 $\boldsymbol{v}_T=[v_{Tx} \quad v_{Ty} \quad v_{Tz}]^{\mathrm{T}}$ 和角加速度 $\boldsymbol{\varepsilon}_T=[\varepsilon_{Tx} \quad \varepsilon_{Ty} \quad \varepsilon_{Tz}]^{\mathrm{T}}$、线加速度 $\boldsymbol{a}_T=[a_{Tx} \quad a_{Ty} \quad a_{Tz}]^{\mathrm{T}}$ 的六维速度矢量，且末端角速度 $\boldsymbol{\omega}_T$ 和角加速度 $\boldsymbol{\varepsilon}_T$ 与 ZYZ 欧拉角速度的关系为

$$\boldsymbol{\omega}_T=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi\mathrm{s}\theta\\ 0 & \mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\varphi\mathrm{s}\theta\\ 1 & 0 & \mathrm{c}\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi\mathrm{s}\theta\\ 0 & \mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\varphi\mathrm{s}\theta\\ 1 & 0 & \mathrm{c}\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}\\ \ddot{\theta}\\ \ddot{\psi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\dot{\varphi}\mathrm{c}\varphi & -\dot{\varphi}\mathrm{s}\varphi\mathrm{s}\theta+\dot{\theta}\mathrm{c}\varphi\mathrm{c}\theta\\ 0 & -\dot{\varphi}\mathrm{s}\varphi & \dot{\varphi}\mathrm{c}\varphi\mathrm{s}\theta+\dot{\theta}\mathrm{s}\varphi\mathrm{c}\theta\\ 0 & 0 & -\dot{\theta}\mathrm{s}\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}$$

式中 $\mathrm{s}\varphi$ 表示 $\sin\varphi$，$\mathrm{c}\varphi$ 表示 $\cos\varphi$，$\mathrm{s}\theta$ 表示 $\sin\theta$，$\mathrm{c}\theta$ 表示 $\cos\theta$。

因此，末端在工件坐标系 $\{W\}$ 的旋量速度 ${}^{W}\boldsymbol{V}_T$ 和旋量加速度 ${}^{W}\boldsymbol{A}_T$ 为

$${}^{W}\boldsymbol{V}_T=\begin{bmatrix}{}^{W}\boldsymbol{\omega}_T\\ {}^{W}\boldsymbol{v}_T\end{bmatrix}\quad {}^{W}\boldsymbol{A}_T=\begin{bmatrix}{}^{W}\boldsymbol{\varepsilon}_T\\ {}^{W}\boldsymbol{a}_T\end{bmatrix}$$

其中

$${}^{W}\boldsymbol{\omega}_T=\boldsymbol{w}_T\qquad {}^{W}\boldsymbol{v}_T=\boldsymbol{v}_T-\boldsymbol{w}_T\times{}^{W}\boldsymbol{T}$$

$${}^{W}\boldsymbol{\varepsilon}_T=\boldsymbol{\varepsilon}_T$$

$${}^{W}\boldsymbol{a}_T=\boldsymbol{a}_T-\boldsymbol{\omega}_T\times{}^{W}\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\omega}_T\times(\boldsymbol{\omega}_T\times{}^{W}\boldsymbol{T})$$

在整个混联机器人系统中，末端在工件坐标系 $\{W\}$ 和基坐标系 $\{B\}$ 的旋量速度 ${}^{W}\boldsymbol{V}_T$、${}^{B}\boldsymbol{V}_T$ 和旋量加速度 ${}^{W}\boldsymbol{A}_T$、${}^{B}\boldsymbol{A}_T$ 满足

$${}^{W}\boldsymbol{V}_T=\mathrm{Ad}({}^{W}_{B}\boldsymbol{R},{}^{W}_{B}\boldsymbol{P})\,{}^{B}\boldsymbol{V}_T \tag{1}$$

$${}^{B}\boldsymbol{V}_T=\mathrm{Ad}({}^{B}_{F}\boldsymbol{R},{}^{B}_{F}\boldsymbol{P})\,{}^{F}\boldsymbol{V}_{TF}+{}^{B}\boldsymbol{V}_F \tag{2}$$

$${}^{W}\boldsymbol{A}_T=\mathrm{Ad}({}^{W}_{B}\boldsymbol{R},{}^{W}_{B}\boldsymbol{P})\,{}^{B}\boldsymbol{A}_T \tag{3}$$

$${}^{B}\boldsymbol{A}_T=\mathrm{Ad}({}^{B}_{F}\boldsymbol{R},{}^{B}_{F}\boldsymbol{P})\,{}^{F}\boldsymbol{A}_{TF}+{}^{B}\boldsymbol{A}_F+[{}^{B}\boldsymbol{V}_F,{}^{B}\boldsymbol{V}_{TF}] \tag{4}$$

其中

$$\mathrm{Ad}({}^{W}_{B}\boldsymbol{R},{}^{W}_{B}\boldsymbol{P})=\begin{bmatrix}{}^{W}_{B}\boldsymbol{R} & 0\\ S({}^{W}_{B}\boldsymbol{P})\,{}^{W}_{B}\boldsymbol{R} & {}^{W}_{B}\boldsymbol{R}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Ad}({}^{B}_{F}\boldsymbol{R},{}^{B}_{F}\boldsymbol{P})=\begin{bmatrix}{}^{B}_{F}\boldsymbol{R} & 0\\ S({}^{B}_{F}\boldsymbol{P})\,{}^{B}_{F}\boldsymbol{R} & {}^{B}_{F}\boldsymbol{R}\end{bmatrix}$$

式中 ${}^{B}\boldsymbol{V}_{TF}$——末端点相对于并联头定系 $\{F\}$ 在基坐标系 $\{B\}$ 的旋量速度

${}^{F}\boldsymbol{V}_{TF}$、${}^{F}\boldsymbol{A}_{TF}$——末端点相对于并联头定系 $\{F\}$ 在定系 $\{F\}$ 的旋量速度和旋量加速度

${}^{B}\boldsymbol{V}_F$、${}^{B}\boldsymbol{A}_F$——并联头相对机器人基坐标系 $\{B\}$ 在基坐标系 $\{B\}$ 的旋量速度和旋量加速度

$\mathrm{Ad}({}^{W}_{B}\boldsymbol{R},{}^{W}_{B}\boldsymbol{P})$——基坐标系 $\{B\}$ 到工件坐标系 $\{W\}$ 的伴随变换矩阵

${}^{W}_{B}\boldsymbol{R}$、$S({}^{W}_{B}\boldsymbol{P})$——基坐标系 $\{B\}$ 相对于工件坐标系 $\{W\}$ 的旋转矩阵和平移矢量 ${}^{W}_{B}\boldsymbol{P}$ 的反对称矩阵

$\mathrm{Ad}({}^{B}_{F}\boldsymbol{R},{}^{B}_{F}\boldsymbol{P})$——定系 $\{F\}$ 到基坐标系 $\{B\}$ 的伴随变换矩阵

${}^{B}_{F}\boldsymbol{R}$、$S({}^{B}_{F}\boldsymbol{P})$——定系 $\{F\}$ 相对于基坐标系 $\{B\}$ 的旋转矩阵和平移矢量 ${}^{B}_{F}\boldsymbol{P}$ 的反对称矩阵

混联机器人末端相对并联头定系 $\{F\}$ 的旋量速度 ${}^{F}\boldsymbol{V}_{TF}$ 和旋量加速度 ${}^{F}\boldsymbol{A}_{TF}$，由并联头 3－RHUR/PUS 运动产生，且 PUS 为随动分支不影响运动。采用虚设机构法进行分析，在动平台 R2 副 $A^i(i=1,2,3)$ 处分别虚设转动副，其转动轴线 $\boldsymbol{s}_6^i(i=1,2,3)$ 过上平台铰链点所在圆圆心，即沿 $\boldsymbol{P}_{MAi}(i=1,2,3)$，等效后机构简图如图 4 所示。第 $i(i=1,2,3)$ 分支转动驱动的轴线方向向量为 $\boldsymbol{s}_1^i$，H 副移动的方向向量 $\boldsymbol{s}_2^i$，各分支 U 副转动轴线 $\boldsymbol{s}_3^i$、$\boldsymbol{s}_4^i$，上平台第二转动副轴线为 $\boldsymbol{s}_5^i$。

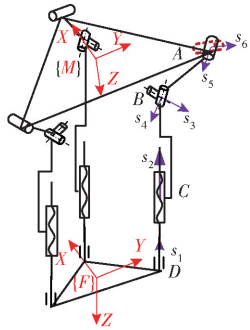


图 4　并联头虚设机构简图

Fig. 4　Virtual mechanism diagram of parallel head

在定系 $\{F\}$ 中并联头各关节的运动螺旋表示为

$$\boldsymbol{S}_1^i=[\boldsymbol{s}_1^i;D^i\times\boldsymbol{s}_1^i]\qquad \boldsymbol{S}_2^i=[\boldsymbol{s}_2^i;C^i\times\boldsymbol{s}_2^i+P_d\boldsymbol{s}_2^i]$$

$$\boldsymbol{S}_3^i=[\boldsymbol{s}_3^i;B^i\times\boldsymbol{s}_3^i]\qquad \boldsymbol{S}_4^i=[\boldsymbol{s}_4^i;B^i\times\boldsymbol{s}_4^i]$$

$$\boldsymbol{S}_5^i=[\boldsymbol{s}_5^i;A^i\times\boldsymbol{s}_5^i]\qquad \boldsymbol{S}_6^i=[\boldsymbol{s}_6^i;A^i\times\boldsymbol{s}_6^i]$$

第 $i(i=1,2,3)$ 驱动分支各关节到末端的速度和加速度映射关系为

$${}^{F}\boldsymbol{V}_{TF}^i=[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(i)}]_{\mathrm{P}}\dot{\boldsymbol{\phi}}^{(i)}$$

$${}^{F}\boldsymbol{A}_{TF}^i=\dot{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{T}(i)}[\boldsymbol{H}_{\phi}^{T(i)}]_{\mathrm{P}}\dot{\boldsymbol{\phi}}^{(i)}+[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(i)}]_{\mathrm{P}}\ddot{\boldsymbol{\phi}}^{(i)}$$

其中,并联头第 $i(i=1,2,3)$ 分支的 Jacobian 矩阵 $[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(i)}]_{\mathrm{P}}$ 和 Hessian 矩阵 $[\boldsymbol{H}_{\phi}^{T(i)}]_{\mathrm{P}}$ 为

$$[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(i)}]_{\mathrm{P}}=[\boldsymbol{S}_1^i \quad \boldsymbol{S}_2^i \quad \boldsymbol{S}_3^i \quad \boldsymbol{S}_4^i \quad \boldsymbol{S}_5^i \quad \boldsymbol{S}_6^i]$$

$$[\boldsymbol{H}_{\phi}^{T(i)}]_{\mathrm{P}}=\begin{bmatrix} 0 & [\boldsymbol{S}_1^i,\boldsymbol{S}_2^i] & [\boldsymbol{S}_1^i,\boldsymbol{S}_3^i] & [\boldsymbol{S}_1^i,\boldsymbol{S}_4^i] & [\boldsymbol{S}_1^i,\boldsymbol{S}_5^i] & [\boldsymbol{S}_1^i,\boldsymbol{S}_6^i] \\ 0 & 0 & [\boldsymbol{S}_2^i,\boldsymbol{S}_3^i] & [\boldsymbol{S}_2^i,\boldsymbol{S}_4^i] & [\boldsymbol{S}_2^i,\boldsymbol{S}_5^i] & [\boldsymbol{S}_2^i,\boldsymbol{S}_6^i] \\ 0 & 0 & 0 & [\boldsymbol{S}_3^i,\boldsymbol{S}_4^i] & [\boldsymbol{S}_3^i,\boldsymbol{S}_5^i] & [\boldsymbol{S}_3^i,\boldsymbol{S}_6^i] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\boldsymbol{S}_4^i,\boldsymbol{S}_5^i] & [\boldsymbol{S}_4^i,\boldsymbol{S}_6^i] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [\boldsymbol{S}_5^i,\boldsymbol{S}_6^i] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

建立并联头末端运动到各驱动 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{P}}=[\phi_1^{(1)} \quad \phi_1^{(2)} \quad \phi_1^{(3)} \quad \phi_6^{(1)} \quad \phi_6^{(2)} \quad \phi_6^{(3)}]^{\mathrm{T}}$ 的速度和加速度映射关系为

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{P}}=[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}{}^F\boldsymbol{V}_{TF}$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{P}}=[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}{}^F\boldsymbol{A}_{TF}-\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{H}_T^q]_{\mathrm{P}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{P}}$$

其中

$$[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}=\begin{bmatrix} [[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(1)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]_{1,:} \\ [[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(2)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]_{1,:} \\ [[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(3)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]_{1,:} \\ [[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(1)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]_{6,:} \\ [[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(2)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]_{6,:} \\ [[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(3)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]_{6,:} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{H}_T^q]_{\mathrm{P}}=\begin{bmatrix} [[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1}]^{\mathrm{T}}[[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(1)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]^{\mathrm{T}}([[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(1)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]_{1,:}*[\boldsymbol{H}_{\phi}^{T(1)}]_{\mathrm{P}})[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(1)}]_{\mathrm{P}}^{-1}[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1} \\ [[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1}]^{\mathrm{T}}[[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(2)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]^{\mathrm{T}}([[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(2)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]_{1,:}*[\boldsymbol{H}_{\phi}^{T(2)}]_{\mathrm{P}})[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(2)}]_{\mathrm{P}}^{-1}[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1} \\ [[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1}]^{\mathrm{T}}[[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(3)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]^{\mathrm{T}}([[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(3)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]_{1,:}*[\boldsymbol{H}_{\phi}^{T(3)}]_{\mathrm{P}})[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(3)}]_{\mathrm{P}}^{-1}[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1} \\ [[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1}]^{\mathrm{T}}[[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(1)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]^{\mathrm{T}}([[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(1)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]_{6,:}*[\boldsymbol{H}_{\phi}^{T(1)}]_{\mathrm{P}})[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(1)}]_{\mathrm{P}}^{-1}[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1} \\ [[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1}]^{\mathrm{T}}[[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(2)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]^{\mathrm{T}}([[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(2)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]_{6,:}*[\boldsymbol{H}_{\phi}^{T(2)}]_{\mathrm{P}})[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(2)}]_{\mathrm{P}}^{-1}[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1} \\ [[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1}]^{\mathrm{T}}[[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(3)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]^{\mathrm{T}}([[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(3)}]_{\mathrm{P}}^{-1}]_{6,:}*[\boldsymbol{H}_{\phi}^{T(3)}]_{\mathrm{P}})[\boldsymbol{G}_{\phi}^{T(3)}]_{\mathrm{P}}^{-1}[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1} \end{bmatrix}$$

其逆解为

$$^F\boldsymbol{V}_{TF}=[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{P}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{P}} \tag{5}$$

$$^F\boldsymbol{A}_{TF}=\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{H}_q^T]_{\mathrm{P}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{P}}+[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{P}}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{P}} \tag{6}$$

其中

$$[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{P}}=[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{P}}^{-1}$$

$$[\boldsymbol{H}_q^T]_{\mathrm{P}}=[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{P}}*[\boldsymbol{H}_T^q]_{\mathrm{P}}$$

式中 $[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{P}}$——并联头的 Jacobian 矩阵

$[\boldsymbol{H}_q^T]_{\mathrm{P}}$——并联头的 Hessian 矩阵

定系 $\{F\}$ 相对于基坐标系 $\{B\}$ 的运动只有 X 和 Y 导轨的移动,并无转动及沿 Z 方向的移动,因此并联头相对于基坐标系 $\{B\}$ 的旋量速度 $^B\boldsymbol{V}_F$ 和旋量加速度 $^B\boldsymbol{A}_F$ 为

$$^B\boldsymbol{A}_F=\begin{bmatrix} ^B\boldsymbol{\omega}_F \\ ^B\boldsymbol{v}_F \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中

$$^B\boldsymbol{\omega}_F=[0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$^B\boldsymbol{A}_F=\begin{bmatrix} ^B\boldsymbol{\varepsilon}_F \\ ^B\boldsymbol{a}_F \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$^B\boldsymbol{\varepsilon}_F=[0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$^B\boldsymbol{a}_F=[\ddot{P}_x \quad \ddot{P}_y \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

综上,将式(5)~(8)分别代入式(2)、(4),可得混联机器人末端在基坐标系 $\{B\}$ 旋量速度 $^B\boldsymbol{V}_T$ 和旋量加速度 $^B\boldsymbol{A}_T$ 与各驱动 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{H}}=[\phi_1^{(1)} \quad \phi_1^{(2)} \quad \phi_1^{(3)} \quad \phi_6^{(1)} \quad P_x \quad P_y]^{\mathrm{T}}$ 的映射关系为

$$^B\boldsymbol{V}_T={}^B[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{H}}$$

$$^B\boldsymbol{A}_T=\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}}{}^B[\boldsymbol{H}_q^T]_{\mathrm{H}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{H}}+{}^B[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{H}}$$

其中

$$^B[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix} & & \boldsymbol{O}_{3\times2} \\ \mathrm{Ad}(^B_F\boldsymbol{R},^B_F\boldsymbol{P})[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{P}}]_{:,1:4} & & \boldsymbol{I}_2 \\ & & \boldsymbol{O}_{1\times2} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{H}_q^T]_{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix} (\mathrm{Ad}(^B_F\boldsymbol{R},^B_F\boldsymbol{P})*[\boldsymbol{H}_q^T]_{\mathrm{P}})_{:,1:4} & \begin{matrix}[[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,5},[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,1}] & [[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,6},[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,1}] \\ [[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,5},[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,2}] & [[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,6},[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,2}] \\ [[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,5},[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,3}] & [[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,6},[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,3}] \\ [[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,5},[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,4}] & [[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,6},[[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:,4}] \end{matrix} \\ \boldsymbol{O}_{2\times2\times6} \end{bmatrix}$$

令 $^W[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}=\mathrm{Ad}(^W_B\boldsymbol{R},^W_B\boldsymbol{P})^B[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}$,$^W[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}=\mathrm{Ad}(^W_B\boldsymbol{R},^W_B\boldsymbol{P})^B[\boldsymbol{H}_q^T]_{\mathrm{H}}$,根据式(1)、(3)可得混联机器人末端在工件坐标系 $\{W\}$ 旋量速度 $^W\boldsymbol{V}_T$ 和旋量加速度 $^W\boldsymbol{A}_T$ 与各驱动的映射关系为

$$^W\boldsymbol{V}_T={}^W[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{H}}$$

$$^W\boldsymbol{A}_T=\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}}{}^W[\boldsymbol{H}_q^T]_{\mathrm{H}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{H}}+{}^W[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{H}}$$

求逆得

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{H}}={}^W[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{H}}{}^W\boldsymbol{V}_T$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{H}} = {}^{W}[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{H}}\,{}^{W}\boldsymbol{A}_T - \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}}\,{}^{W}[\boldsymbol{H}_T^q]_{\mathrm{H}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{H}}$$

其中

$$ {}^{W}[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{H}} = {}^{W}[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}^{-1}$$

$$ {}^{W}[\boldsymbol{H}_T^q]_{\mathrm{H}} = {}^{W}[\boldsymbol{G}_q^T]_{\mathrm{H}}^{-1}\,{}^{W}[\boldsymbol{H}_q^T]_{\mathrm{H}}$$

综上可得，串并混联机器人正逆运动学映射关系为

$$ {}^{W}\boldsymbol{V}_T = [\boldsymbol{G}_q^T]\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$ {}^{W}\boldsymbol{A}_T = \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{H}_q^T]\dot{\boldsymbol{q}} + [\boldsymbol{G}_q^T]\ddot{\boldsymbol{q}}$$

$$ \dot{\boldsymbol{q}} = [\boldsymbol{G}_T^q]\,{}^{W}\boldsymbol{V}_T$$

$$ \ddot{\boldsymbol{q}} = [\boldsymbol{G}_T^q]\,{}^{B}\boldsymbol{A}_T - \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{H}_T^q]\dot{\boldsymbol{q}}$$

其中　$\boldsymbol{q} = [R^1 \quad R^2 \quad R^3 \quad P_x \quad P_y]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{q}_{H(1;3,5,6)}$

$$ [\boldsymbol{G}_q^T] = [{}^{W}[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{H}}]_{:;1;3,5,6}$$

$$ [\boldsymbol{H}_q^T] = [{}^{W}[\boldsymbol{H}_q^T]_{\mathrm{H}}]_{:;1;3,5,6}$$

$$ [\boldsymbol{G}_T^q] = [{}^{W}[\boldsymbol{G}_T^q]_{\mathrm{H}}]_{1;3,5,6;:}$$

$$ [\boldsymbol{H}_T^q] = [{}^{W}[\boldsymbol{H}_T^q]_{\mathrm{H}}]_{1;3,5,6;:}$$

式中　$[\boldsymbol{G}_q^T]$——混联机器人 3 - RHUR/PUS + PP 的 Jacobian 矩阵

$[\boldsymbol{H}_q^T]$——混联机器人 3 - RHUR/PUS + PP 的 Hessian 矩阵

2.3　混联机器人机构刚度

对该混联机器人而言，如连杆、关节连接件等相对于传动及伺服系统的变形可忽略，因此着重研究混联机器人的机构刚度，即只考虑驱动关节的变形对机器人的影响。少自由度机构在无自由度方向上无变形产生，该混联机器人不具有绕 Z 轴的转动，其绕 Z 方向的转动刚度为无穷大，本文利用其柔度矩阵分析该机构的方向刚度[23-25]。

令 $\boldsymbol{K}_q = \mathrm{diag}(k_{q1}, k_{q2}, k_{q3}, k_{q4}, k_{q5})$，$k_{qi}$ 为各驱动关节的刚度系数，则关节处变形与受力的关系为

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{K}_q \mathrm{d}\boldsymbol{q}$$

该混联机器人驱动均为直线驱动，该刚度系数受螺母刚度、丝杆刚度、减速器刚度、电机自身刚度、变频器电气特性、控制器控制参数等的影响。相对于控制器控制参数和变频器电气特性，传动链即各构件的变形可忽略，因此，各驱动关节的刚度系数根据控制参数确定且满足小范围可调。再结合混联机器人末端受力 $\boldsymbol{F}_T$ 与机器人各输入反力之间的关系 $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{G}_q^T]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_T$ 和机器人的微分运动关系 $\boldsymbol{D} = [\boldsymbol{G}_q^T]\mathrm{d}\boldsymbol{q}$，3 - RHUR/PUS + PP混联机器人的柔度矩阵为

$$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{G}_q^T]\boldsymbol{K}_q^{-1}[\boldsymbol{G}_q^T]^{\mathrm{T}}$$

混联机器人末端位移与受力之间的关系为

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_T$$

令机器人末端所受外力为 $\delta\boldsymbol{F} = \delta F\boldsymbol{f}$，且 $\boldsymbol{f}$ 为方向向量，则在 $\boldsymbol{f}$ 方向上，混联机器人刚度为

$$K = \frac{1}{\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{f}}$$

当 $\boldsymbol{f} = [0 \quad \boldsymbol{t}]^{\mathrm{T}}$ 时，可得混联机器人移动的方向刚度，当 $\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{r} \quad 0]^{\mathrm{T}}$ 时，可得混联机器人转动的方向刚度。

3　尺寸优化

3.1　优化指标

(1)转动能力指标 θ_m

该 3 - RHUR/PUS + PP 混联机器人工作空间约束条件主要包含各驱动器的行程及并联头各关节的运动限制。关节限制如图 5 所示，上平台与连杆夹角即向量 $\boldsymbol{P}_{B^iA^i}$ 与向量 $\boldsymbol{P}_{MA^i}$ 的夹角 α 满足 $\alpha \in [20°, 160°]$，连杆与并联头 Z 方向即向量 ${}^{F}\boldsymbol{P}_{B^iA^i}$ 与 $[0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$ 夹角 β 满足 $\beta > 100°$，上平台转动副 R2 与并联头 Z 方向夹角，即向量 ${}^{F}\boldsymbol{R}_{2^i}$ 与 $[0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$ 夹角 γ 满足 $\gamma \in [40°, 140°]$。

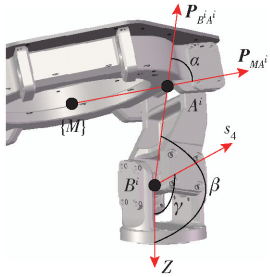


图 5　并联头约束转角

Fig. 5　Constraint angles of parallel head

由于混联机器人驱动均沿坐标系方向，易知该机器人工作空间为长宽高为 X、Y 导轨与 H 副移动量的长方体空间与 3 - RHUR/PUS 并联头产生伴随移动的并集。除了 H 副处于极限位置及其附近时，并联头运动产生的转动和伴随运动都一致。考虑机器人的实际应用需求，极限位置处产生的伴随移动并不能满足需求，其实际工作空间为长宽高为 X、Y 导轨与 H 副驱动移动量的长方体空间。

由于该构型混联机器人的转动自由度全部由并联头决定，为实现机器人的五自由度工作，其转动能力是优化中需要重点考虑的因素。规定刀具方向(即动系 $\{M\}$ Z 轴)与基坐标系 $\{B\}$ Z 轴方向的夹角为并联头偏转角，以可以实现的最大偏转角 θ 来衡量机器人的转动能力。

θ_m 为可实现绕 Z 轴 360°转动的最大偏转角。

(2)力传递性能指标 Γ

为保证机器人在其工作范围内稳定的力传递，建立并联头的全局力传递性能指标，采用并联机构分支传动角对全局力传递性能指标进行分析。

并联头驱动三分支沿圆周均匀布置，其传动角可表示为 $\angle MA^iB^i$ ($i = 1, 2, 3$) 或其补角，如图 6 所示。

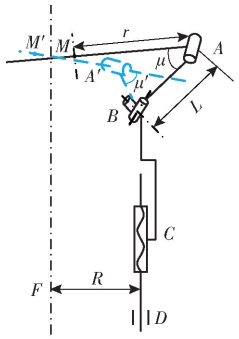


图 6 并联头传动角

Fig. 6 Transmission angle of parallel head

为保证机器人在其工作范围内稳定的力传递，建立机构的全局力传递性能指标为

$$\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\sum_{i} \chi i}{n} \mathrm{d}\Omega \Big/ \int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega \quad (i = 1,2,3;n = 3)$$

$\chi i = \sin\mu^i$ 为局部力传递性能指标，μ^i 为 3 - HRUR/PUS 并联机构单分支传动角。且 $\Gamma \in (0,1)$，取值越大，机器人的力传递性能越好。

(3)速度性能指标 κ

选取速度雅可比矩阵的条件数在工作空间的全局值 κ 作为全局速度性能指标计算式为

$$\kappa = \int_{\Omega} \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \mathrm{d}\Omega \Big/ \int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega \quad (i = 1,2,3)$$

式中 $k_{\max}$、$k_{\min}$——混联机器人速度雅可比矩阵奇异值的最大值和最小值

$\kappa \in [1,\infty)$，越接近于 1，机器人的速度各向同性越好。

(4)刚度性能指标 σ

应用拉格朗日乘数法，可求得混联机器人对应平方柔度矩阵的特征值。由于该机器人为少自由度机构，刚度存在无穷大量，对应的最小变形量 $\sqrt{\lambda_{\min}}$ 恒为 0。选取特征值的极大值 $\sqrt{\lambda_{\max}}$ 作为刚度性能指标，其数值越小，对应的最大变形量最小，说明机器人刚度性能越好。取其在可行工作空间的最小值 σ 为优化目标，即

$$\sigma = \int_{\Omega} (\sqrt{\lambda_{\max}})_{\min} \mathrm{d}\Omega \Big/ \int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega \quad (i = 1,2,3)$$

3.2 目标函数

通过上述分析，利用线性加权组合法，对全局转动能力指标 θ_m、全局力传递性能指标 Γ、全局速度性能指标 κ 和全局刚度性能指标 σ 进行综合考虑，实现混联机器人的多目标优化。

将上述优化指标的目标函数分别表示为

$$f_1(T) = \frac{\theta_m(T) - \mathrm{Max}(\theta_m(T))}{\mathrm{Min}(\theta_m(T)) - \mathrm{Max}(\theta_m(T))}$$

$$f_2(T) = \frac{\Gamma(T) - \mathrm{Max}(\Gamma(T))}{\mathrm{Min}(\Gamma(T)) - \mathrm{Max}(\Gamma(T))}$$

$$f_3(T) = \frac{\kappa(T) - \mathrm{Min}(\kappa(T))}{\mathrm{Max}(\kappa(T)) - \mathrm{Min}(\kappa(T))}$$

$$f_4(T) = \frac{\sigma(T) - \mathrm{Min}(\sigma(T))}{\mathrm{Max}(\sigma(T)) - \mathrm{Min}(\sigma(T))}$$

式中 Min( )、Max( )——不同指标在参数变化范围内的最小值和最大值

综合考虑 4 个指标的影响，建立混联机器人多目标综合优化函数

$$F_{\min}(T) = \sum_{j=1}^{4} \tau_j f_j(T)$$

式中 τ_j——优化指标权重系数

3.3 优化步骤

3 - HRUR/PUS + PP 混联机器人，从自由度考虑，绕 X、Y 轴的转动自由度由 3 - HRUR/PUS 并联头产生，完全受并联头各关节相对位置的影响；X、Y、Z 轴 3 个方向的移动，由于驱动方向均沿 X、Y、Z 轴方向，因此可直接根据需求选择满足要求的驱动。综上所述，该混联机器人尺寸优化确定为并联头各关节位置的优化，即 R、r、L 的尺寸优化问题。由于 R、r、L 3 个尺寸参数比例关系一定时，机构性质相同。利用初始传动角 μ 和长径比 δ 建立 R、r、L 尺寸参数的关系，初始传动角 μ 为并联头在 3 个 H 副驱动值相同时的分支传动角，长径比 δ 为连杆长度与驱动所在圆半径的比值，即

$$\mu = \arccos\frac{r - R}{L} \qquad \delta = \frac{L}{R}$$

由于全局优化算法收敛速度较慢，局部优化算法对初值选择的敏感性较高，只能收敛到局部极值。为了提高运算速度并获得全局最优结果，采用试验加插值的方法进行混联机器人尺寸优化。通过试验对优化尺寸参数进行抽样，对目标优化函数结果进行插值，得到全尺寸区间的多目标综合优化函数值，流程如图 7 所示。

(1)给定尺寸优化范围及各优化指标权重系数

根据实际应用中整体尺寸轻巧性的需求，给定优化尺寸参数范围为 $\mu \in [10°,80°]$，$\delta \in [0.1,0.8]$。优先考虑机器人并联头摆动范围和速度性能指标，给定 $\tau_1 = 0.5$，$\tau_2 = 0.05$，$\tau_3 = 0.4$，$\tau_4 = 0.05$。

(2)确定试验方法

采用拉丁超立方抽样(Latin hypercube sampling，LHS)对机器人优化尺寸参数进行试验设计：在 n 维空间中，将每一维坐标区间等分为 m 个区间，保证每个因子的每个水平只研究一次，完成 n 维空间 m 个样本数的拉丁超立方抽样。此方法可以有效地对空间进行填充，减少研究点数。为了避免样本点的随机和不均衡性，对拉丁超立方抽样方

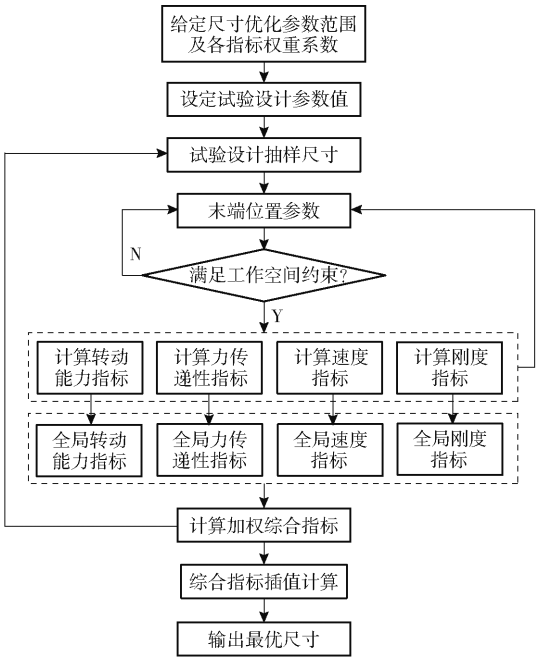


图 7　尺寸优化流程图

Fig. 7　Flowchart of dimensions optimization

法进行优化(记为 OptLHS),使所有点尽量均匀地分布在设计空间中,即实现两点距离最小值的最大化[26]。

本文将分别采用 LHS 和 OptLHS 对尺寸参数进行试验。此外,建立优化尺寸参数 μ 和 δ 的全因子尺寸参数矩阵,以便对抽样优化方法的准确性进行验证。

(3)试验结果及比较

设定 $m=29$,分别采用 LHS 和 OptLHS 试验设计方法对优化尺寸参数进行抽样,建立 2×29 的尺寸参数。对优化尺寸参数 μ 和 δ 按照 15×15 进行均匀离散,建立全因子的尺寸参数矩阵,图 8 为 LHS、OptLHS 与全因子尺寸参数对比。

(4)对多目标加权综合优化函数进行计算

对包含各评价指标的混联机器人多目标综合优化函数进行计算,得到各抽样尺寸的加权综合优化函数值。

(5)对优化目标结果进行插值

采用三次插值法对 LHS 和 OptLHS 加权综合优化目标值 $F(x)$ 进行插值,得到与全因子尺寸参数一致的 15×15 的综合优化指标 $F(x)$ 矩阵。

(6)结果及准确性验证

在同样配置的环境中进行计算,全因子、LHS 和 OptLHS 的最优参数值、目标函数值和所有时间结果对比如表 1 所示。

由表 1 可以看出,采用 LHS 加插值运算的优化方法的最优参数值与全因子计算的结果不一致,其

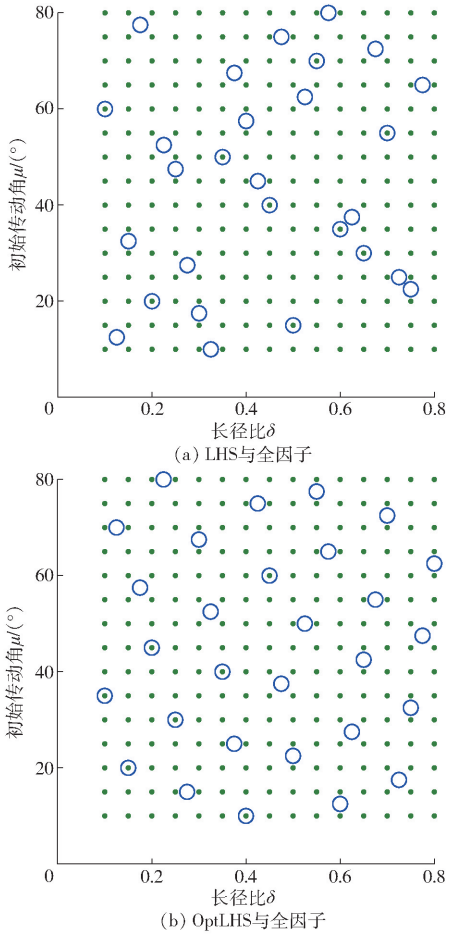


图 8　LHS、OptLHS 与全因子尺寸参数对比

Fig. 8　Comparison diagrams between LHS, OptLHS and full factor dimension parameters

表 1　全因子、LHS 和 OptLHS 结果对比

Tab. 1　Results comparison between all factors, LHS and OptLHS

优化方法		最优参数值		$F_{\min}(x)$	所用时间/s
		δ	μ/(°)		
全因子		0.550	55	0.200 5	5 649
LHS	抽样	0.700	55	0.206 5	540
	插值	0.575	55	0.199 2	
OptLHS	抽样	0.675	55	0.205 7	455
	插值	0.550	55	0.193 2	

误差由其采样随机性引起。采用均匀布置采样点的 OptLHS 加插值运算的优化方法保证了整体优化数据空间的完整性,比 LHS 加插值运算的优化方法更可靠,保证了优化准确率。采用 OptLHS 采样与插值运算结合的优化方法,所用时间仅为全因子优化的 8%,极大地提高了优化效率。

3.4　性能图谱

通过 3.3 节计算,得到全尺寸设计空间的混联机器人转动能力 θ_m、力传递性能 Γ、速度性能 κ 和刚度性能 σ 指标的性能图谱,如图 9 所示。

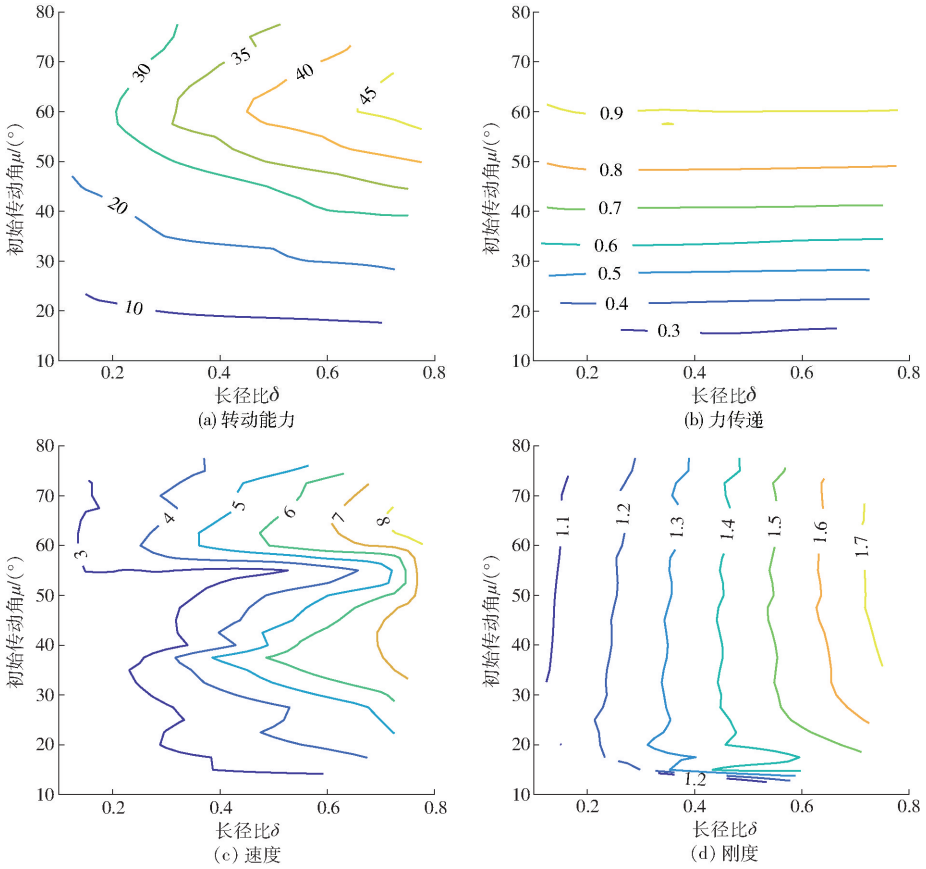


图 9 混联机器人性能图谱

Fig. 9 Performance atlas of hybrid robot

4 优选尺寸及性能

根据具体应用条件,混联机器人 X、Y 导轨行程为 800 mm,H 副行程为 600 mm,驱动分支 H 副所在圆半径 $R=86$ mm。根据表 1 所示优化结果,设计参数取长径比 $\delta=0.5$,初始传动角 $\mu=50°$,圆整尺寸后可得并联头 R2 副所在圆半径 $r=113$ mm,分支连杆长度 $L=43$ mm。

对该优选尺寸下混联机器人的性能进行研究,其转角关系如图 10 所示。

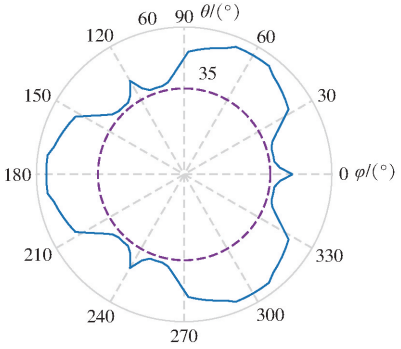


图 10 混联机器人转角关系图

Fig. 10 Angle diagram of hybrid robot

可见,该尺寸下 3 - RHUR/PUS + PP 五自由度混联机器人可实现全方位 35°的摆动,在 $\varphi=60°$、180°、300°附近时,可以达到 55°摆动。

给定混联机器人 X、Y 导轨和并联头驱动同步输入的单位输入速度球体,得到混联机器人末端移动速度球体如图 11 所示。由图 11 可知,该五自由度混联机器人沿 X、Y、Z 方向移动输出速度满足各向同性,各方向速度传递性能相同。

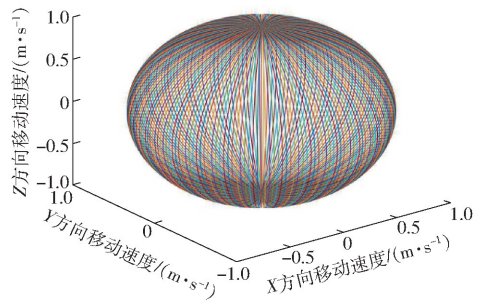
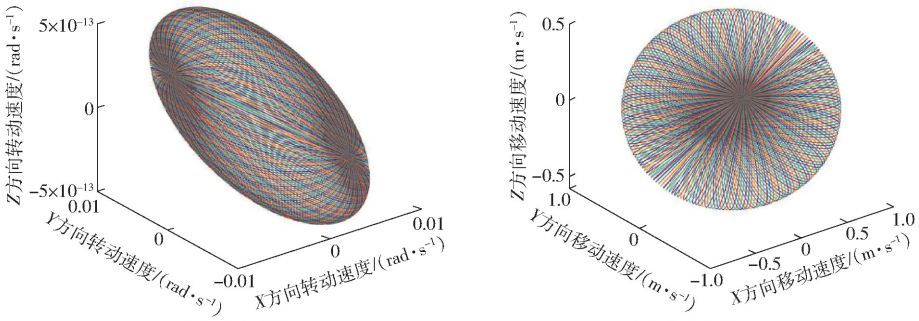


图 11 混联机器人输出速度向量分布图

Fig. 11 Output velocity vector distribution of hybrid robot

给定并联头 H 副驱动单位输入速度球体,得到并联头末端转动和移动速度椭球体如图 12 所示。由图 12 可以看出,并联头沿 X、Y 方向转动速度和移动速度输出相同,且无 Z 方向转动速度输出。

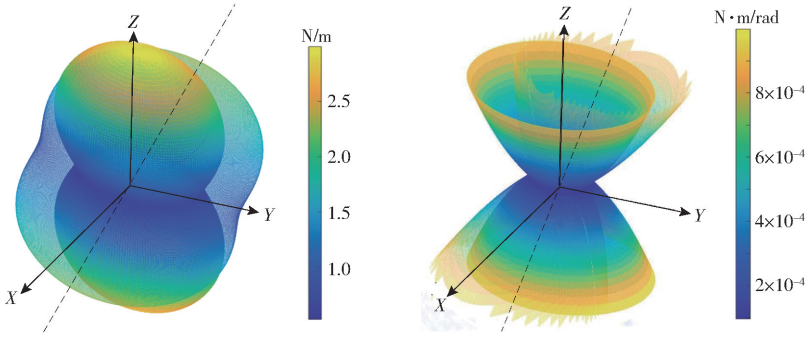
混联机器人在初始位置和并联头摆角 30°时的方向刚度如图 13 所示。由图 13 可以看出,混联机器人方向刚度与并联头末端方位有关,并沿方位轴线垂面对称。



(a) 转动速度　　(b) 移动速度

图 12　并联头输出速度向量分布图

Fig. 12　Output velocity vector distribution of parallel head



(a) 移动方向　　(b) 转动方向

图 13　混联机器人方向刚度

Fig. 13　Directional stiffness of hybrid robot

5　结论

(1)提出一种带随动滑筒的并联头串联双导轨的混联五自由度机器人构型 3 - RHUR/PUS + PP，通过优化确定了混联机器人尺寸，并对其性能进行了分析。

(2)基于螺旋理论建立了串并混联的正逆运动学映射关系，为混联机器人整体性能研究奠定了基础。

(3)综合考虑混联机器人的转动能力、力传递性能、速度性能和刚度性能，建立了多目标加权综合优化函数，提出 OptLHS 采样与三次插值相结合的优化算法，以此对混联机器人进行多目标优化。该优化方法所需优化时间仅为同量级全因子优化的 8%，证明了优化方法的有效性。

参　考　文　献

[1] HUANG Z, LI Q, DING H. Theory of parallel mechanisms[M]. Springer Netherlands, 2013.

[2] MERLET J P. Parallel robots[M]. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[3] ZHAO T, LI E, BIAN H, et al. Type synthesis and analysis of rotational parallel mechanisms with a virtual continuous axis [J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 109:139 - 154.

[4] 赵延治,梁博文,曹亚超,等. 恒定雅可比 3 - PRRR 移动并联机构及其传递性能研究[J/OL]. 农业机械学报,2017,48(1):333 - 338,367.
ZHAO Yanzhi, LIANG Bowen, CAO Yachao, et al. 3 - PRRR translational parallel mechanism with constant Jacobian matrix and its transfer performance analysis[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(1):333 - 338,367. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20170144&journal_id = jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.01.044. (in Chinese)

[5] 叶伟,李秦川,张克涛. 一种运动部分解耦的 2R2T 并联机构运动学与性能分析[J/OL]. 农业机械学报,2019,50(1):374 - 382.
YE Wei, LI Qinchuan, ZHANG Ketao. Kinematics and performance analysis of 2R2T parallel manipulator with partially decoupled motion[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(1):374 - 382. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20190143&journal_id = jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.01.043. (in Chinese)

[6] SICILIANO B. The Tricept robot: inverse kinematics, manipulability analysis and closed-loop direct kinematics algorithm[J]. Robotica, 1999, 17:437 - 445.

[7] ZHANG D, GOSSELIN C M. Kinetostatic analysis and design optimization of the Tricept machine tool family[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering-Transactions of the ASME, 2002, 124(3):725 - 733.

[8] BI Z M, JIN Y. Kinematic modeling of Exechon parallel kinematic machine [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2011, 27(1):186 - 193.

[9] LI M, HUANG T, DEREK G, et al. Forward position analysis of the 3-DOF module of the TriVariant: a 5-DOF reconfigurable hybrid robot[J]. Journal of Mechanical Design, 2005, 128(1):319 - 322.

[10] 李蒙. 可重构混联机械手模块 TriVariant 的设计理论与方法[D]. 天津:天津大学, 2005.
LI Meng. Design theory and methodology of the TriVariant - a 5-DOF reconfigurable PKM module[D]. Tianjin: Tianjin University, 2005. (in Chinese)

[11] URIARTE L, ZATARAIN M, AXINTE D, et al. Machine tools for large parts[J]. CIRP Annals-Manufacturing Technology, 2013, 62(2):731 - 750.

[12] CHEN X, LIU X J, XIE F G, et al. A comparison study on motion/force transmissibility of two typical 3-DOF parallel manipulators: the sprint Z3 and A3 tool heads[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2014, 11(1):1 - 11.

[13] TIAN X, ZHAO T, LI E. A novel 5-DOF hybrid robot without singularity configurations[C]//2019 Intelligent Robotics and Applications, 2019.

[14] LIU Xinjun, WANG Jinsong. A new methodology for optimal kinematic design of parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(9): 1210 - 1224.

[15] LIU X J, WANG L P, XIE F, et al. Design of a three-axis articulated tool head with parallel kinematics achieving desired motion/force transmission characteristics[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2010, 132(2):237 - 247.

[16] ZHANG Xiaoli, NELSON C A. Multiple-criteria kinematic optimization for the design of spherical serial mechanisms using genetic algorithms[J]. Journal of Mechanical Design, 2011, 133(1): 819 - 827.

[17] ZHANG Dan, BIN Wei. Interactions and optimizations analysis between stiffness and workspace of 3 - UPU robotic mechanism [J]. Measurement Science Review, 2017, 17(2): 83 - 92.

[18] 赵星宇,赵铁石,云轩,等. 3 - P(4S)并联机构分析与多目标性能优化[J/OL]. 农业机械学报,2017,48(10):390 - 400.
ZHAO Xingyu, ZHAO Tieshi, YUN Xuan, et al. Mechanism analysis and multi-target performance optimization of 3 - P(4S) parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(10):390 - 400. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no = 20171050&flag = 1. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2017.10.050. (in Chinese)

[19] 许允斗, 徐郑和, 杨帆,等. 考虑工作空间与力传递效率的新型五自由度混联机器人设计与分析[J]. 中国机械工程, 2019, 30(16):1996 - 2002.
XU Yundou, XU Zhenghe, YANG Fan, et al. Design and analysis of a new 5-DOF hybrid robot considering workspace and force transmission efficiency[J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(16):1996 - 2002. (in Chinese)

[20] 张伟中,李金平,叶敏,等. 2 - PUR - PSR 并联机构尺度综合多目标优化[J/OL]. 农业机械学报,2020,51(11):403 - 410.
ZHANG Weizhong, LI Jinping, YE Min, et al. Multi-objective optimization of dimensional synthesis for 2 - PUR - PSR parallel manipulator[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(11):403 - 410. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20201144&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2020.11.044. (in Chinese)

[21] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京:高等教育出版社, 2006.

[22] POWELL M J. A fortran subroutine for solving systems of nonlinear algebraic equations[C]//Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations. UK, 1970.

[23] 王唱, 赵铁石, 赵延治,等. 基于 QR 分解的少自由度并联机构运动学及刚度分析[J]. 机械工程学报, 2015, 51(23): 28 - 35.
WANG Chang, ZHAO Tieshi, ZHAO Yanzhi, et al. Kinematic and stiffness analysis of lower-mobility parallel mechanisms based on QR decomposition [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(23):28 - 35. (in Chinese)

[24] DAI J S, ZHAO T S. Stiffness characteristics and kinematics analysis of two-link elastic underactuated manipulators[J]. Journal of Robotic Systems, 2010, 19(4):169 - 176.

[25] ZHAO Tieshi, ZHAO Yanzhi, SHI Liju. Stiffness characteristics and kinematics analysis of parallel 3-DOF mechanism with flexible joints[C]//2007 International Conference on Mechatronics and Automation. IEEE, 2007.

[26] JIN R, CHEN W, SUDJIANTO A. An efficient algorithm for constructing optimal design of computer experiments[J]. Journal of Statal Planning and Inference, 2016, 134(1):268 - 287.