doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2021.02.042

刚柔耦合串联机械臂末端位置误差分析与补偿

谭月胜　詹登辉　张彭豪
(北京林业大学工学院, 北京 100083)

摘要: 机械臂连杆柔性、关节柔性等非线性变形的综合影响,导致其末端位置发生偏离而产生误差。本文以 IRB1410 型串联机械臂为研究对象,采用理论分析、仿真分析与实验验证相结合的方式,对机械臂末端位置误差进行分析与补偿研究。首先,建立机械臂刚柔耦合理论误差模型,并运用 Newmark β 法进行数值仿真分析;联合 ANSYS 和 ADAMS 进行刚柔耦合机械臂末端位置运动误差仿真;为了实现快速补偿,提出基于 BP 神经网络的伪目标点法对位置误差进行补偿,补偿后其位置误差均方根减小了 68.3%,说明该方法具有较好的补偿效果;最后,自主设计并搭建了测量实验平台,采用所提算法进行了误差补偿实验,对比补偿前后距离误差,补偿后误差均方根减小了 77.01%,验证了伪目标点法对柔性误差补偿的有效性。

关键词: IRB1410 型串联机械臂; 刚柔耦合; 仿真分析; 位置误差补偿; BP-伪目标点法
中图分类号: TP242.2; TH112　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2021)02-0416-11　　**OSID**:

Analysis and Compensation of End Position Error of Rigid - Flexible Coupling Serial Manipulator

TAN Yuesheng　ZHAN Denghui　ZHANG Penghao
(*School of Technology*, *Beijing Forestry University*, *Beijing* 100083, *China*)

Abstract: Due to the combined effects of non-linear deformations such as link flexibility and joint flexibility, the end position of the robot arm deviates, resulting in errors. For this problem, the IRB1410 serial manipulator was used as the research object. Through the combination of theoretical analysis, simulation analysis and experimental verification, the position error of the end of the manipulator was analyzed and compensated. A theoretical error model of the rigid - flexible coupling of the robotic arm was established and the Newmark β method was used for numerical simulation analysis; ANSYS and ADAMS were used to carry out the simulation of the motion error of the rigid - flexible coupled robotic arm, and the change of the end position error was analyzed. In order to achieve rapid compensation, a pseudo target point method based on BP network was proposed to compensate the position error based on the simulation error data. The root mean square (RMS) value of the position error was reduced by 68.3% after compensation. In terms of time consumption, the method compensated for an average time of 0.393 s per point. The compensation results showed that this method had good compensation effect. The error measurement experiment was carried out by designing and building a measurement experiment platform independently, and the proposed algorithm was used to perform experimental error compensation. Comparing the distance error values before and after compensation of the algorithm, the RMS value of the error was reduced by 77.01% after compensation. The results showed that the pseudo target point method was effective and practical for the compensation of flexible errors.

Key words: IRB1410 serial manipulator; rigid - flexible coupling; simulation analysis; position error compensation; BP - pseudo target point method

0　引言

工业机械臂自身结构参数误差及柔性误差均会导致其末端执行器的实际位置发生偏离,从而使机械臂绝对定位精度降低[1]。因此对其进行误差分析与补偿显得尤为重要。国内外研究者对提高机械

收稿日期: 2020-09-29　修回日期: 2020-11-18
基金项目: 国家自然科学基金项目(51705022)
作者简介: 谭月胜(1971—),男,副教授,主要从事机器人运动学、动力学及其控制研究,E-mail: tanyuesheng@163.com

臂末端运动精度进行了大量研究。陈宵燕等[2]对串联机器人多模式标定及误差补偿方法进行了相关研究，建立了包含几何和柔性的误差模型，利用线性递减权重的粒子群算法选取测量位姿，提出了一种局部补偿方法，同时制定了一种多模式精度提高策略。TAN 等[3]利用压缩感知法对串联机械臂的几何误差进行了补偿。LIU 等[4]利用七次多项式与粒子群算法，并结合对机械臂关节进行轨迹规划，减小了机械臂末端的综合误差。机械臂作为一个强耦合性系统，其连杆和关节的弹性变形及动载荷等对末端执行器位置精度的影响均不可忽略，而采用运动学标定方法减小因柔性产生的误差时，效果不佳。针对机械臂刚柔耦合的情况，VOLECH 等[5]在机器人的减速器和连杆存在柔性时以仿真方式获得了机器人末端的形变量，以输入整形法对机器人末端误差进行了补偿。考虑到机械臂对于快速响应的要求，吴昊等[6]提出一种连续线性化模型预测控制方法来提高柔性空间机械臂的末端轨迹精度。由于机械臂柔性造成的非线性误差不可忽略，因此可结合上述方法针对具体的研究对象设计相应的补偿策略，对机械臂末端位置误差进行补偿。

本文针对机械臂因连杆与关节柔性变形而引起的末端位置的非线性误差问题，分析其误差变化情况，并对误差进行补偿。首先，建立刚柔耦合机械臂动力学和关节偏差相结合的误差模型；其次，利用有限元法与软件仿真[7-9]分析末端执行器位置误差变化；最后，基于 Matlab 并结合实际应用提出一种快速补偿方法，对机械臂末端位置误差进行离线补偿及实验验证，以期提高机械臂末端位置精度。

1　刚柔耦合机械臂误差模型及数值仿真

1.1　IRB1410 型机械臂动力学误差模型

IRB1410 型机械臂结构如图 1 所示，其本体结构包括：基座、腰部、大臂、肩部、小臂、腕部及法兰盘，作为一款六自由度机械臂，因其前 3 个关节及连杆对末端位置精度的影响远大于后 3 个关节及连杆，故将大臂连杆、小臂横杆和大臂平行的拉杆等效为 Euler－Bernoulli 梁模型研究其柔性变形，利用混合坐标系法和假设模态法来描述机械臂柔性杆的弹性变形[10-11]，并将关节等效为线性扭簧[12]，按照图 1 的尺寸参数可得简化模型如图 2 所示，其中用惯性坐标 $X_iY_iZ_i(i=0,1,2,3)$ 描述刚体的运动，柔性杆件的弹性变形则用固连在其根部的浮动坐标 $x_jy_jz_j$ $(i=1,2,3)$ 表示。

对图 2 中柔性杆上任一点在基坐标系 $X_0Y_0Z_0$ 下的位置关系可表述为

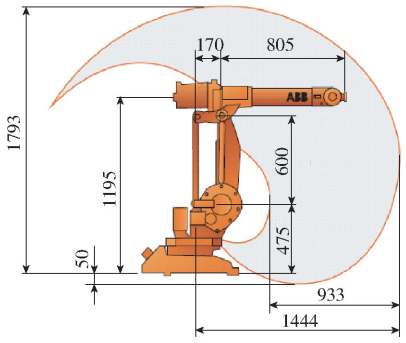


图 1　IRB1410 型机械臂基本尺寸图

Fig. 1　Basic dimensions of IRB1410 manipulator

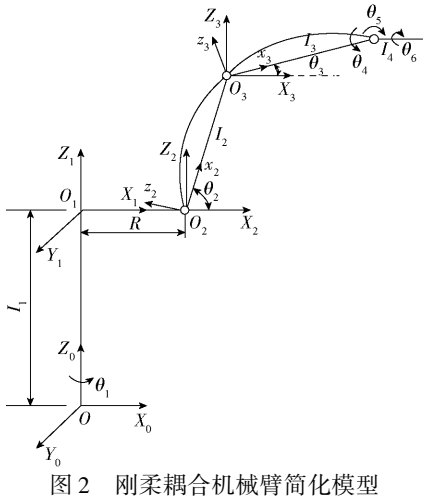


图 2　刚柔耦合机械臂简化模型

Fig. 2　Simplified model of rigid－flexible coupling manipulator

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{l}_{i-1}+\boldsymbol{l}_{i-2}+\boldsymbol{R}) \tag{1}$$

其中　$$v_i=\sum_{i=2}^{3}a_i(t)\varphi_i(x_i)=a_1\sin\frac{\pi x_i}{l_i}+a_2\sin\frac{2\pi x_i}{l_i} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}_i=\begin{bmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_i & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\sin\theta_i\\ \sin\theta_1\cos\theta_i & \cos\theta_1 & \cos\theta_1\sin\theta_i\\ -\sin\theta_i & 0 & \cos\theta_i\end{bmatrix} \tag{3}$$

式中　$\boldsymbol{R}$——原点 O_1 指向 O_2 的矢量

$\boldsymbol{l}_i$——杆 i 在自身惯性坐标系下的位置矢量，规定 $\boldsymbol{l}_0$ 为零向量

$\boldsymbol{u}_i$——柔性杆在该任意点处未变形时的位置向量，$i=2,3$

$\boldsymbol{v}_i$——柔性杆在该任意点处产生变形后的位置向量，$i=2,3$

a_1、a_2——前两阶模态坐标

$\boldsymbol{A}_i$——任意时刻时该浮动坐标系在基坐标系下的坐标变换矩阵，$i=1,2,3$

θ_1——任意时刻回转角

θ_i——关节 i 转动角，$i=2,3$

因此，该点的速度为

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{A}}_i(\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{l}_{i-1}+\boldsymbol{l}_{i-2}+\boldsymbol{R})+\boldsymbol{A}_i(\dot{\boldsymbol{v}}_i+\dot{\boldsymbol{l}}_{i-1}) \tag{4}$$

则柔性杆动能为

$$T_l = \frac{1}{2}\int_l \rho \dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}l \tag{5}$$

柔性关节动能为

$$T_r = \frac{1}{2}(J_1\dot{q}_{r1}^2 + J_2\dot{q}_{r2}^2 + J_3\dot{q}_{r3}^2) \tag{6}$$

其中 $J_i = J_{ri}N^2 \quad (i=1,2,3)$

式中 J_i——被驱动的机械负载转动惯量

N——被驱动的机械负载质量

J_{ri}——第 i 关节电机转子转动惯量，$i=1,2,3$

在机械臂简化模型中，将其腕关节及末端的负载视为依附于第 3 连杆末端的质点，质量为 m_g，则负载动能为

$$T_G = \frac{1}{2}m_g\{\dot{\theta}_1^2(l_2\cos\theta_2 + l_3\sin(\theta_2-\theta_3))^2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2\cos^2\theta_3 + [l_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3) - l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_3]^2\} \tag{7}$$

式中 l_2——大臂杆长 l_3——小臂杆长

综上所述，机械臂系统的总动能可表示为

$$T = T_l + T_r + T_G$$

机械臂系统的势能包括杆件的弹性势能与重力势能以及柔性关节的弹性势能，柔性杆弹性势能为

$$U_{l_i} = \frac{1}{2}E_iI_i\int_{l_i}\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2}\right)^2 \mathrm{d}x_i \quad (i=2,3) \tag{8}$$

式中 E_i——柔性杆弹性模量

I_i——柔性杆截面惯性矩

重力势能为

$$G = -m_1g\frac{l_1}{2} + m_2g\frac{l_2}{2}\sin\theta_2 + m_3g\left(l_2\sin\theta_2 - \frac{l_3}{2}\cos(\theta_2-\theta_3)\right) + m_4g\left(l_2\sin\theta_2 + l_3\sin\theta_3 + \frac{l_4}{2}\sin\theta_5\right) + m_gg(l_2\cos\theta_2 - l_3\sin(\theta_2-\theta_3)) \tag{9}$$

柔性关节弹性势能为

$$U_r = \frac{1}{2}k_{t1}(\theta_1-q_{r1})^2 + \frac{1}{2}k_{t2}(\theta_2-q_{r2})^2 + \frac{1}{2}k_{t3}(\theta_3-q_{r3})^2 \tag{10}$$

式中 k_{ti}——第 i 关节的扭转刚度，$i=1,2,3$

则系统总势能为

$$U = U_l + G + U_r$$

根据第二类拉格朗日法公式有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{L}{\dot{q}}\right) - \frac{L}{q} = Q \tag{11}$$

其中 $L = T - U$，由式(5)～(10)可得机械臂的动力学模型为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}} - \bar{\boldsymbol{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}\right) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{q}} + k_t\Delta\theta = Q_F \tag{12}$$

$$\boldsymbol{J}\dot{q}_r - k_t\Delta\theta = Q_r \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{q} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6]^{\mathrm{T}}$$

式中 $\boldsymbol{q}$——广义坐标向量

Q_F——广义外力二次项组成所对应的广义力

Q_r——广义速度二次项组成所对应的广义力

$\boldsymbol{K}$——刚度矩阵

$\boldsymbol{M}$——质量矩阵

$\boldsymbol{J}$——$J_{ri}N^2$ 组成的向量

$\Delta\theta$——关节角偏差

由于机械臂在各连杆自身重力和附加载荷的影响下，关节轴线会受到力矩的作用，从而导致关节发生微小位移，产生一定的转角偏差。在将柔性关节等效为扭簧模型时，关节角偏差与关节所受力矩的关系可以表示为

$$\Delta\theta = C\tau \tag{14}$$

式中 C——柔度系数，rad/(N·m)

τ——力矩，N·m

对于 6 自由度串联式机械臂，其前 3 个关节产生的关节转角偏差对末端定位精度的影响高于后 3 个关节[13-14]，为简化计算模型，只对前 3 个关节作柔性化处理和误差建模分析。图 3 为简化模型的误差分析图，建模时暂且不考虑连杆的微小变形，在机械臂运动过程中，考虑惯性力矩的影响，将其当成平衡力系研究，由此可得大臂自重、小臂自重和负载对第 2、3 关节轴线的力臂为

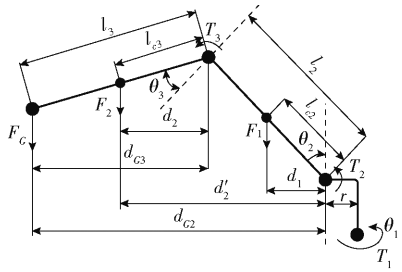


图 3 机械臂负载及自重引起的关节角偏差分析图

Fig. 3 Analysis diagram of joint angle deviation caused by manipulator load and dead weight

$$\begin{cases} d_1 = l_{c2}\sin\theta_2 \\ d_2 = l_{c3}\cos(\theta_2-\theta_3) \\ d_2' = l_2\sin\theta_2 + d_2 \\ d_{G3} = l_3\cos(\theta_2-\theta_3) \\ d_{G2} = l_2\sin\theta_2 + l_3\cos(\theta_2-\theta_3) \end{cases} \tag{15}$$

式中 l_{c2}——大臂重心到关节旋转轴线的距离

l_{c3}——小臂重心到关节旋转轴线的距离

则第 1、2、3 关节力矩为

$$\begin{cases} T_1 = \left[\frac{1}{2}m_1r^2 + \frac{m_2}{3}l_2^2 + m_2r^2 + \frac{m_3}{3}l_3^2 + m_3(l_2\sin\theta_2 + r)^2 + m_G(d_{G2} + r)^2\right]\ddot{\theta}_1 \\ T_2 = F_1d_1 + F_2d_2' + F_Gd_{G2} + \left[\frac{m_2}{3}l_2^2 + \frac{m_3}{3}l_3^2 + m_3l_2^2 + m_G(l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3\sin\theta_3)\right]\ddot{\theta}_2 \\ T_3 = F_2d_2 + F_Gd_{G3} + \left(\frac{m_3}{3}l_3^2 + m_Gl_3^2\right)\ddot{\theta}_3 \end{cases} \tag{16}$$

式中　F_1——大臂自重　　F_2——小臂自重

F_G——负载载荷

m_1、m_2、m_3、m_G——杆 1、2、3 及负载质量

r——杆 1 回转半径，与图 2 中的 R 相等

$\ddot{\theta}_1$、$\ddot{\theta}_2$、$\ddot{\theta}_3$——第 1、2、3 关节角加速度

结合式(14)，并设 $m = F_2/F_1$，$n = C_3/C_2$，C_1、C_2、C_3 分别表示第 1、2、3 关节的柔度系数，可得第 1、2、3 关节处的关节角偏差为

$$\begin{cases} \Delta\theta_1 = C_1T_1 = C_1\left[\frac{1}{2}m_1r^2 + \frac{m_2}{3}l_2^2 + m_2r^2 + \frac{m_3}{3}l_3^2 + m_3(l_2\sin\theta_2 + r)^2 + m_G(l_2\sin\theta_2 + l_3\cos(\theta_2 - \theta_3) + r)^2\right]\ddot{\theta} \\ \Delta\theta_2 = C_2T_2 = C_2F_1(d_1 + md_2') + C_2F_Gd_{G2} = C_2F_1(l_{c2} + ml_2)\sin\theta_2 + C_2F_1ml_{c3}\cos(\theta_2 - \theta_3) + C_2F_G(l_2\sin\theta_2 + l_3\cos(\theta_2 - \theta_3)) + C_2\left[\frac{m_2}{3}l_2^2 + \frac{m_3}{3}l_3^2 + m_3l_2^2 + m_G(l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3\sin\theta_3)\right]\ddot{\theta}_2 \\ \Delta\theta_3 = nC_2T_3 = mnC_2F_1d_2 + nC_2F_Gd_{G3} = mnC_2F_1l_{c3}\cos(\theta_2 - \theta_3) + nC_2F_Gl_3\cos(\theta_2 - \theta_3) + nC_2\left(\frac{m_3}{3}l_3^2 + m_Gl_3^2\right)\ddot{\theta}_3 \end{cases} \tag{17}$$

1.2　机械臂动力学模型数值仿真

关节力矩是各关节转动惯量与其角加速度的乘积，广义力矩给定为其关节力矩的两倍，因此设定各个关节与时间的角位移为

$$\begin{cases} q_{r1} = \frac{\pi}{12}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{12} \\ q_{r2} = \frac{\pi}{9}\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{9} \\ q_{r3} = -\frac{\pi}{12}\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{12} \\ \theta_4 = \frac{\pi}{6}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{6} \\ \theta_5 = \frac{\pi}{20}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{20} \\ \theta_6 = -\frac{\pi}{4}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \end{cases} \tag{18}$$

结合式(12)、(13)、(17)，同时给出数值仿真参数：$l_1 = 0.375$ m，$l_2 = 0.72$ m，$l_3 = 0.89$ m，$R = 0.15$ m，$EI_2 = 4.09 \times 10^2$ N·m^2，$EI_3 = 2.33 \times 10^2$ N·m^2，$m_1 = 87.49$ kg，$m_2 = 42.26$ kg，$m_g = 11$ kg，$k_{t1} = 6.48 \times 10^6$ N·m/(°)，$k_{t2} = 1.492 \times 10^6$ N·m/(°)，$k_{t3} = 6.08 \times 10^5$ N·m/(°)，$t = 2$ s，$\Delta t = 0.04$ s，$C_1 = 3.356 \times 10^{-10}$ rad/(N·m)，$C_2 = 6.948 \times 10^{-10}$ rad/(N·m)，$m = 0.7$，$n = 1.4$，采用 Newmark β 法[15]计算得到机械臂末端 3 个方向误差变化曲线，如图 4 所示。

由图 4 可知，机械臂末端的误差随时间变化而变化，3 个方向均呈现波动性和非线性，x、y 方向的误差变化范围较接近，而 z 方向因末端具有竖直向下的负载，故误差变化较大，因此机械臂连杆柔性与关节柔性对末端位置精度的影响不可忽略。图 5 是对动力学模型进行数值仿真后得到的末端综合距离误差。由图 5 可以看出，综合距离误差仍然处在一个较大的范围内，因此有必要对已建立的动力学模型的准确性进行验证。

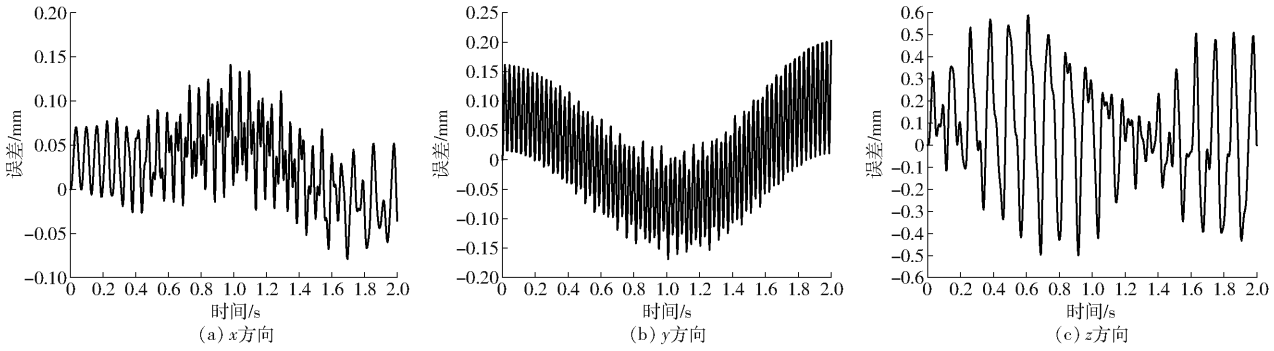


图 4　数值仿真机械臂末端 3 个方向误差变化曲线

Fig. 4　Error variation curves of numerical simulation at end of manipulator in three directions

2　刚柔耦合机械臂末端运动误差仿真分析

2.1　模型建立

机械臂在自重、负载以及惯性力矩的影响下，连杆与关节均会发生一定程度的柔性变形[16]。机械

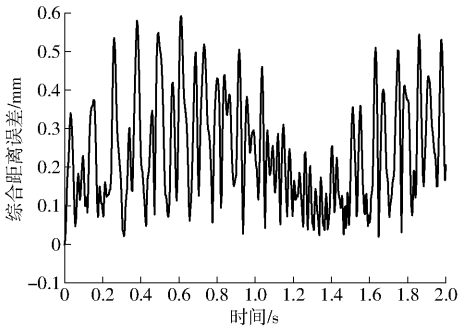


图 5 数值仿真综合误差曲线

Fig. 5 Numerical simulation integrated error curve

臂连杆由于是细长杆结构,在载荷和惯性力的作用下引起末端执行器位置发生偏离,因此仅将大臂、小臂和大臂平行的拉杆利用 ANSYS 软件作柔性化处理,可得含柔性杆件的机械臂三维模型,如图 6 所示。而将关节等效为线性扭簧的形式,并在关节处施加关节力矩函数以实现柔性化[17-18]。以基座与腰部之间的关节为例,在基座旋转轴输入端添加转动副和驱动函数,腰部输出端添加转动副和关节力矩以带动腰部旋转,柔性关节 1 模型如图 7 所示。



图 6 含柔性杆的机械臂模型

Fig. 6 Manipulator model with flexible rods

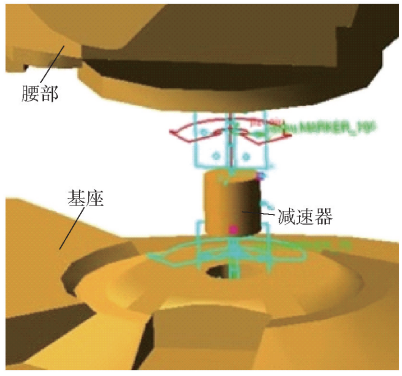


图 7 柔性关节 1 模型

Fig. 7 First joint flexible model

2.2 运动误差仿真

为与理论模型相对应,末端载荷和各关节转动规律均设置为理论建模时所给定的数值,在 ADAMS 中设置仿真时间为 2 s,仿真时间间隔为 0.004 s,仿真后再与设置相同参数的刚体模型对比。

图 8、9 分别为对刚柔耦合机械臂模型进行 ADAMS 仿真时机械臂末端 3 个方向的距离误差变化曲线及末端综合距离误差变化曲线,对比图 4 和图 8 可知,由于受到杆件柔性、关节柔性及负载等因素的综合影响,在一段时间内会使机械臂在运动过程中做非线性颤动;但从 3 个方向上分别对比数值仿真与 ADAMS 仿真结果可得,两种仿真所得到的 3 个方向上的误差变化趋势及范围基本相同。同时对比图 5 和图 9,可得图 10 的结果。

由图 10 可得,因 ADAMS 仿真中所取模态阶数为 20 阶,高于数值仿真时的模态阶数,而模态阶数越高模型也更接近真实情况,ADAMS 软件建立的刚柔耦合模型其耦合度也更强,在同样的时间周期内

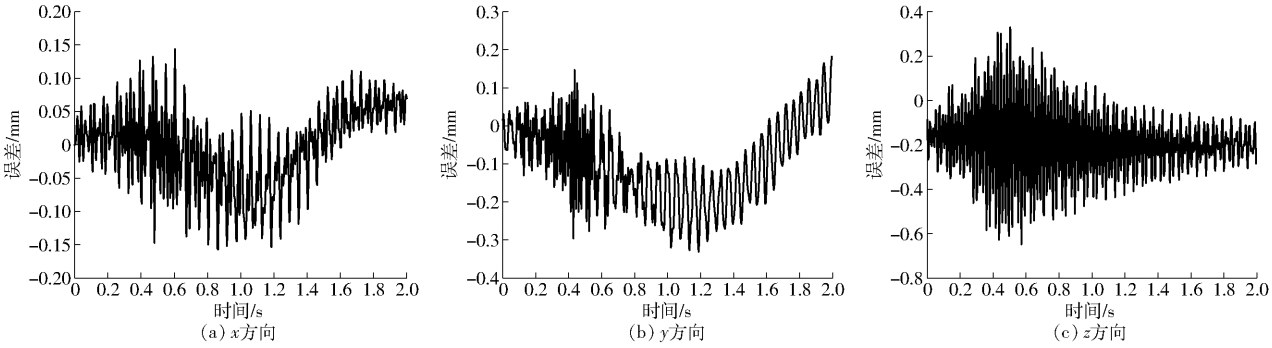


图 8 ADAMS 仿真机械臂末端 3 个方向误差变化曲线

Fig. 8 ADAMS simulation of manipulator end error curve in three directions

和运动规律下,末端颤振的频率也会较数值仿真时更高,因此两种仿真结果会有所差别,在误差允许范围内,数值仿真与 ADAMS 仿真的结果可以相互验证所建机械臂动力学模型及机械臂刚柔耦合系统模型的准确性。

3 末端位置误差补偿

由于机械臂中唯一可控的参数为其关节转角,因此使用算法找到合适的关节角,并对关节角进行微调,以达到误差补偿的目的,其补偿原理如图 11 所示[19]。

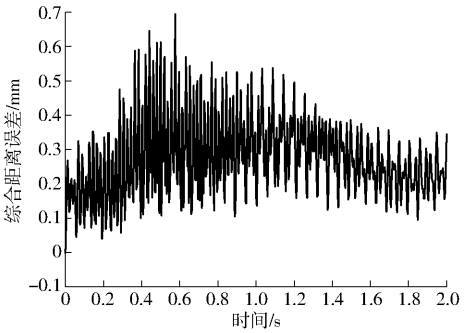


图 9　ADAMS 仿真综合误差曲线

Fig. 9　ADAMS simulation integrated error curve

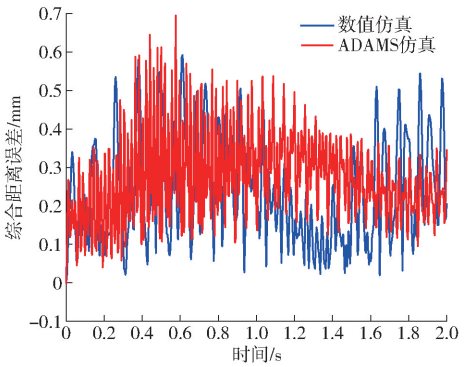


图 10　数值仿真与 ADAMS 仿真综合误差对比曲线

Fig. 10　Numerical simulation and ADAMS simulation comprehensive error comparison curve

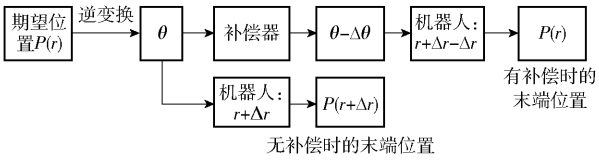


图 11　机械臂末端误差补偿原理图

Fig. 11　Schematic of manipulator end error compensation

基于所得误差变化曲线具有强非线性特征，而神经网络对于无规律、非线性数据具有很好的拟合作用，它无需求出具体误差模型方程，只需对误差样本进行网络训练，便可得到所需要的误差模型[20-21]，因此利用 BP 算法训练、预测误差，其中输入为 6 关节角，输出为 x、y、z 3 个方向误差。在 ADAMS 仿真界面中保持不变的转动规律，设置仿真时间为 6 s，仿真时间间隔为 0.02 s，可以得到 301 组误差数据，将其作为样本利用 BP 神经网络算法进行训练，可得到网络训练输出误差与仿真所得误差的对比拟合曲线，如图 12 所示。

由图 12 可得，利用 BP 算法对于非线性、无规律数据具有很好的拟合效果，其拟合率达 99.226%，网络训练输出的误差与仿真所得误差虽有较为微小的差距，但不会对后续的补偿研究产生影响，并将已训练好的网络保存。

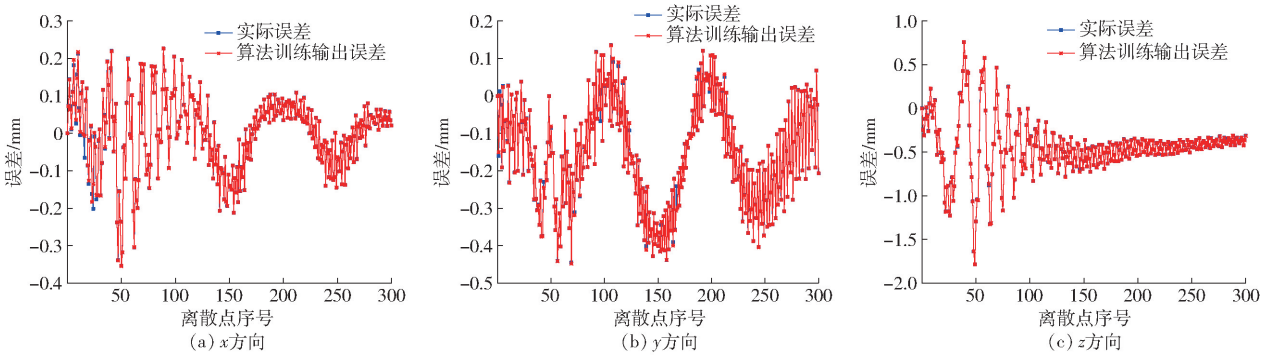


图 12　BP 算法训练拟合对比曲线

Fig. 12　Comparison curves of BP algorithm training fitting

以上运用 BP 算法训练误差来近似拟合仿真误差的过程，主要是研究机械臂正常工作时末端的轨迹平稳现象，针对机械臂启动时的情形，由于末端的抖动造成机械臂在启动时发生振动现象而导致末端产生不规则的运动轨迹，表现为机械臂启动时各关节振动，造成各关节运动轨迹呈非线性特征，以下将对各关节不规则运动轨迹展开分析，计算 BP 训练实际误差拟合率，同时判定算法训练的有效性。

为验证 BP 算法对于误差训练的有效性，将机械臂刚柔耦合模型瞬时启动所得到的末端轨迹进行离散，设置仿真时间为瞬时启动时间 1 s，仿真时间间隔为 0.02 s，可以得到 51 组误差，运用式(18)计算得到各离散点关节转角，并进行测量实验，综合比较 BP 算法训练误差与实际测量误差及仿真误差的一致性。

由图 13 可看出，在机械臂启动瞬时的不规则运动轨迹，BP 算法的拟合效果虽不明显，但是基本变化趋势相同，说明 BP 算法对于强非线性，不规则运动轨迹同样具有较好的拟合效果，在 0.5 s 之前误差拟合率达 83.573%，0.5 s 后误差拟合率达 98.926%，BP 算法训练输出的误差与仿真所得误差基本接近，与实验测量误差的差距也很小，说明机械臂启动瞬时的影响不可忽略，本文重点讨论机械臂平稳运行时的柔性因素的影响。

为简化研究，将第 2 节中利用 ADAMS 仿真得到的误差数据进行离散化，将其均匀离散成 51 个误

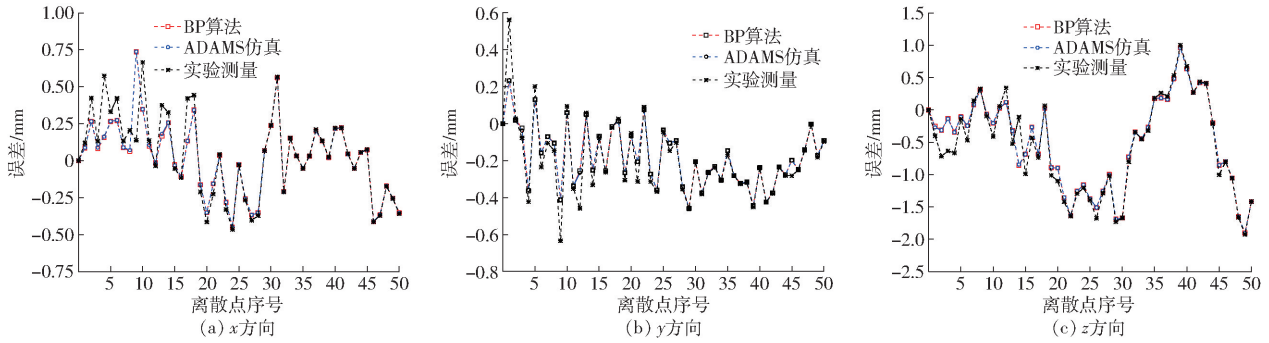


图 13 不规则轨迹训练拟合对比曲线

Fig. 13 Comparison curves of irregular trajectory training fitting

差点。为实现快速补偿,提出基于正逆运动学的伪目标点法,其流程如图 14 所示。

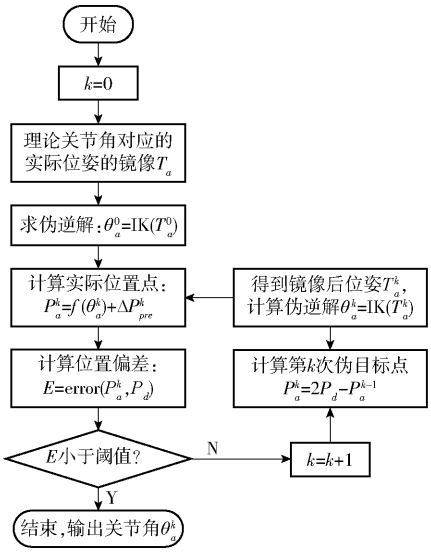


图 14 伪目标点法流程图

Fig. 14 Flow chart of pseudo-targeting

主要步骤如下:

(1)设迭代的次数 $k=0$,给定理论关节转角,通过正运动学求解可以得到理论目标位置点 P_d,且通过仿真可得到末端初始位置误差 ΔP_d,两者相加再镜像之后得第 1 次伪目标位置点 $P_d-\Delta P_d$,此时姿态与理论点的姿态也互为镜像,由此可得位姿为 T_a^0,再进行运动学逆解得到伪关节角 θ_a^0 为

$$\theta_a^0=\mathrm{IK}(T_a^0) \tag{19}$$

式中 IK( )——逆运动学计算函数

(2)基于第 1 步得到的关节角 θ_a^0,利用正运动学及 BP 算法得到对应机械臂末端位置点为

$$P_a^0=f(\theta_a^0)+\Delta P_{pre}^0 \tag{20}$$

式中 $f(\ )$——正运动学中关于位置点的计算函数

ΔP_{pre}^0——利用 BP 算法预测得到的该组关节角对应误差

(3)判断实际位置点与理论位置点间的偏差 E

$$E=\mathrm{error}(P_a^0,P_d) \tag{21}$$

式中 E——距离误差

若 E 比所设置的阈值小,则停止迭代计算,并输出 θ_a^0 作为需要调整的关节角。反之,继续迭代,$k=k+1$。

(4)生成第 $k(k>0)$ 次的伪目标位置点 P_a^k 为

$$P_a^k=2P_d-P_a^{k-1} \tag{22}$$

其姿态与第 $k-1$ 次姿态互为镜像,可得位姿为 T_a^k。

(5)通过运动学逆解求解伪逆解为

$$\theta_a^k=\mathrm{IK}(T_a^k) \tag{23}$$

(6)基于第 k 次计算结果计算对应的末端位置点为

$$P_a^k=f(\theta_a^k)+\Delta P_{pre}^{k-1} \tag{24}$$

(7)判断第 k 次的位置点与理论位置点的偏差是否小于阈值,进而得出结果 θ_a^k 或继续进行迭代。

$$E=\mathrm{error}(P_a^k,P_d) \tag{25}$$

其中

$$E=\sqrt{(p_x+\Delta x-x_0)^2+(p_y+\Delta y-y_0)^2+(p_z+\Delta z-z_0)^2} \tag{26}$$

式中 p_x、p_y、p_z——关节转角微调后求解得到的 3 个方向空间的位置坐标值

Δx、Δy、Δz——神经网络训练后预测输出的 3 个方向误差

x_0、y_0、z_0——期望关节角对应的末端期望位置点坐标值

将离散点结合训练的 BP 算法与上述计算步骤,再利用 Matlab 编程,根据 IRB1410 型机械臂设计资料设置偏差 $E=0.24$ mm[22-23],对所有的离散点进行计算,最终可以得到补偿前、后距离误差对比如图 15 所示。

由图 15 可知,从整体的距离误差看,利用伪目标点法补偿后,机械臂末端的位置误差均减小,能达到不错的补偿效果,其位置误差均方根减小了 68.30%;在耗时方面,该方法补偿每个点的平均耗时为 0.393 s,能实现快速实时补偿。

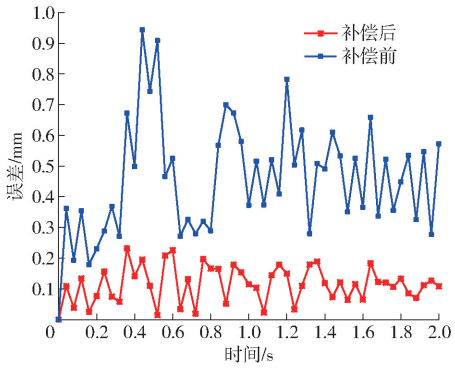


图 15　伪目标点法末端距离误差曲线

Fig. 15　Pseudo-target point method end distance error curves

4　实验验证

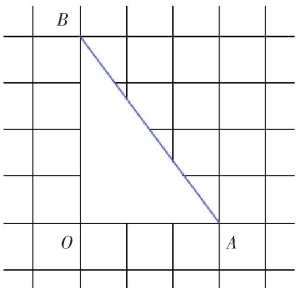
4.1　末端位置点测量实验

实验以 IRB1410 型机械臂为研究对象进行测量，测量仪器为经纬仪，在测量前需对经纬仪进行安装调试，保证其视野清晰，显示正常，图 16 为调试好的经纬仪；利用贴于法兰盘处的含三角形的坐标纸测量机械臂末端位置点，如图 17 所示。



图 16　经纬仪现场安装图

Fig. 16　Site installation diagram of theodolite



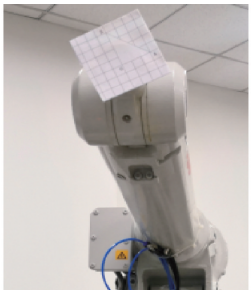


图 17　三角形坐标纸

Fig. 17　Triangular coordinate paper

三角形位于机械臂末端，其相对于安装好的经纬仪坐标系原点形成一种“透视”效果，利用经纬仪测量三角形的 3 个顶点的水平角 θ 和竖直角 α，可构建空间点坐标求解模型[24-25]，图 18 为求解模型图，三角形三顶点的坐标可分别表示为

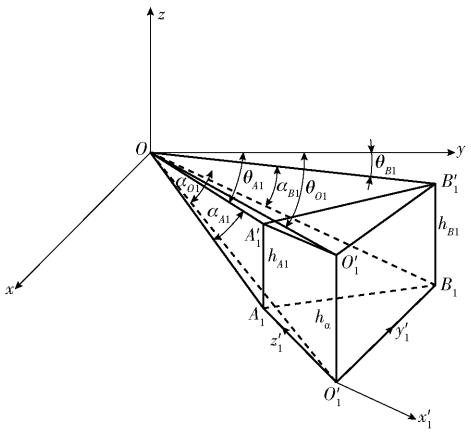


图 18　经纬仪测量位置求解示意图

Fig. 18　Schematic for solving measurement position of theodolite

$$\begin{cases} x_{Ai} = h_{Ai}\cot\alpha_{Ai}\sin\theta_{Ai} \\ y_{Ai} = h_{Ai}\cot\alpha_{Ai}\cos\theta_{Ai} \\ z_{Ai} = -h_{Ai} \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} x_{Bi} = h_{Bi}\cot\alpha_{Bi}\sin\theta_{Bi} \\ y_{Bi} = h_{Bi}\cot\alpha_{Bi}\cos\theta_{Bi} \\ z_{Bi} = -h_{Bi} \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} x_{Oi} = h_{Oi}\cot\alpha_{Oi}\sin\theta_{Oi} \\ y_{Oi} = h_{Oi}\cot\alpha_{Oi}\cos\theta_{Oi} \\ z_{Oi} = -h_{Oi} \end{cases} \tag{29}$$

其中 3 个垂直距离 h_{Ai}、h_{Oi}、h_{Bi}由下式计算而得

$$\begin{cases} l^2 = (x_{Ai} - x_{Oi})^2 + (y_{Ai} - y_{Oi})^2 + (z_{Ai} - z_{Oi})^2 \\ m^2 = (x_{Bi} - x_{Oi})^2 + (y_{Bi} - y_{Oi})^2 + (z_{Bi} - z_{Oi})^2 \\ n^2 = (x_{Bi} - x_{Ai})^2 + (y_{Bi} - y_{Ai})^2 + (z_{Bi} - z_{Ai})^2 \end{cases} \tag{30}$$

三角形边长 $l_{OA} = 30$ mm，$m_{OB} = 40$ mm，$n_{AB} = 50$ mm。将仿真中转动规律进行离散化，将其离散成 35 组关节角，依次输入到机械臂示教器中，分别测量每组关节角对应的机械臂末端悬挂重物（与仿真时保持一致，为 11 kg）和未悬挂重物两种位置点的水平角和竖直角，部分数值如表 1 所示（仅列出前 5 次测得数据）。

根据所建立的求解模型，利用 Matlab 软件编程可以计算得到机械臂未挂重物和挂有重物两种情况下末端三角形三顶点的坐标值，由此可得机械臂在关节和连杆柔性变形下末端点位的位置误差。

为了验证 ADAMS 仿真误差与实验测量误差结果的一致性，将机械臂刚柔耦合模型仿真所得到的末端轨迹离散为 25 个轨迹点，相应的误差也离散为 25 个。表 2 为运用式（18）计算刚柔耦合机械臂模型在 0.04、0.12、0.20、0.28、0.36 s 所对应的机械臂各关节转角，以此类推计算 25 组关节角度（仅列出

表 1 挂重物前后经纬仪测量值

Tab. 1 Longitudinal measurements before and after hanging heavy object

序号	测量类型	末端未挂重物			末端挂有重物		
		点 O	点 A	点 B	点 O	点 A	点 B
1	水平	350°08′40″	350°38′28″	349°50′56″	350°08′41″	350°38′27″	349°50′55″
	竖直	84°58′00″	84°41′27″	84°13′58″	84°58′40″	84°42′08″	84°14′41″
2	水平	353°45′37″	354°17′28″	353°27′11″	353°45′37″	354°17′27″	353°27′10″
	竖直	84°53′39″	84°38′16″	84°11′07″	84°54′21″	84°38′55″	84°11′41″
3	水平	356°45′06″	357°20′00″	356°25′31″	356°45′07″	357°20′02″	356°25′31″
	竖直	90°52′56″	90°39′33″	90°09′12″	90°53′35″	90°40′18″	90°10′00″
4	水平	358°58′31″	359°31′28″	358°43′34″	358°58′31″	359°31′29″	358°43′34″
	竖直	91°44′14″	91°31′47″	91°03′45″	91°45′10″	91°32′31″	91°04′32″
5	水平	0°23′58″	0°53′17″	0°06′11″	0°23′57″	0°53′18″	0°06′12″
	竖直	86°21′24″	86°08′05″	85°39′10″	86°22′11″	86°08′53″	85°39′53″

表 2 各关节输入转角

Tab. 2 Input angle of joints (°)

实验次序	第 1 轴	第 2 轴	第 3 轴	第 4 轴	第 5 轴	第 6 轴
1	-0.118 28	0.015 998	0.003 999	-0.236 56	-0.070 97	0.354 838
2	-1.053 35	0.143 827	0.035 957	-2.106 71	-0.632 01	3.160 058
3	-2.864 75	0.398 668	0.099 670	-5.729 49	-1.718 85	8.594 235
4	-5.438 64	0.778 891	0.194 723	-10.887 30	-3.263 18	16.315 290
5	-8.613 31	1.282 064	0.320 516	-17.226 60	-5.167 99	25.839 930

前 5 次输入值)。表 3 为刚柔耦合模型仿真的末端轨迹离散后所得 25 组连续时间间隔的末端轨迹误差(仅列出前 5 次输出值),表 4 为实验阶段在连续时间间隔内点 O 在 3 个方向上的距离误差变化情况(仅列出前 5 次测得数据),同时选择 25 组连续相同时间间隔的离散点进行对比,结果如图 19 所示。

表 3 离散后末端轨迹误差

Tab. 3 Discrete rear end trajectory error values

时间/s	x 方向误差/mm	y 方向误差/mm	z 方向误差/mm	距离误差/mm
0.04	0.130 6	0.001 4	-0.337 7	0.362 076 801
0.12	0.175 3	-0.143 5	-0.272 4	0.354 293 805
0.20	0.205 8	0.041 8	-0.095 1	0.230 531 755
0.28	0.178 7	-0.126 3	-0.297 1	0.368 990 230
0.36	0.096 4	-0.077	-0.660 6	0.672 022 559

表 4 点 O 3 个方向误差

Tab. 4 O-point three-direction error values mm

点序号	x 方向误差	y 方向误差	z 方向误差
1	-0.800 7	0.845 1	-0.110 7
2	0.792 8	-1.016 2	-1.306 7
3	-0.206 2	1.036 4	0.594 6
4	-0.201 5	0.603 4	-0.305 8
5	-0.098 7	-0.686 1	-0.790 9

图 19 为数值仿真、ADAMS 仿真以及实验测量的综合误差变化情况的对比曲线。由图 19 可看出,由于机械臂受到除柔性关节、柔性杆件及测量等因素的影响造成的运动学误差外,同时还受到机械臂的装配误差、关节驱动电机影响、机械臂启动时的末端振动等因素也会对机械臂的末端综合运动误差造成影响,造成实际综合误差大于数值仿真及 ADAMS 仿真时的运动学综合误差,但由于三者综合误差变化趋势基本相同,因此可利用该刚柔耦合机械臂模型来近似研究实际机械臂的运动学误差补偿问题。

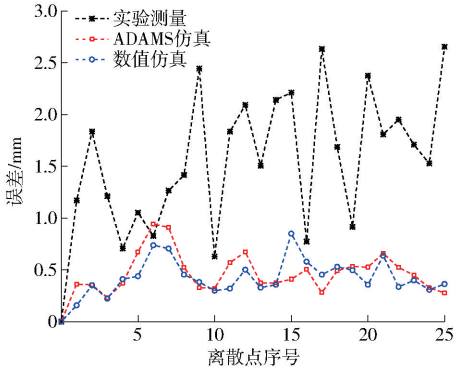


图 19 综合误差对比曲线

Fig. 19 Comparison graphs of aggregate errors

4.2 末端位置误差补偿验证

为验证补偿算法的有效性和可操作性,利用所得实验数据进行误差补偿验证,因点 O、A、B 的误差相差不大,故选取点 O 作为补偿对象,图 20 为误差补偿流程图。考虑实验中人为和环境等因素的影响并根据 IRB1410 型机械臂的绝对轨迹精度,可将伪目标点法中阈值 E 设置为 0.6 mm,补偿前后效果对

比如图 21 所示。

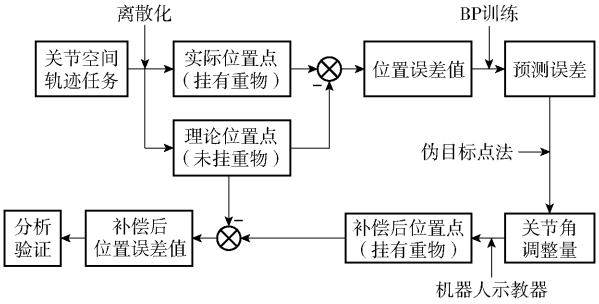


图 20　误差补偿流程图

Fig. 20　Error compensation flowchart

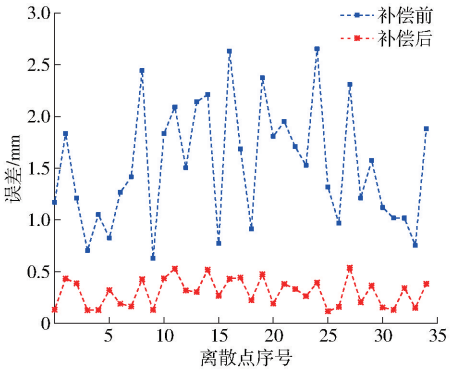


图 21　点 O 距离误差补偿前后对比

Fig. 21　O-point distance error compensation comparison

由图 21 可看出，补偿前距离误差最大值和平均值分别为 2.654、1.530 mm，补偿后距离误差最大值和平均值分别为 0.538、0.299 mm，误差均方根减小了 77.01%，可以验证所设计的伪目标点法对误差的补偿具有有效性，由于机械臂还受到除柔性和测量之外其他因素的影响，故机械臂的误差并未完全消除。

5　结论

（1）考虑机械臂连杆和关节柔性建立了刚柔耦合理论位置误差模型，并进行数值仿真分析。

（2）基于理论误差模型建立了机械臂刚柔耦合虚拟样机模型，并进行运动误差仿真分析，与理论计算所得位置误差进行对比，验证了所建模型的准确性。

（3）在仿真所得误差的基础上，提出基于 BP 算法的伪目标点法对位置误差进行快速补偿，获得了较好的误差补偿效果。

（4）通过搭建测量实验平台进行了误差测量实验，利用伪目标点法进行误差补偿，结果表明，距离误差最大值和平均值均减小，从而验证了所提算法对误差补偿的有效性。

参　考　文　献

[1] 邢强，许超. 位置误差对关节式工业机器人末端精度的影响研究[J]. 机械设计与制造工程，2016(3)：41－45.
XING Qiang，XU Chao. The effect of the joint position error on the end- accuracy of an articulated industrial robots[J]. Machine Design and Manufacturing Engeering，2016(3)：41－45.（in Chinese）

[2] 陈宵燕，张秋菊，孙沂琳. 串联机器人多模式标定与刚柔耦合误差补偿方法研究[J/OL]. 农业机械学报，2019，50(3)：396－403.
CHEN Xiaoyan，ZHANG Qiuju，SUN Yilin. Multi-mode calibration and rigid-flexible coupling error compensation method of serial robot[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery，2019，50(3)：396－403. http：//www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx？flag=1&file_no=20190345&journal_id=jcsam. DOI：10.6041/j.issn.1000-1298.2019.03.045.（in Chinese）

[3] TAN Yuesheng，XIAO Aiping. Inverse kinematics solution for two 6R special configuration manipulators based on screw theory[C]//2011 3rd International Conference on Computer and Automation Engineering，2011.

[4] LIU Zhifeng，XU Jingjing，CHENG Qiang，et al. Trajectory planning with minimum synthesis error for industrial robots using screw theory[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing，2018，19(2)：183－193.

[5] VOLECH J，LADISLAV M，ZBYNEK Š，et al. Model of flexible robot with deformation detection[J]. Procedia Engineering，2014，96：510－516.

[6] 吴昊，谭元，郭小龙. 一种基于模型预测控制的柔性关节空间机械臂的轨迹跟踪控制[J]. 空间控制技术与应用，2019(2)：35－41.
WU Hao，TAN Yuan，GUO Xiaolong. A model predictive control based trajectory tracking controller design for space flexible joint manipulators[J]. Aerospace Control and Application，2019(2)：35－41.（in Chinese）

[7] TAN N. Calibration for accuracy improvement of serial manipulators based on compressed sensing[J]. Electronics Letters，2015，51(11)：820－822.

[8] 侯越，熊晓燕，王绚. 基于 ADAMS 和 ANSYS 的联合动力学仿真及应用[J]. 矿山机械，2014，42(1)：111－115.
HOU Yue，XIONG Xiaoyan，WANG Xun. Dynamic co-simulation based on ANSYS and ADAMS and its application[J]. Mining Machinery，2014，42(1)：111－115.（in Chinese）

[9] 费家人，朱坚民，黄春燕. 基于 ADAMS 的工业机器人轨迹精度模型研究[J]. 电子科技，2016，29(4)：20－23，28.
FEI Jiaren，ZHU Jianmin，HUANG Chunyan. Study on the model of trajectory precision for industrial robot based on ADAMS[J]. Electronic Science and Technology，2016，29(4)：20－23，28.（in Chinese）

[10] 樊猛. 柔性机械臂路径优化及控制[D]. 西安：西安电子科技大学，2010.
FAN Meng. Path optimization and control of the flexible manipulator[D]. Xi'an：Xidian University，2010.（in Chinese）

[11] 崔亚平. 双柔性机械臂系统的控制及其动力学研究[D]. 长春:吉林大学,2006.
CUI Yaping. Research on control and dynamics of double flexible mechanical arm system[D]. Changchun: Jilin University, 2006. (in Chinese)
[12] SPONG M W. Adaptive control of flexible joint manipulators[J]. Systems & Control Letters, 1989, 13(1):15 - 21.
[13] 刘娜. 煤矿焊接机器人刚柔耦合动力学与动态特性研究[D]. 北京:中国矿业大学(北京),2018.
LIU Na. Research on rigid-flexible coupling dynamics and dynamic characteristics of welding robot for coal mines[D]. Beijing: China University of Mining & Technology (Beijing),2018. (in Chinese)
[14] 申景金,郭家桢,MASOUD K. 基于距离误差的机器人参数辨识模型与冗余性分析[J/OL]. 农业机械学报,2018,49(11):372 - 378.
SHEN Jingjin,GUO Jiazhen,MASOUD K. Parameter calibration model and redundancy analysis of robot based on distance error [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2018,49(11):372 - 378. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20181145&journal_id = jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.11.045. (in Chinese)
[15] HERDIC P, BAZ A, HOUSTON B. Structural acoustics and active constrained layer damping of a full scale fuselage section:an experimental approach[J]. IEEE/ASME,NCA - 25,1997(2):43 - 54.
[16] 侯小雨,朱华炳,江磊. 基于刚柔耦合建模的6R机器人位置误差分析[J]. 组合机床与自动化加工技术,2018(1):51 - 55.
HOU Xiaoyu, ZHU Huabing, JIANG Lei. Analysis of pose error of 6R serial robot on rigid-flexible coupling[J]. Modular Machine Tool & Automatic Manfacturing Technique,2018(1):51 - 55. (in Chinese)
[17] 田聚峰,王攀峰,刘世博,等. 考虑关节刚度的轻型模块化机器人标定方法[J]. 机械科学与技术,2018,37(8):1217 - 1222.
TIAN Jufeng,WANG Panfeng,LIU Shibo,et al. calibration method for lightweight modular robot with joint stiffness taken into account[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering,2018,37(8):1217 - 1222. (in Chinese)
[18] 赵欣翔. 考虑关节柔性的重载工业机器人结构优化研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2013.
ZHAO Xinxiang. Research on structure optimization of heavy load industrial robot with joint flexibility considered[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology,2013. (in Chinese)
[19] 周园. 工业机器人柔性动态误差分析及补偿策略研究[D]. 秦皇岛:燕山大学,2016.
ZHOU Yuan. Dynamic error analysis and compensation of industrial robot caused by flexibility[D]. Qinhuangdao: Yanshan University,2016. (in Chinese)
[20] 向华,余金舫,王超. 基于神经网络的机床误差数据拟合与预测方法[J]. 组合机床与自动化加工技术,2019(12):44 - 47.
XIANG Hua,YU Jinfang,WANG Chao. Fitting and predicting method of machine tool error data based on neural network[J]. Modular Machine Tool & Automatic Manfacturing Technique,2019(12):44 - 47. (in Chinese)
[21] DANEY D. Choosing measurement poses for robot calibration with the local convergence method and Tabu search[J]. The International Journal of Robotics Research,2005,24(6):501 - 518.
[22] ABELE E,BAUER J, HEMKER T,et al. Comparison and validation of implementations of a flexible joint multibody dynamics system model for an industrial robot [J]. CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology, 2011, 4(1): 38 - 43.
[23] AL-QAISIA A A, AL-BEDOOR B O. Evaluation of different methods for the consideration of the effect of rotation on the stiffening of rotating beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003,280(3):531 - 553.
[24] INWON P, LEE B J, SE H,et al. Laser-based kinematic calibration of robot manipulator using differential kinematics[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2012,17(6):1059 - 1067.
[25] 孙汉旭,谭月胜,贾庆轩. 一种基于电子经纬仪的机械臂运动精度测试新方法研究[J]. 仪器仪表学报,2007,28(12):2206 - 2209.
SUN Hanxu,TAN Yuesheng,JIA Qingxuan. Study on novel kinematic accuracy test method for manipulator based on electronic theodolite[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument,2007,28(12):2206 - 2209. (in Chinese)