

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2021.02.039

一平移两转动并联运动振动筛动力学建模与精度分析

沈惠平¹ 肖思进¹ 尤晶晶² 杨廷力¹

(1.常州大学现代机构学研究中心,常州 213164; 2.南京林业大学机械电子工程学院,南京 210037)

摘要:对单自由度一平移两转动(1T2R)并联运动振动筛进行了动力学分析。由于该机构包含2个子运动链(SK),且其耦合度均为零,因此,首先由求得的符号式位置正解直接求解各杆件(角)速度和(角)加速度;然后,基于Newton-Euler原理的序单开链法,对含两个SK的空间并联机构进行动力学建模,计算得到该机构主动副的驱动力矩变化曲线;与利用传统Lagrange法得到的驱动力矩进行了动力学建模误差对比分析,结果表明,基于Newton-Euler原理的序单开链法具有更高的动力学建模精度。本文为多回路空间并联机构高效、精确动力学建模与分析,以及该并联运动振动筛的动力学参数优化提供了理论基础。

关键词: 并联振动筛; 动力学模型; 序单开链法; 耦合度

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2021)02-0394-07

OSID:



Dynamic Modeling and Precision Analysis of Parallel Vibrating Screen with One-translation and Two-rotation

SHEN Huiping¹ XIAO Sijin¹ YOU Jingjing² YANG Tingli¹

(1. Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213164, China

2. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China)

Abstract: Dynamic analysis for the one-DOF parallel mechanism (PM) vibrating screen with one-translation and two-rotation (1T2R) developed by the authors was performed. Firstly, since the PM contained two sub-kinematic chains (SK) and its coupling degree was 0, it was easy to solve the symbolic solutions of the forward position and directly obtain the (angular) velocity and (angular) acceleration of all links. Then, the ordered single-open-chain (SOC) method based on the Newton-Euler principle proposed by the author's team was used in the dynamic modeling of this spatial PM with two SKCs, and the driving torque M curve of the actuated joint of the PM was calculated. Comparing the curves obtained by Matlab programming and ADAMS simulation, the correctness of the ordered SOC method based on the principle of Newton-Euler was verified. In addition, the dynamic modeling error analysis was carried out with the driving torque M obtained by the traditional Lagrange method. The results showed that the absolute error range of the ordered SOC method based on the Newton-Euler principle was 33.39% smaller than the absolute error range based on the Lagrange modeling method. It was showed that the ordered SOC method based on the Newton-Euler principle had higher dynamic modeling accuracy. The research result provided a theoretical basis for efficient and precise dynamic modeling of multi-loop spatial PM as well as the motor optimization, parameters optimization and dynamic optimization of the parallel vibrating screen.

Key words: parallel vibrating screen; dynamic model; ordered single-open-chain method; coupling degree

0 引言

研究表明,多维并联运动振动筛透筛环境好、筛

分效率高,能克服传统振动筛运动轨迹单一、筛孔易阻塞等问题^[1-4]。文献[5-7]对单输入三维并联振动筛进行了拓扑和运动分析,并通过 EDEM 软件

收稿日期: 2020-02-26 修回日期: 2020-07-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(51975062, 51378062)

作者简介: 沈惠平(1965—),男,教授,博士生导师,主要从事机器人机构学研究, E-mail: shp65@126.com

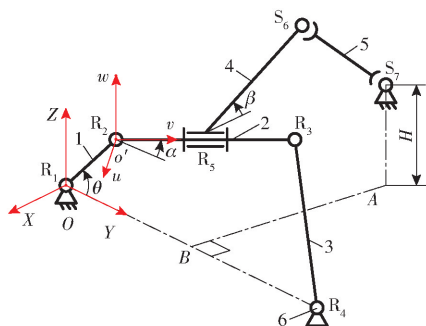
优选出三维并联振动筛主机构,并进行了样机筛分实验,但没有进行并联振动筛的动力学分析。

动力学建模是并联机构进行动态分析、动力学优化设计及控制的基础。常用的机构动力学建模方法主要包括动力学普遍方程^[8-9]、Newton-Euler法^[10]、拉格朗日法等^[11]。陈子明等^[12]采用动力学普遍方程对空间3自由度3-UPU并联机构进行了动力学分析,得到机构在发生定轴转动时的动力学特点。韩博等^[13]基于螺旋理论和动力学普遍方程,对四面体可展机构进行动力学建模与分析,并验证了其可行性。贾晓辉等^[14]基于动力学普遍方程,实现了3-RRPR柔性精密定位工作台的高频控制。韩佩富等^[15]对6-DOF并联机器人采用加速度及作用力正交分解的方法,将Newton-Euler动力学模型归结为一个简单、可用于实时计算的模型。王庚祥等^[16]考虑关节摩擦效应采用Newton-Euler法对4-SPS/CU并联机构进行了逆动力学分析,证明关节摩擦力对机构驱动力影响显著。李研彪等^[17]在考虑关节摩擦情况下使用Newton-Euler对5-PSS/UPU并联机构进行了逆动力学建模,同时进行了算例仿真。陈修龙等^[18]用Lagrange方程建立了4自由度4-UPS-RPU冗余驱动并联机构逆动力学模型。刘善增等^[19]基于有限元理论、运动弹性动力分析方法和Lagrange方程,建立了3-RRS柔性并联机器人的动力学模型,并进行了数值验证。刘俊辰^[20]用Lagrange方程建立了5自由度3-CPaR&R₁R₂混联机构的动力学模型,并验证其有效性。刘文兰等^[21]用Lagrange方程对由3RR-3RRR四面体单元组成的被动输入过约束可展天线机构进行动力学建模,得到机构中扭簧刚度与机构展开角之间的表达式。文献[22]提出基于Newton-Euler(N-E)原理的序单开链法。冯志友等^[23-24]运用序单开链方法分别对平面气液连动机构和空间2UPS-2RPS机构进行逆动力学建模。这两种机构的耦合度 κ 均为1,故只能得到机构位置的数值解,且动力学建模工作量大,空间2UPS-2RPS机构仅含有一个子运动链(Sub-kinematic chain, SKC),未见对含有多个SKC的空间并联机构进行动力学分析的报道;上述研究均未与传统动力学分析方法进行建模精度的对比分析。

本文运用基于Newton-Euler(N-E)原理的序单开链法,对含两个SKC的单自由度1T2R并联振动筛机构进行动力学分析,构建该机构动力学方程,并计算得到主动副的驱动力矩变化曲线,通过ADAMS进行仿真验证,再与用第II类Lagrange法得到的驱动力矩进行动力学建模误差对比分析。

1 并联振动筛机构

单自由度的一平移两转动(1T2R)并联机构,如图1a所示,它由混合支链($R_1-R_2-R_3-R_4$)- R_5 及空间支链 S_6-S_7 ,分别连接于上动平台与下静平台组成。文献[3-4]已证明:该机构自由度为1,当转动副 R_1 为驱动副时,动平台可以产生沿 Z 轴的独立移动 z 、绕 X 轴的转动 α 和绕转动副 R_2R_3 连线的转动 β ,但 z, α, β 中仅有1个为独立量,其余2个为非独立的衍生运动;同时,机构耦合度 κ 为0,其实验样机^[5-6]如图1b所示。



(a) 1-DOF 1T2R并联机构简图



(b) 实验样机

图1 单自由度的1T2R并联振动筛

Fig.1 Single DOF 1T2R parallel vibrating screen

1. 驱动杆 2. 从动杆 3, 5. 连架杆 4. 动平台 6. 静平台

2 机构运动学分析

2.1 位置正解

如图1a所示,在静平台固定坐标系 $OXYZ$ 中,原点 O 与转动副 R_1 中心重合, Y 轴与 R_1R_4 连线重合, X 轴与 R_1 的轴线重合;动平台上的动坐标系 $o'uvw$ 中,原点 o' 与转动副 R_2 的中心重合, v 轴与 R_2R_3 连线重合, u 轴与 R_2 的轴线重合。设 $R_2R_3 = l_2$, $R_3R_4 = l_3$, $R_5S_6 = l_4$, $S_6S_7 = l_5$, $R_1R_2 = l_1$, $AS_7 = H$, $R_1R_4 = l_7$, $AB = l_8$, $R_1B = l_7/2$,因该机构耦合度 $\kappa = 0$,因此,其运动学位置正解符号解求解容易^[2],具体为

$$z = l_1 \sin\theta \quad (1)$$

$$A \sin\alpha + B \cos\alpha + C = 0 \quad (2)$$

$$D \sin\beta + E \cos\beta + Q = 0 \quad (3)$$

由式(2)、(3)求得

$$\alpha = 2\arctan \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \quad (4)$$

$$\beta = 2\arctan \frac{D \pm \sqrt{D^2 + E^2 - Q^2}}{E - Q} \quad (5)$$

其中

$$A = 2l_1l_2\sin\theta$$

$$B = 2l_2(l_1\cos\theta - l_7)$$

$$C = l_1^2 + l_2^2 + l_7^2 - l_3^2 - 2l_1l_7\cos\theta$$

$$D = 2l_1l_4\sin(\theta - \alpha) - 2l_4H\sin\alpha + l_4l_7\sin\alpha$$

$$E = -2l_4l_8$$

$$Q = l_1^2 + l_2^2/4 + l_4^2 + H^2 + l_7^2/4 + l_8^2 - l_5^2 + l_1l_2\cos(\theta - \alpha) -$$

$$2l_1H\sin\theta - l_2H\sin\alpha - l_1l_7\cos\theta - l_2l_7\cos\alpha/2$$

从而求得机构中各运动副的位置为

$$\mathbf{R}_2 = (0, l_1\cos\theta, l_1\sin\theta)$$

$$\mathbf{R}_3 = (0, l_1\cos\theta + l_2\cos\alpha, l_1\sin\theta + l_2\sin\alpha)$$

$$\mathbf{R}_4 = (0, l_7, 0)$$

$$\mathbf{R}_5 = (0, l_1\cos\theta + l_2\cos\alpha/2, l_1\sin\theta + l_2\sin\alpha/2)$$

$$\mathbf{S}_6 = (-l_4\cos\beta, S_{6y}, S_{6z})$$

$$\mathbf{S}_7 = (-l_8, l_7/2, H)$$

其中

$$S_{6y} = l_1\cos\theta - l_4\sin\alpha\sin\beta + l_2\cos\alpha/2$$

$$S_{6z} = l_1\sin\theta + l_4\sin\beta\cos\alpha + l_2\sin\alpha/2$$

进一步,每根杆件的质心坐标 $\mathbf{S}_i (i=1, 2, \dots, 5)$

由以上各式也易求出。

2.2 速度和加速度分析

令 $\theta = \omega t$, 对式(1) ~ (3)求导, 可得

$$\dot{z} = l_1\omega\cos\theta \quad (6)$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\dot{A}\sin\alpha + \dot{B}\cos\alpha + \dot{C}}{A\sin\alpha - B\sin\alpha} \quad (7)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{D}\sin\beta + \dot{Q}}{E\sin\beta - D\cos\beta} \quad (8)$$

其中

$$\dot{A} = 2l_1l_2\omega\cos(\omega t)$$

$$\dot{B} = -2l_1l_2\omega\sin(\omega t)$$

$$\dot{C} = 2l_1l_7\omega\sin(\omega t)$$

$$\dot{D} = 2l_1l_4(\omega - \dot{\alpha})\cos(\theta - \alpha) + 2l_4H\omega\sin\theta + l_4l_7\dot{\alpha}\cos\alpha$$

$$\dot{Q} = l_1l_7\omega\sin\theta - l_1l_2(\omega - \dot{\alpha})\sin(\theta - \alpha) - 2l_1H\omega\cos\theta -$$

$$l_2H\dot{\alpha}\sin\alpha + l_2l_7\dot{\alpha}\sin\alpha/2$$

又令 $\varepsilon = \dot{\omega}$, 对式(6) ~ (8)求导得

$$\ddot{z} = l_1(\varepsilon_1\cos\theta - \omega^2\sin\theta) \quad (9)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{(\ddot{A} - 2\dot{B}\dot{\alpha} - A\dot{\alpha}^2)\sin\alpha + (\ddot{B} + 2\dot{A}\dot{\alpha} - B\dot{\alpha}^2)\cos\alpha + \ddot{C}}{A\cos\alpha - B\sin\alpha} \quad (10)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{(\ddot{D} - \dot{D}\dot{\beta}^2)\sin\beta + (2\dot{D}\dot{\beta} - E\dot{\beta}^2)\cos\beta + \ddot{Q}}{E\sin\beta - D\cos\beta} \quad (11)$$

其中

$$\ddot{A} = 2l_1l_2(\varepsilon\cos\theta - \omega^2\sin\theta)$$

$$\ddot{B} = -2l_1l_2(\varepsilon\sin\theta + \omega^2\cos\theta)$$

$$\ddot{C} = 2l_1l_7(\varepsilon\sin\theta + \omega^2\cos\theta)$$

$$\ddot{D} = 2l_1l_4[(\varepsilon - \ddot{\alpha})\cos(\theta - \alpha) - (\omega - \dot{\alpha})^2\sin(\theta - \alpha)] -$$

$$2l_4H(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) + l_4l_7(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha)$$

$$\ddot{Q} = -l_1l_2[(\varepsilon - \dot{\alpha})\sin(\theta - \alpha) + (\omega - \dot{\alpha})^2\cos(\theta - \alpha)] -$$

$$2l_1H(\varepsilon\cos\theta - \omega^2\sin\theta) - l_2H(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) +$$

$$\frac{1}{2}l_2l_7(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha) + l_1l_7(\varepsilon\sin\theta + \omega^2\cos\theta)$$

进一步,对各杆质心坐标求导,可得质心速度 $\mathbf{v}_i (i=1, 2, \dots, 5)$, 再次求导可得质心加速度 $\mathbf{a}_i (i=1, 2, \dots, 5)$ 。

(1) 杆1(角)速度和(角)加速度

由 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ 坐标易求得转动副 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ 处的速度 $\mathbf{v}_{R_1} = \mathbf{0}, \mathbf{v}_{R_2} = (0, -l_1\omega\sin\theta, l_1\omega\cos\theta)$, 则

$$\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_{R_1} + \mathbf{v}_{R_2})/2 = \mathbf{v}_{R_2} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1/2 \quad (12)$$

$$\mathbf{a}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \frac{1}{2}\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \frac{1}{2}\mathbf{r}_1) \quad (13)$$

对式(12)、(13)两边叉乘 $\mathbf{r}_1/2$, 得角速度、角加速度分别为

$$\boldsymbol{\omega}_1 = [\mathbf{r}_1/2 \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{R_1})]/(l_1/2)^2 \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{r}_1 \times \left[\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \frac{1}{2}\mathbf{r}_1) \right] / \left(\frac{1}{2}l_1 \right)^2 \quad (15)$$

式中 \mathbf{v}_1 ——杆1质心速度

\mathbf{a}_1 ——杆1质心加速度

$\boldsymbol{\omega}_1$ ——杆1角速度

$\boldsymbol{\varepsilon}_1$ ——杆1角加速度

\mathbf{r}_1 ——杆1位置矢量

(2) 杆2(角)速度和(角)加速度

同理,由 $\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ 坐标,易求得 $\mathbf{v}_{R_2}, \mathbf{v}_{R_3}$, 则

$$\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_{R_2} + \mathbf{v}_{R_3})/2 = \mathbf{v}_{R_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2/2 \quad (16)$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_{R_2} + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \frac{1}{2}\mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \frac{1}{2}\mathbf{r}_2) \quad (17)$$

对式(16)、(17)两边叉乘 $\mathbf{r}_2/2$, 得角速度、角加速度为

$$\boldsymbol{\omega}_2 = [\mathbf{r}_2/2 \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{R_2})]/(l_2/2)^2 \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \times \left[\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{R_2} - \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \frac{1}{2}\mathbf{r}_2) \right] / \left(\frac{1}{2}l_2 \right)^2 \quad (19)$$

(3) 杆3、4、5(角)速度和(角)加速度

同理,得杆3、4、5角速度、角加速度,分别为

$$\boldsymbol{\omega}_3 = [\mathbf{r}_3/2 \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_{R_4})]/(l_3/2)^2 \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{r}_3 \times \left[\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_{R_3} - \boldsymbol{\omega}_3 \times (\boldsymbol{\omega}_3 \times \frac{1}{2}\mathbf{r}_3) \right] / \left(\frac{1}{2}l_3 \right)^2 \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\omega}_4 = [\mathbf{r}_4/2 \times (\mathbf{v}_{R_5} - \mathbf{v}_{S_6})]/(l_4/2)^2 \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_4 = \frac{1}{2} \boldsymbol{r}_4 \times \left[\boldsymbol{a}_4 - \boldsymbol{a}_{R_5} - \boldsymbol{\omega}_4 \times \left(\boldsymbol{\omega}_4 \times \frac{1}{2} \boldsymbol{r}_4 \right) \right] / \left(\frac{1}{2} l_4 \right)^2 \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\omega}_5 = [\boldsymbol{r}_5 / 2 \times (\boldsymbol{v}_{R_5} - \boldsymbol{v}_{S_6})] / (l_5 / 2)^2 \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_5 = \frac{1}{2} \boldsymbol{r}_5 \times \left[\boldsymbol{a}_5 - \boldsymbol{a}_{S_6} - \boldsymbol{\omega}_5 \times \left(\boldsymbol{\omega}_5 \times \frac{1}{2} \boldsymbol{r}_5 \right) \right] / \left(\frac{1}{2} l_5 \right)^2 \quad (25)$$

3 基于 N-E 的序单开链法动力学建模

3.1 基于 N-E 的序单开链法动力学方法

由文献[22]可知,基于 N-E 的序单开链法动力学分析的步骤为:①对任一机构,按其拓扑结构分解路线,得到各单开链的约束度 Δ_j 和机构耦合度 κ 。②约束度为负值的每一单开链 SOC(Δ_j^-), 取适当的 $|\Delta_j^-|$ 个未知支反力分量以虚拟赋值, 共有 κ 个未知支反力分量的虚拟赋值, 则按照机构结构分解路线的逆序, 每一个单开链的动力分析可依次单独求解; 但 κ 个未知支反力分量的虚拟赋值, 应满足约束度为正值的一个单开链 $\{SOC(\Delta_j^+)\}$ 的 Δ_j^+ 个支反力相容条件, 共有 κ 个相容性方程。③给全部 κ 个支反力相容性方程的 κ 个未知支反力分量的虚拟赋值, 即为这些支反力分量的真实值; 然后, 机构其余运动副的支反力及驱动力(矩), 可由首先求出的 κ 个支反力分量方便地求出。

根据基于序单开链的并联机构组成原理^[25], 该机构包含 2 个子运动链 (SKC), 其中, SKC₁ 为 R₁-R₂-R₃-R₄, SKC₂ 为 R₅-S₆-S₇, 其约束度分别为

$$\Delta_1 = f_1 - \gamma_1 - \xi_1 = 4 - 1 - 3 = 0$$

$$\Delta_2 = f_2 - \gamma_2 - \xi_2 = (1 + 5) - 0 - 6 = 0$$

式中 f_1, f_2 ——2 个回路运动副自由度

γ_1, γ_2 ——2 个回路的驱动副数

ξ_1, ξ_2 ——2 个回路的独立位移方程数

由约束度为 0 可知, 机构动力学分析时不需要设虚拟变量。因此, 整个机构的动力学分析可转换为 2 个 SKC 的动力学分析, 且从含受外载作用的动平台所在的 SKC₂ 开始, 逆向求解至曲柄所在的 SKC₁。

3.2 SKC₂ 动力学建模

SKC₂ 各杆的受力分析如图 2 所示, 即杆件 5 受到静平台的支反力 $-F_{S_7}$ 、球副 S₆ 的支反力 $-F_{S_6}$ 以及自重 $m_5 g$; 而动平台 (杆) 4 受到外载 F 、外力矩 M' 、自重 $m_4 g$ 、转动副 R₅ 的支反力 F_{R_5} 、球副 S₆ 的约束反力 F_{S_6} 以及在支链坐标系 $o''u''v''w''$ 下的支反矩 $M_{R_{5u''}} =$

$$(0, M_{R_{5v''}}, M_{R_{5w''}})。$$

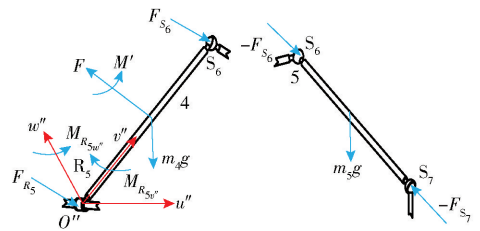


图2 SKC₂中各杆的受力分析

Fig.2 Force analysis of each rod in SKC₂

根据 Newton-Euler (N-E) 原理, SKC₂ 中构件 5、4 的动力学方程为

$$\begin{cases} -F_{S_7} + m_5 g - F_{S_6} = m_5 a_5 \\ -\frac{1}{2} \boldsymbol{r}_5 \times (-F_{S_6}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{r}_5 \times (-F_{S_7}) = {}^0 \boldsymbol{I}_5 \boldsymbol{\varepsilon}_5 + \\ \quad \boldsymbol{\omega}_5 \times ({}^0 \boldsymbol{I}_5 \boldsymbol{\omega}_5) \boldsymbol{F} + F_{S_6} + m_4 \boldsymbol{g} + F_{R_5} = m_4 \boldsymbol{a}_4 \\ {}^o TM_{R_5} + M' + \frac{1}{2} \boldsymbol{r}_4 \times F_{R_5} - \frac{1}{2} \boldsymbol{r}_4 \times F_{S_6} = {}^0 \boldsymbol{I}_4 \boldsymbol{\varepsilon}_4 + \\ \quad \boldsymbol{\omega}_4 \times ({}^0 \boldsymbol{I}_4 \boldsymbol{\omega}_4) \end{cases} \quad (26)$$

其中 ${}^0 \boldsymbol{I}_i = {}^0 \boldsymbol{T}_i \boldsymbol{I}_i {}^0 \boldsymbol{T}_i^T$ ($i = 4, 5$)

式中 ${}^0 \boldsymbol{I}_i$ ——杆 i 在静坐标系中的惯量矩阵

${}^0 \boldsymbol{T}_i$ ——杆 i 坐标系到静坐标系的转换矩阵

\boldsymbol{I}_i ——杆 i 在自身坐标系中的惯量矩阵

${}^o \boldsymbol{T}$ ——支路坐标系与静坐标的转换矩阵

求解方程组(26), 即得支反力 $F_{S_6}, F_{S_7}, F_{R_5}$ 及支反力矩 M_{R_5} 。

3.3 SKC₁ 动力学建模

SKC₁ 各杆的受力分析如图 3 所示。因该回路属于平面机构, 各转动副中的受力为 F_{R_i} ($i = 1, 2, 3, 4$), 即: 杆 3 受到静平台的支反力 F_{R_4} 、转动副 R₃ 的支反力 F_{R_3} 及自身重力 $m_3 g$; 杆 2 受到转动副 R_i 的支反力 $-F_{R_i}$ ($i = 2, 3, 5$)、支反力矩 $-M_{R_{5x}}$ ($-M_{R_5}$ 在 yoZ 平面的投影) 及自身重力 $m_2 g$; 而曲柄 (杆) 1 受到输入力矩 M 、转动副 R₂ 的支反力 F_{R_2} 、静平台的支反力 F_{R_1} 及自身重力 $m_1 g$ 。

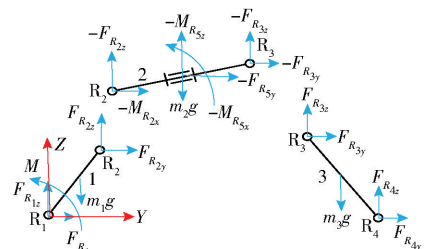


图3 SKC₁中各杆的受力分析

Fig.3 Force analysis of each rod in SKC₁

于是, SKC₁ 中的杆件 3、2、1 的动力学方程为

$$\begin{cases}
 F_{R_{4y}} + F_{R_{3y}} = m_3 a_{3y} \\
 F_{R_{4z}} + F_{R_{3z}} + m_3 g = m_3 a_{3z} \\
 F_{R_{4y}}(z_{R_4} - z_{S_3}) + F_{R_{4x}}(y_{R_4} - y_{S_3}) - \\
 F_{R_{3y}}(z_{R_3} - z_{S_3}) - F_{R_{3z}}(y_{R_3} - y_{S_3}) = J_{S_3} \alpha_{3x} \\
 -F_{R_{3y}} - F_{R_{5y}} - F_{R_{2y}} = m_2 a_{2y} \\
 -F_{R_{3z}} - F_{R_{5z}} - F_{R_{2z}} + m_2 g = m_2 a_{2z} \\
 -M_{R_{5x}} - F_{R_{2y}}(z_{R_2} - z_{S_2}) + F_{R_{2x}}(y_{R_2} - y_{S_2}) + \\
 F_{R_{3y}}(z_{R_3} - z_{S_3}) - F_{R_{3z}}(y_{R_3} - y_{S_3}) = J_{S_2} \alpha_{2x} \\
 F_{R_{2y}} + F_{R_{1y}} = m_1 a_{1y} \\
 F_{R_{2z}} + F_{R_{1z}} + m_1 g = m_1 a_{1z} \\
 F_{R_{2y}}(z_{R_2} - z_{S_1}) + F_{R_{2x}}(y_{R_2} - y_{S_1}) + \\
 F_{R_{1y}}(z_{R_1} - y_{S_1}) - F_{R_{1z}}(y_{R_1} - y_{S_1}) + M = J_{S_1} \alpha_{1x}
 \end{cases} \quad (27)$$

式中 J_{S_1} 、 J_{S_2} 、 J_{S_3} ——杆 1、2、3 在静坐标系下的转动惯量

求解方程组(27),即可得到输入力矩 M 。

3.4 算例验证

设定曲柄的运动轨迹为 $\theta = 0.3\sin t$,则可得到动平台的运动轨迹;对式(12)~(27)用 Matlab 编程计算,得到各支反力(力矩)和驱动力矩的变化曲线,其中,驱动力矩曲线如图 4 所示。

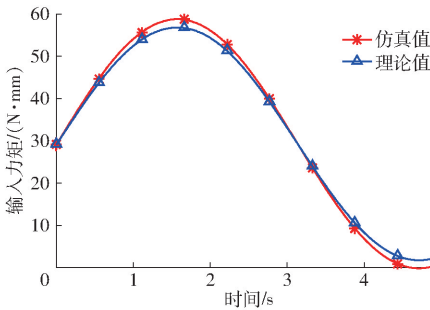


图 4 基于 N-E 的序单开链法驱动力矩理论与仿真值对比

Fig. 4 Comparison of theoretical and simulated values of driving torque of N-E-based dynamic analysis method based on SOCs

按表 1 所示的机构尺寸参数,设计虚拟样机。

将虚拟样机导入 ADAMS 中;同时,设定机构各个杆件的材料属性为钢,步长取 0.01 s,仿真时间为 5 s,对机构进行动力学仿真。最后,将理论计算值与仿真进行对比,得到结果如图 4 所示。

由图 4 可知,基于 N-E 序单开链法的理论值和仿真值基本一致,从而验证了此方法的准确性。

表 1 1T2R 并联振动筛机构尺寸参数

Tab. 1 Parameters of 1T2R vibrating screen

| 参数 | 数值 |
|-------------------------|-------------|
| 杆 1 长度 l_1 /mm | 50 |
| 杆 2 长度 l_2 /mm | 350 |
| 杆 3 长度 l_3 /mm | 270 |
| 杆 4 长度 l_4 /mm | 350 |
| 杆 5 长度 l_5 /mm | 200 |
| S_7 与定平台距离 H /mm | 80 |
| R_1R_4 之间距离 l_7 /mm | 550 |
| A 到 B 的距离 l_8 /mm | 460 |
| 杆 1 质量 m_1 /kg | 0.013 208 7 |
| 杆 2 质量 m_2 /kg | 0.082 803 3 |
| 杆 3 质量 m_3 /kg | 0.064 695 3 |
| 杆 4 质量 m_4 /kg | 0.041 358 5 |
| 杆 5 质量 m_5 /kg | 0.021 975 7 |

4 与 Lagrange 建模方法比较

4.1 基于第 II 类 Lagrange 的动力学求解方法

由机构速度和角速度分析,可得各杆件动能为

$$T_1 = \frac{1}{2} \omega_1^{T0} I_1 \omega_1 \quad (28)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2} \omega_2^{T0} I_2 \omega_2 \quad (29)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \omega_3^{T0} I_3 \omega_3 \quad (30)$$

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_4^T v_4 + \frac{1}{2} \omega_4^{T0} I_4 \omega_4 \quad (31)$$

$$T_5 = \frac{1}{2} \omega_5^{T0} I_5 \omega_5 \quad (32)$$

式中 T_i ——杆 i 动能

m_i ——杆 i 质量

将定坐标系 XOY 平面设为零势能面,则杆 i 的势能为

$$U_i = m_i g z_i \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (33)$$

式中 z_i ——杆 i 相对零势能面的高度

由式(28)~(33),分别得到系统总动能、势能为

$$T = \sum_{i=1}^5 T_i \quad (34)$$

$$U = \sum_{i=1}^5 U_i \quad (35)$$

基于 Lagrange 原理,由式(34)、(35)得到该并联振动筛的动力学方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \quad (36)$$

其中

$$L = T - U \quad (37)$$

$$\tau = M + M' + F \quad (38)$$

式中 L ——拉格朗日函数

τ ——与驱动力相对应的广义力矩

利用 Matlab 对式(36)进行计算,得到驱动力矩曲线如图 5 所示。

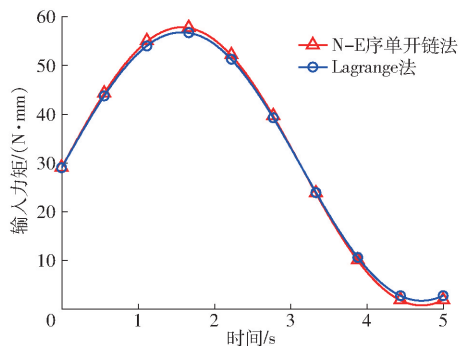


图 5 2 种方法驱动力理论值对比

Fig. 5 Comparison of theoretical value of driving force of two methods

4.2 与 Lagrange 建模方法误差比较

由图 4、5 可知,两种方法的一致性很高,但存在误差,这是由不同建模方法计算量不同、虚拟样机的尺寸参数、装配关系、仿真环境等因素所引起的。

将两种不同建模方法得到的驱动力矩曲线与仿真值之间的误差进行比较,表明:基于 N-E 的序单开链法的最大正误差、最大负误差绝对值,均明显小于 Lagrange 法的相应值。基于 N-E 的序单开链法、Lagrange 法的最大正误差分别为 1.94、2.92 N·mm,前者比后者小 33.56%;而基于 N-E

的序单开链法、Lagrange 法的最大负误差分别为 -1.91、-2.86 N·mm,前者比后者小 33.21%。总之,基于 N-E 原理的序单开链法的绝对误差范围,比基于 Lagrange 建模方法的绝对误差范围平均小 33.39%。结果表明:对于单自由度 1T2R 并联运动振动筛而言,基于 N-E 原理的序单开链法的建模精度较高。同时,作者团队已将基于 N-E 原理的序单开链法应用在了 3 个不同自由度(DOF 为 1、2、3)、不同拓扑结构的空 间 并 联 机 构 的 动 力 学 分 析 求 解,均显示了该方法计算量小、建模精度高的优点,特别是当空间构件数目增多时,优越性更加明显。

5 结论

(1) 运用基于 N-E 原理的序单开链法与第 II 类 Lagrange 法,分别建立了单自由度 1T2R 并联运动振动筛的动力学模型,并计算得到了驱动力矩变化曲线,计算结果与仿真结果一致,从而验证了动力学建模的正确性。

(2) 将基于 N-E 原理的序单开链法用于含多个 SKC 的空间并联机构,且与运用 Lagrange 法的动力学建模方法进行了误差对比,结果表明,本文方法误差较小、建模精度较高。

参 考 文 献

- [1] 王峰. 筛分机械[M]. 北京:机械工业出版社,1998.
- [2] 沈惠平, 杨廷力. 用于并联运动装备的二自由度空间并联机构: CN 1868689 A[P]. 2006.
- [3] 沈惠平, 张会芳, 何宝祥, 等. 一种新型并联运动振动筛及其运动学研究及研制[J]. 机械设计, 2007, 24(6): 34-36. SHEN Huiping, ZHANG Huifang, HE Baoxiang, et al. A kind of novel parallel movement vibration sieve and its kinematic research and development[J]. Journal of Machine Design, 2007, 24(6): 34-36. (in Chinese)
- [4] 张会芳. 并联运动振动筛的基础理论研究[D]. 常州:江苏工业学院, 2008. ZHANG Huifang. The basic research on the sieving screen based on the parallel kinematics mechanism[D]. Changzhou: Jiangsu Polytechnic College, 2008. (in Chinese)
- [5] 邓嘉鸣, 沈惠平, 李菊, 等. 三维并联振动筛设计与实验[J/OL]. 农业机械学报, 2013, 44(11): 342-346. DENG Jiaming, SHEN Huiping, LI Ju, et al. Design and experiment for three-dimensional parallel kinematics vibration sieve [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(11): 342-346. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20131157&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2013.11.057. (in Chinese)
- [6] 李菊, 赵德安, 沈惠平, 等. 基于 DEM 的谷物三维并联振动筛筛分效果研究[J]. 中国机械工程, 2013, 24(8): 1018-1022. LI Ju, ZHAO Dean, SHEN Huiping, et al. Research on screening effort of grain three dimensional parallel vibrating screen based on DEM[J]. China Mechanical Engineering, 2013, 24(8): 1018-1022. (in Chinese)
- [7] 李菊, 赵德安, 沈惠平, 等. 基于输入优选的三维并联振动筛输出特性分析[J]. 中国机械工程, 2014, 25(14): 1852-1857. LI Ju, ZHAO Dean, SHEN Huiping, et al. Analysis on output characteristics of three-dimensional parallel kinematics vibrating screen based on input optimization[J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(14): 1852-1857. (in Chinese)
- [8] 陈修龙, 冯伟明, 赵永生. 五自由度并联机器人机构动力学模型[J/OL]. 农业机械学报, 2013, 44(1): 236-243. CHEN Xiulong, FENG Weiming, ZHAO Yongsheng. Dynamics model of 5-DOF parallel robot mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(1): 236-243. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20130144&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2013.01.044. (in

Chinese)

- [9] STAICU S. Inverse dynamics of the 3-PRR planar parallel robot[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2009, 57(5):556–563.
- [10] BHASKAR D, MRUTHYUNJAYA T S. A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1998, 33(8):1135–1152.
- [11] 张彦斐, 金鹏, 宫金良, 等. 3-RPS 并联机器人粘性摩擦工况动力学建模[J/OL]. *农业机械学报*, 2018, 49(9):374–381.
ZHANG Yanfei, JIN Peng, GONG Jinliang, et al. Dynamic modeling of 3-RPS parallel robot considering joint friction[J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2018, 49(9):374–381. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20180944&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.09.044. (in Chinese)
- [12] 陈子明, 刘晓檬, 张扬, 等. 对称两转一移 3-UPU 并联机构的动力学分析[J]. *机械工程学报*, 2017, 53(21):46–53.
CHEN Ziming, LIU Xiaomeng, ZHANG Yang, et al. Dynamics analysis of a symmetrical 2R1T 3-UPU parallel mechanism[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 53(21):46–53. (in Chinese)
- [13] 韩博, 韩媛媛, 许允斗, 等. 基于螺旋理论的四面体可展机构运动特性与动力学分析[J]. *机器人*, 2020, 42(1):21–28, 38.
HAN Bo, HAN Yuanyuan, XU Yundou, et al. Kinematic characteristics and dynamics analysis of the tetrahedral deployable mechanism based on the screw theory[J]. *Robot*, 2020, 42(1):21–28, 38. (in Chinese)
- [14] 贾晓辉, 田延岭, 张大卫. 基于虚功原理的 3-RRPR 柔性精密定位工作台动力学分析[J]. *机械工程学报*, 2011, 47(1):68–74.
JIA Xiaohui, TIAN Yanling, ZHANG Dawei. Inverse dynamics of 3-RRPR compliant precision positioning stage based on the principle of virtual work[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2011, 47(1):68–74. (in Chinese)
- [15] 韩佩富, 王常武, 黄真, 等. 改进的 6-DOF 并联机器人 Newton-Euler 动力学模型[J]. *机器人*, 2000, 22(4):315–318.
HAN Peifu, WANG Changwu, HUANG Zhen, et al. The improved Newton-Euler dynamics model of 6-DOF parallel robot[J]. *Robot*, 2000, 22(4):315–318. (in Chinese)
- [16] 王庚祥, 刘宏昭, 龚春园, 等. 考虑关节摩擦效应的并联机构动力学分析[J/OL]. *农业机械学报*, 2013, 44(11):308–315.
WANG Gengxiang, LIU Hongzhao, GONG Chunyuan, et al. Dynamics analysis of parallel mechanism with joint friction[J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2013, 44(11):308–315. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20131152&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.11.052. (in Chinese)
- [17] 李研彪, 郑航, 孙鹏, 等. 考虑关节摩擦的 5-PSS/UPU 并联机构动力学建模及耦合特性分析[J]. *机械工程学报*, 2019, 55(3):43–52.
LI Yanbiao, ZHENG Hang, SUN Peng, et al. Dynamic modeling with joint friction and research on the inertia coupling property of a 5-PSS/UPU parallel manipulator[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(3):43–52. (in Chinese)
- [18] 陈修龙, 孙德才, 王清, 等. 基于拉格朗日的冗余驱动并联机构刚体动力学建模[J/OL]. *农业机械学报*, 2015, 46(12):329–336.
CHEN Xiulong, SUN Decai, WANG Qing, et al. Rigid dynamics modeling of redundant actuation parallel mechanism based on Lagrange method[J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2015, 46(12):329–336. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20151245&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.12.045. (in Chinese)
- [19] 刘善增, 余跃庆, 苏丽颖, 等. 3-RRS 柔性并联机器人的动力学建模与频率特性分析[J]. *中国机械工程*, 2008, 19(10):1219–1224.
LIU Shanzeng, YU Yueqing, SU Liying, et al. Dynamics modeling and frequency analysis of a 3-RRS flexible parallel manipulator[J]. *China Mechanical Engineering*, 2008, 19(10):1219–1224. (in Chinese)
- [20] 刘俊辰. 含间隙 3-CPaR&R1R2 五自由度混联机构动力学分析[D]. 无锡: 江南大学, 2020.
LIU Junchen. Dynamics analysis of the 3-CPaR&R1R2 hybrid mechanism with joint clearance[D]. Wuxi: Jiangnan University, 2020. (in Chinese)
- [21] 刘文兰, 许允斗, 郭金伟, 等. 被动输入过约束四面体可展天线机构动力学分析[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(5):181–191.
LIU Wenlan, XU Yundou, GUO Jinwei, et al. Dynamic analysis of over constrained tetrahedral deployable antenna with passive input[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(5):181–191. (in Chinese)
- [22] 杨廷力. *机械系统基本理论-结构学、运动学、动力学*[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996.
- [23] 冯志友. 基于单开链单元的并联机器人机构学理论研究[D]. 天津: 天津大学, 2006.
FENG Zhiyou. Theoretical research on robotic mechanisms based on single-open-chain units[D]. Tianjin: Tianjin University, 2006. (in Chinese)
- [24] 冯志友, 何连才, 杨廷力, 等. 基于单开链单元的并联气液动连杆机构逆动力学分析[J]. *机械设计*, 2010, 27(4):58–61.
FENG Zhiyou, HE Liancai, YANG Tingli, et al. Inverse dynamic analysis of a parallel pneumatic and hydraulic linkage based on single-opened-chain[J]. *Journal of Machine Design*, 2010, 27(4):58–61. (in Chinese)
- [25] 杨廷力, 刘安心, 沈惠平, 等. *机器人机构拓扑结构设计*[M]. 北京: 科学出版社, 2012.