

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2020.06.044

3-RRPaR 并联机构刚体动力学建模与分析

陈修龙 郭景尧 贾永皓

(山东科技大学机械电子工程学院, 青岛 266590)

摘要: 针对一种具有冗余结构的 3-RRPaR 并联机构, 根据拉格朗日乘子法建立动力学模型, 进而对冗余并联机构进行动力学分析。首先, 分析了 3-RRPaR 并联机构的结构特征, 确定了冗余结构的结构构型; 然后, 利用闭环矢量法建立并联机构的逆运动学模型, 利用拉格朗日乘子法建立并联机构的动力学模型; 最后, 利用 Matlab 分别对并联机构空载和加载时的动力学方程进行数值求解, 绘制了动力学响应曲线, 根据拉格朗日乘子与约束力矩的关系求解出驱动杆的驱动力矩, 将计算结果与 ADAMS 虚拟仿真结果进行对比分析, 验证了动力学建模方法的正确性。结果表明, 动平台加载后, 驱动杆的驱动力矩也随之增大, 但其数值变化规律与空载时基本相同。本研究为该并联机构的动力学控制和机构性能研究奠定了基础, 也为其他结构冗余并联机构的刚体动力学建模提供了方法和思路。

关键词: 并联机构; 冗余结构; 拉格朗日乘子法; 动力学模型

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2020)06-0404-08

OSID:



Rigid Body Dynamics Modeling and Analysis of 3-RRPaR Parallel Mechanism

CHEN Xiulong GUO Jingyao JIA Yonghao

(College of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

Abstract: Parallel mechanism with its advantages of high stiffness, high bearing capacity and high precision fills the shortcomings of the series mechanism. For a 3-RRPaR parallel mechanism with redundant structure, a dynamic model was established based on Lagrange multiplier method, and then the dynamic analysis of the redundant parallel mechanism was carried out. Firstly, the structural characteristics of 3-RRPaR parallel mechanism were analyzed, and the redundant structure was determined. Then the inverse kinematics model of the parallel mechanism was established by closed-loop vector method, and the dynamic model of the parallel mechanism was established by Lagrange multiplier method. Finally, the dynamic equations of the parallel mechanism under no-load and loading were solved by Matlab, and the dynamic response curves were drawn. The driving moment of the driving rod was calculated according to the relationship between the Lagrange multiplier and the constraint moment. The comparison between the calculation results and the ADAMS virtual simulation results verified the correctness of the dynamic modeling method. The results showed that the driving torque of the driving rod was increased with the loading of the moving platform, but the numerical variation law was basically the same as that of no-load. The research laid a foundation for the dynamic control and mechanism performance research of the parallel mechanism, and also provided a method and idea for the rigid body dynamic modeling of other redundant parallel mechanisms.

Key words: parallel mechanism; redundant structure; Lagrange multiplier method; dynamic model

0 引言

并联机构相比于串联机构具有刚度大、精度高、承载能力强等优点, 但由于并联机构奇异点的影响, 使其优势难以发挥^[1-4]。具有冗余结构的并联机构

可以避免并联机构的奇异位型, 提高并联机构的刚度, 在一定程度上提高了并联机构的运动性能, 因此受到研究者的广泛关注^[5-7]。结构冗余并联机构通过构型的优势弥补了普通并联机构的不足, 因此, 对结构冗余并联机构的研究具有重要意义。

收稿日期: 2020-03-21 修回日期: 2020-04-15

基金项目: 山东省重点研发计划(公益类)科技攻关项目(2019GGX104011)

作者简介: 陈修龙(1976—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事并联机构运动学与动力学研究, E-mail: cxldy99@163.com

并联机构的刚体动力学建模是实现动力学控制和研究机构性能的前提,是在机构运动学的基础上对并联机构的进一步研究与探索^[8-11],可为并联机构驱动电机的选择、控制和实际机构的研制奠定理论基础,同时为其他结构冗余并联机构的刚体动力学建模提供可行的思路。近年来,国内外学者采用不同的方法对并联机构动力学模型进行了大量研究,但针对具有冗余结构的并联机构研究较少。刘芳华等^[12]基于拉格朗日动力学模型,建立了6-UPS 并联平台的全动力学模型,并求解了理想驱动力和时间的关系。XIN 等^[13]以三自由度空间并联机器人为例,利用拉格朗日与虚功原理相结合的方法建立了动力学模型,并通过仿真和实验加以证明。桑董辉等^[14]提出了一种新型的二自由度球面并联机构,利用牛顿-欧拉法建立了动力学方程,并在给定外力的作用下计算了关节作用力和作用力矩。王英波等^[15]利用凯恩法建立了 Stewart 平台的刚体动力学模型,并利用动力学建模仿真验证了其动力学模型的正确性。陈修龙等^[16]采用牛顿-欧拉法和虚拟仿真相结合的方法对4-UPS-RPS 空间并联机构进行了动力学分析。ABDELLATIF 等^[17]利用拉格朗日公式和广义坐标重新推导了动力学方程,验证了坐标选取形式的重要性。朱伟等^[18]以一种新型四自由度高速并联机构为例,运用虚功原理建立了动力学方程,并通过 ADAMS 虚拟仿真进行了验证。GOSSELIN 等^[19]介绍了一种具有冗余结构的并联机构,并证明该机构所有奇异点都可通过运动学冗余来避免。ABADI 等^[20]证明了结构冗余是避免奇异点和增大工作空间的有效途径,并提出了一种新的运动规划策略,以避免奇异点的产生。QU 等^[21]提出了一种平面结构冗余并联机构,并通过静力学仿真预测了机构中较为容易损坏的位置。

本文以具有冗余结构的3-RRPaR 空间并联机构为研究对象,考虑其冗余构型的影响,利用拉格朗日乘子法建立该并联机构的刚体动力学模型。首先,分析3-RRPaR 空间并联机构的结构特征,计算机构整体自由度;然后,利用闭环矢量法建立并联机构的运动学模型,求解出驱动杆的角位移、角速度和角加速度;采用质心坐标和自然坐标相结合的方式建立系统约束方程,计算机构整体的质量矩阵,利用拉格朗日乘子法建立并联机构的动力学方程,并根据拉格朗日乘子与约束力矩的关系求解驱动力矩;最后,利用 Matlab 对动力学方程进行数值求解,将理论模型求解结果与 ADAMS 虚拟仿真结果进行对比,分析并联机构动力学响应曲线。

1 结构特征

3-RRPaR 空间并联机构如图1所示。该并联机构由定平台、动平台和3条运动支链组成,每条运动支链包括主动臂和从动臂,从动臂为由4根杆件组成的平行四边形构型,其中R表示转动副,Pa表示平行四边形构型,该并联机构的各个构件之间均通过转动副连接。

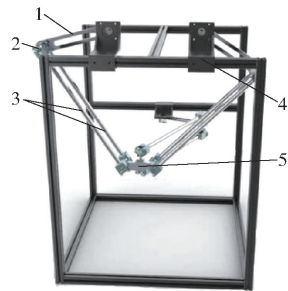


图1 3-RRPaR 空间并联机构的三维模型

Fig. 1 Three dimensional model of 3-RRPaR spatial parallel mechanism

1. 主动臂 2. 转动副 3. 从动臂 4. 定平台 5. 动平台

3-RRPaR 为闭环空间并联机构,采用修正的 Grubler - Kutzbach 公式计算其自由度^[22],计算公式为

$$P = 6(p - q - 1) + \sum_{k=1}^q f_k + h \quad (1)$$

式中 P ——机构整体自由度

p ——机构构件总数

q ——机构运动副总数

f_k ——第 k 个运动副的自由度

h ——冗余约束数

对该并联机构进行结构分析,可知 $p = 17, q = 21,$

$\sum_{k=1}^q f_k = 21, h = 12,$ 故该并联机构的自由度为3。

并联机构的3条运动支链分布在2个平面内,增加了机构的刚度和平稳性,通过对3个主动臂的旋转驱动可实现动平台的三维移动。对于运动支链中的平行四边形构型,由于引入了冗余约束,在动力学建模过程中需去掉多余的约束方程。

2 运动学模型

机构运动学是研究物体的位置、速度和加速度与时间的关系,是机构动力学研究的基础。本文利用闭环矢量法建立并联机构运动学模型^[23-25],分别求出机构位置、速度和加速度的逆解。

2.1 位置模型

为方便表示并联机构构件间的几何关系,对该机构作机构简图如图2所示。在定平台下建立全局

坐标系 $Oxyz$, 动平台视为质点 O' , 则 O' 点的位置矢量 $\mathbf{g} = (x, y, z)^T$ 可表示为

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{M}_i + l_{1i}\mathbf{u}_i + l_{2i}\mathbf{s}_i - \mathbf{N}_i \quad (i=1,2,3) \quad (2)$$

式中 \mathbf{M}_i ——铰点 M_i 在 $Oxyz$ 中的位置矢量

\mathbf{N}_i ——铰点 N_i 在 $O'x'y'z'$ 中的位置矢量

l_{1i} ——机构主动臂杆长

l_{2i} ——机构从动臂杆长

\mathbf{u}_i ——主动臂单位方向矢量

\mathbf{s}_i ——从动臂单位方向矢量

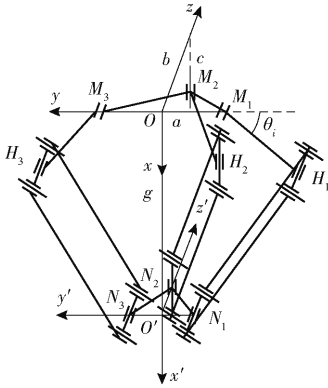


图2 3-RRPaR 空间并联机构简图

Fig.2 3-RRPaR spatial parallel mechanism diagram

M_i 在定系 $Oxyz$ 下的位置矢量为

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1 = (0, -a, 0)^T \\ \mathbf{M}_2 = (c, 0, b)^T \\ \mathbf{M}_3 = (0, a, 0)^T \end{cases}$$

N_i 在局部坐标系 $O'x'y'z'$ 下的位置矢量为

$$\begin{cases} \mathbf{N}_1 = (0, -m, 0)^T \\ \mathbf{N}_2 = (0, 0, n)^T \\ \mathbf{N}_3 = (0, m, 0)^T \end{cases}$$

为方便计算,引入单位矢量 \mathbf{w}_i , \mathbf{w}_i 垂直于主动臂的旋转面,使得 $\mathbf{w}_i \times \mathbf{u}_i$ 能够表示主动臂的旋转方向。 \mathbf{u}_i 和 \mathbf{w}_i 的表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = (\sin\theta_1, -\cos\theta_1, 0) \\ \mathbf{u}_2 = (0, -\cos\theta_2, -\sin\theta_2) \\ \mathbf{u}_3 = (\sin\theta_3, \cos\theta_3, 0) \\ \mathbf{w}_1 = (0, 0, 1) \\ \mathbf{w}_2 = (1, 0, 0) \\ \mathbf{w}_3 = (0, 0, -1) \end{cases}$$

将式(2)化简,得 $\mathbf{g}_i - \mathbf{M}_i - l_{1i}\mathbf{u}_i + \mathbf{N}_i = l_{2i}\mathbf{s}_i$, 等式两边左乘各自的转置,可得

$$(\mathbf{g}_i - \mathbf{M}_i - l_{1i}\mathbf{u}_i + \mathbf{N}_i)^T (\mathbf{g}_i - \mathbf{M}_i - l_{1i}\mathbf{u}_i + \mathbf{N}_i) = l_{2i}^2 \quad (3)$$

将式(3)转换为三角函数式

$$A_i \sin\theta_i + B_i \cos\theta_i + C_i = 0$$

其中 $A_i = -2l_{1i}x$

$$B_i = 2l_{1i}(y + a - m)$$

$$C_i = x^2 + y^2 + z^2 + l_{1i}^2 - l_{2i}^2 + 2ay - 2my + (a - m)^2$$

$$A_2 = 2l_{12}(z - b + n)$$

$$B_2 = 2l_{12}y$$

$$C_2 = (x - c)^2 + y^2 + l_{12}^2 + (z - b + n)^2 - l_{22}^2$$

$$A_3 = -2l_{13}x$$

$$B_3 = -2l_{13}(y - a + m)$$

$$C_3 = x^2 + l_{13}^2 + (y - a + m)^2 + z^2 - l_{23}^2$$

解得主动臂的角位移为

$$\theta_i = 2\arctan \frac{-A_i - \sqrt{A_i^2 + B_i^2 - C_i^2}}{C_i - B_i} \quad (4)$$

因此,可得从动臂单位方向矢量 \mathbf{s}_i 为

$$\mathbf{s}_i = (\mathbf{g} - \mathbf{M}_i - l_{1i}\mathbf{u}_i + \mathbf{N}_i) / l_{2i} \quad (5)$$

2.2 速度模型

将式(2)两端关于时间求导,得到动平台质心点 O' 的速度表达式为

$$\mathbf{v} = l_{1i}\dot{\theta}_i(\mathbf{w}_i \times \mathbf{u}_i) + l_{2i}\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i \quad (6)$$

式中 $\dot{\theta}$ ——机构主动臂角速度,主动臂的旋转方向由 $\mathbf{w}_i \times \mathbf{u}_i$ 确定

$\boldsymbol{\omega}_i$ ——从动臂角速度矢量

对式(6)两端同时左乘 \mathbf{s}_i^T ,化简可得到主动臂角速度为

$$\dot{\theta}_i = \frac{\mathbf{s}_i^T \mathbf{v}}{l_{1i}\mathbf{w}_i^T (\mathbf{u}_i \times \mathbf{s}_i)} \quad (7)$$

对式(6)两端同时左叉乘 $\boldsymbol{\omega}_i$,可求得机构从动臂角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_i = [\mathbf{s}_i \times \mathbf{v} - l_{1i}\dot{\theta}_i \mathbf{s}_i \times (\mathbf{w}_i \times \mathbf{u}_i)] / l_{2i} \quad (8)$$

则机构从动臂质心速度为

$$\mathbf{v}_{si} = [\mathbf{v} + l_{1i}\dot{\theta}_i(\mathbf{w}_i \times \mathbf{u}_i)] / 2 \quad (9)$$

2.3 加速度模型

将式(6)两端关于时间求导,得到动平台质心点 O' 的加速度表达式为

$$\mathbf{a} = l_{1i}\ddot{\theta}_i(\mathbf{w}_i \times \mathbf{u}_i) + l_{1i}\dot{\theta}_i[\dot{\mathbf{w}}_i \times (\mathbf{w}_i \times \mathbf{u}_i)] + l_{2i}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{s}_i) + l_{2i}[\boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i)] \quad (10)$$

式中 $\ddot{\theta}_i$ ——机构主动臂角加速度

$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ ——从动臂角加速度矢量

对式(10)两端同时左点乘 \mathbf{s}_i^T ,化简可得到主动臂的角加速度为

$$\ddot{\theta}_i = \frac{\mathbf{s}_i^T \mathbf{a} + l_{1i}\dot{\theta}_i \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{u}}_i + l_{2i}}{l_{1i}\mathbf{s}_i^T (\dot{\mathbf{w}}_i \times \mathbf{u}_i)} \quad (11)$$

对式(10)两端同时左叉乘 $\dot{\mathbf{s}}_i$,化简可得到从动臂的角加速度为

$$\dot{\omega}_i = \{s_i \times a - l_{1i} \ddot{\theta}_i [s_i \times (w_i \times u_i)] + l_{1i} \dot{\theta}_i (s_i \times u_i)\} / l_{2i} \quad (12)$$

则机构从动臂质心加速度为

$$a_{si} = l_{1i} \ddot{\theta}_i (w_i \times u_i) + l_{1i} \dot{\theta}_i [w_i \times (w_i \times u_i)] + \frac{l_{2i}}{2} (\dot{\omega}_i \times s_i) + \frac{l_{2i}}{2} [\omega_i \times (\omega_i \times s_i)] \quad (13)$$

通过对并联机构进行运动学逆解,得到主动臂角位移、角速度和角加速度。

3 动力学模型

3.1 约束方程

根据空间并联机构各构件之间的几何关系建立其约束方程。质心坐标和欧拉角转换矩阵可以准确描述构件的位置和姿态,易于通过驱动臂的角度变化来实现机构驱动,但对于特殊情况下的旋转变换,欧拉角存在奇异问题。自然坐标是利用全局坐标系下的绝对坐标来描述构件的运动状态,两点零矢的自然坐标不涉及到构件的方向矢量,适用于描述空间构件的相对一维转动,但两点零矢的自然坐标不能通过角度变化来实现机构驱动。

3-RRPaR 空间并联机构为结构冗余的并联机构,各个构件之间均通过转动副连接。为了易于驱动,方便地构建约束方程并去掉多余的约束,本文对3个支链的主动臂采用质心坐标和欧拉角来表示机构构件的位置和姿态,对其他构件采用自然坐标来表示机构构件的位置和姿态。建立自然坐标时,对于杆构件,在杆的两端建立自然坐标,对于三角板构件,在三角板的3个端点处建立自然坐标。则机构整体的广义坐标表示为

$$q = (O_1, O_2, \dots, O_{30})$$

其中 $O_k = (x_k, y_k, z_k)^T (k = 2, 3, \dots, 9, 11, 12, \dots, 18, 20, 21, \dots, 30)$, $O_k = (x_k, y_k, z_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k)^T (k = 1, 10, 19)$ 。

该并联机构共有99个广义坐标,且机构有三维移动自由度,因此需要添加96个线性无关的约束方程。由于机构复杂且广义坐标数目较多,本文以1号支链为例构建其约束方程,1号支链构件坐标表示如图3所示。

用质心坐标和欧拉角表示构件位姿时,可以利用运动副的约束关系建立约束方程。空间转动副只有一维转动,限制了构件的三维移动和二维转动,因此需构建5个约束方程。为了约束两构件之间的相对移动,需使两构件在旋转轴中心上的两点重合。为了约束两构件之间两个方向的相对转动,需沿旋

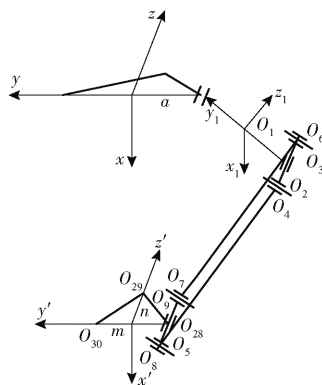


图3 并联机构1号支链坐标示意图

Fig. 3 Coordinate diagram of No. 1 branch chain of parallel mechanism

转轴在两构件上分别建立两个单位方向向量,使得这两个方向向量共线,由于已知1号支链主动臂绕z轴旋转,因此可直接限制构件另外2个方向的相对旋转。可得转动副约束方程为

$$\Phi_1 = \begin{cases} O_1 + R_{u1} \begin{bmatrix} 0 \\ l_{11}/2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} = O_{3 \times 1} \\ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = O_{2 \times 1} \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$R_{u1} = \begin{bmatrix} \cos\lambda_1 & -\sin\lambda_1 & 0 \\ \sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中 R_{u1} ——1号支链主动臂绕z轴的旋转矩阵

$O_{3 \times 1}, O_{2 \times 1}$ ——零矩阵

l_{11} ——1号支链主动臂杆长

利用自然坐标表示构件位姿时,可直接根据构件的几何关系建立约束方程

$$\Phi_2 = O_2 - 2O_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_x/2 \end{bmatrix} = O_{3 \times 1} \quad (15)$$

$$\Phi_3 = O_3 - 2O_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_x/2 \end{bmatrix} = O_{3 \times 1} \quad (16)$$

$$\Phi_4 = O_4 - O_2 = O_{3 \times 1} \quad (17)$$

$$\Phi_5 = O_6 - O_3 = O_{3 \times 1} \quad (18)$$

$$\Phi_6 = |O_5 - O_4| - l_{21} = 0 \quad (19)$$

$$\Phi_7 = O_8 - O_5 = O_{3 \times 1} \quad (20)$$

$$\Phi_8 = O_9 - O_7 = O_{3 \times 1} \quad (21)$$

$$\Phi_9 = O_8 - O_{28} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_x/2 \end{bmatrix} = O_{3 \times 1} \quad (22)$$

$$\Phi_{10} = \mathbf{O}_9 - \mathbf{O}_{28} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_x/2 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{3 \times 1} \quad (23)$$

式中 l_{21} ——1号支链从动臂杆长

l_x ——平行四边形构型中小杆杆长

根据动平台的尺寸和运动状态建立约束方程

$$\Phi_{31} = \mathbf{O}_{29} - \mathbf{O}_{28} - \begin{bmatrix} 0 \\ m \\ n \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{3 \times 1} \quad (24)$$

$$\Phi_{32} = \mathbf{O}_{30} - \mathbf{O}_{28} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2m \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{3 \times 1} \quad (25)$$

由运动学模型可知主动臂角位移变化函数,则对机构动力学模型建立驱动约束方程为

$$\Phi_d = \begin{cases} \gamma_1 - \theta_1 = 0 \\ \alpha_2 - \theta_2 = 0 \\ \gamma_3 + \theta_3 = 0 \end{cases} \quad (26)$$

式中 Φ_d ——机构主动臂驱动约束方程

由式(26)组成3-RRPaR空间并联机构理想约束方程

$$\Phi(q) = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_{32} \quad \Phi_d]^T = \mathbf{O}_{99 \times 1} \quad (27)$$

式中 $\Phi_1 \sim \Phi_{10}$ ——1号支链约束方程

$\Phi_{11} \sim \Phi_{20}$ ——2号支链约束方程

$\Phi_{21} \sim \Phi_{30}$ ——3号支链约束方程

3.2 质量矩阵

质量矩阵是质量到广义坐标的推广,是机构动力学方程的重要组成部分,而质心坐标和自然坐标可以方便地表示构件的质量矩阵。

对于质心坐标下构件对应的质量矩阵,由构件局部坐标原点的移动分量对应的质量矩阵和构件局部坐标原点的转动分量对应的惯性张量矩阵组成,可分别表示为

$$\mathbf{N}_j = \text{diag}(m_j, m_j, m_j) \quad (j=1, 6, 11) \quad (28)$$

$$\mathbf{J}_j = \text{diag}(\mathbf{I}_{xj}, \mathbf{I}_{yj}, \mathbf{I}_{zj}) \quad (j=1, 6, 11) \quad (29)$$

则质心坐标下构件*j*对应的质量矩阵为

$$\mathbf{M}_j = \text{diag}(\mathbf{N}_j, \mathbf{J}_j) \quad (j=1, 6, 11) \quad (30)$$

对于自然坐标下构件对应的质量矩阵,可利用惯性力的虚功率分别求出杆单元和三角板单元的质量矩阵,杆单元和三角板单元(动平台)的质量矩阵分别为

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \frac{m_j}{3} \mathbf{I}_3 & \frac{m_j}{6} \mathbf{I}_3 \\ \frac{m_j}{6} \mathbf{I}_3 & \frac{m_j}{3} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

$$(j=2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15) \quad (31)$$

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \frac{m_j}{6} \mathbf{I}_3 & \frac{m_j}{12} \mathbf{I}_3 & \frac{m_j}{12} \mathbf{I}_3 \\ \frac{m_j}{12} \mathbf{I}_3 & \frac{m_j}{6} \mathbf{I}_3 & \frac{m_j}{12} \mathbf{I}_3 \\ \frac{m_j}{12} \mathbf{I}_3 & \frac{m_j}{12} \mathbf{I}_3 & \frac{m_j}{6} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (j=16) \quad (32)$$

式中 \mathbf{I}_3 ——三阶单位矩阵

则系统整体质量矩阵为

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \cdots, \mathbf{M}_{16}) \quad (33)$$

3.3 动力学方程

利用拉格朗日乘子法来建立并联机构刚体动力学方程。将式(27)对时间求一阶导数,得到系统速度约束方程为

$$\Phi_q \dot{q} = -\Phi_t \equiv \mathbf{v}_{99 \times 1} \quad (34)$$

式中 Φ_q ——系统约束方程的 Jacobian 矩阵

\dot{q} ——广义坐标对应的广义速度

将式(27)对时间求二阶导数,得到系统加速度约束方程为

$$\Phi_q \ddot{q} = -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qt} \dot{q} - \Phi_{tt} \equiv \boldsymbol{\varepsilon} \quad (35)$$

式中 \ddot{q} ——广义坐标对应的广义加速度

利用拉格朗日法建立3-RRPaR空间并联机构带有拉格朗日乘子的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\varepsilon}' \end{bmatrix} \quad (36)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - 2\delta\dot{\Phi} - \eta^2\Phi$

式中 δ, η ——大于0的修正参数^[25]

$\boldsymbol{\lambda}$ ——系统拉格朗日乘子矢量

\mathbf{Q} ——系统广义外力矢量

求解该动力学方程可得到系统的广义坐标对应的广义加速度和拉格朗日乘子矢量。通过系统的广义加速度,积分得到系统的广义速度和广义坐标,可用来描述间隙对系统动力学的影响,为研究含间隙动力学打下基础。通过拉格朗日乘子矢量,可求得主动臂转动副处的驱动力矩,完成3-RRPaR空间并联机构动力学逆解。则*i*号支链驱动杆转动副处驱动力矩为

$$\mathbf{M}_{di} = (\Phi_{qr}^i \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{R}^i \rho^i - \Phi_{q\varphi}^i)^T \boldsymbol{\lambda}^i \quad (37)$$

式中 Φ_{qr}^i ——*i*号支链主动臂转动副处约束方程对其移动分量广义坐标的 Jacobian 矩阵

$\Phi_{q\varphi}^i$ ——*i*号支链主动臂转动副处约束方程对其转动分量广义坐标的 Jacobian 矩阵

$\tilde{\mathbf{I}}$ ——单位向量的反对称算子

\mathbf{R}^i ——*i*号支链主动臂局部坐标系关于全局坐标系的转换矩阵

ρ^i —— i 号支链主动臂转动铰点在其局部坐标系中的位置矢量

4 算例仿真与分析

4.1 仿真参数

根据上述理论模型利用 Matlab 编写程序,进行 3-RRPaR 空间并联机构动力学方程的数值求解。利用 Matlab 自带的 ode45 算法进行数值求解,使得计算效率更高,结果更精确。

3-RRPaR 空间并联机构的构件转动惯量和构件参数如表 1~3 所示。

表 1 3-RRPaR 空间并联机构主动臂转动惯量

Tab.1 Moment of inertia of active arm of 3-RRPaR spatial parallel mechanism kg·m²

构件	I_x	I_y	I_z
1号支链	1.940×10^{-3}	5.048×10^{-5}	1.981×10^{-3}
2号支链	1.102×10^{-3}	4.175×10^{-5}	1.069×10^{-3}
3号支链	1.940×10^{-3}	5.048×10^{-5}	1.981×10^{-3}

表 2 3-RRPaR 空间并联机构的结构参数

Tab.2 Structural parameters of 3-RRPaR spatial parallel mechanism

构件	质量/kg	长度/m
1号支链主动臂	0.274 8	0.230
1号支链从动臂	0.358 1	0.500
2号支链主动臂	0.237 4	0.180
2号支链从动臂	0.295 5	0.390
3号支链主动臂	0.274 8	0.230
3号支链从动臂	0.358 1	0.500
四边形构型小杆	0.045 6	0.080
动平台	0.188 1	

表 3 定平台和动平台尺寸参数

Tab.3 Size parameters of fixed platform and moving platform m

构件	参数	数值
定平台	a	0.150
	b	0.448
	c	0.435
动平台	m	0.050
	n	0.044

4.2 仿真结果与分析

为了分析并联机构的动力学响应,需要对动平台规划一条运动轨迹。已知并联机构有三维移动自由度,使得动平台中心点在全局坐标系 $Y-Z$ 平面运动轨迹为圆轨迹,其运动方程描述为

$$\begin{cases} y = 0.16 - 0.01 \cos(\pi t) \\ z = 0.08 - 0.01 \sin(\pi t) \end{cases} \quad (38)$$

动平台在全局坐标系下的起始点为 (0.54, 0.15, 0.08), 利用 Matlab 对动力学方程进行数值求解,得到该机构动平台位移、速度和加速度曲线,然后利用拉格朗日乘子和约束力矩的关系求解出驱动杆处的驱动力矩,并将结果与 ADAMS 仿真结果进行对比,对机构动态响应曲线进行分析。

图 4 是该机构动平台动态响应曲线,分别求出了机构刚体时动平台的位移、速度和加速度,与规划的运动轨迹相同,验证了该动力学模型的正确性,为分析含间隙时的动力学模型打好基础。

图 5a 为该并联机构空载时驱动杆的驱动力矩曲线。从图 5a 可以看出,Matlab 求解动力学模型所得驱动力矩曲线和 ADAMS 虚拟仿真所得驱动力矩曲线基本吻合,但有较小误差。其中 3 号驱动杆的驱动力矩误差最大,为 $0.027 \text{ N}\cdot\text{m}$; 1 号驱动杆的驱

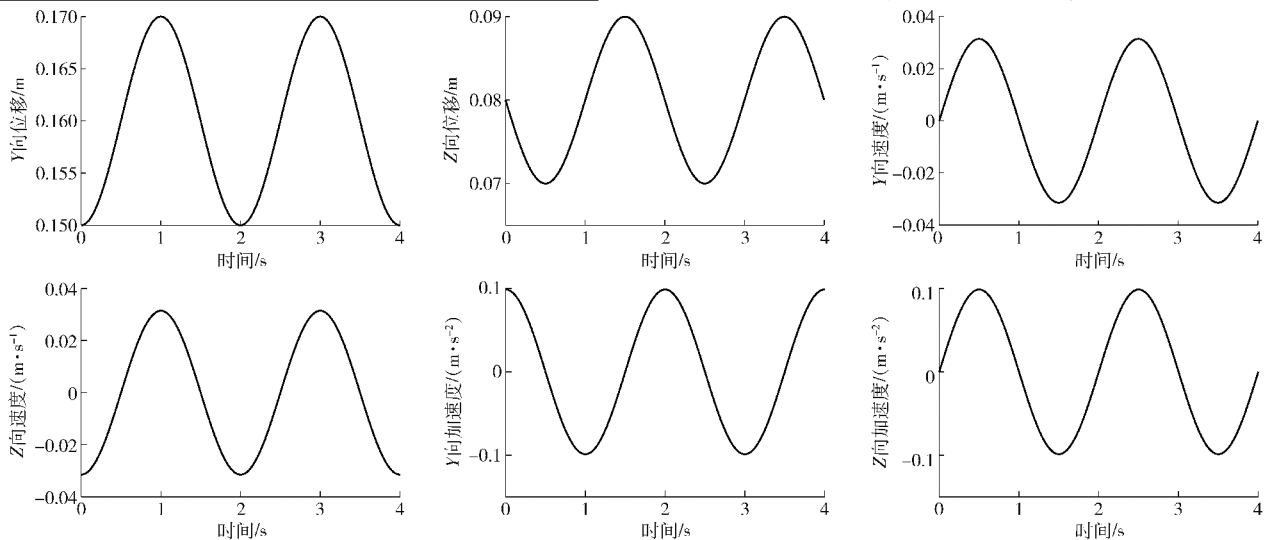


图 4 动平台动态响应曲线

Fig.4 Dynamic response curves of moving platform

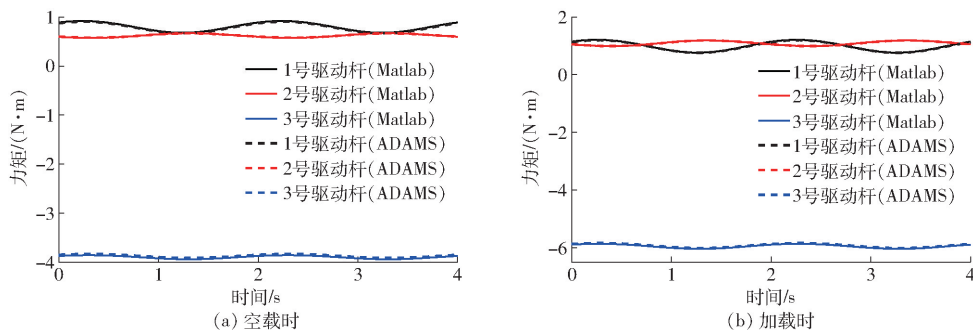


图5 并联机构驱动杆的驱动力矩曲线

Fig. 5 Driving torque curves of driving rod

驱动力矩误差次之,为 $0.0153\text{ N}\cdot\text{m}$;2号驱动杆的驱动力矩误差最小,为 $0.0023\text{ N}\cdot\text{m}$ 。空载时,3号支链驱动杆的驱动力矩最大,最大值达到 $4\text{ N}\cdot\text{m}$,1号支链和2号支链驱动力矩较小且相差不大,为 $0.8\text{ N}\cdot\text{m}$ 左右。

图5b为该并联机构动平台加载 1 kg 时驱动杆的驱动力矩曲线。从图5b可以看出,动平台加载 1 kg 之后,驱动杆的驱动力矩数值相应增大,Matlab与ADAMS数值结果的误差也随之增大,但幅值和周期基本没有变化。3号驱动杆的驱动力矩最大为 $6\text{ N}\cdot\text{m}$,误差为 $0.027\text{ N}\cdot\text{m}$;1号驱动杆和2号驱动杆驱动力矩相差不大,为 $1\text{ N}\cdot\text{m}$,误差也相应较小,1号驱动杆误差为 $0.014\text{ N}\cdot\text{m}$,2号驱动杆误差为 $0.004\text{ N}\cdot\text{m}$ 。

由以上分析可知,通过刚体动力学模型求解出的并联机构动平台的位移、速度和加速度,结果与所规划轨迹完全吻合,分别对比了机构空载和加载时驱动杆的驱动力矩,Matlab与ADAMS结果基本一

致,验证了3-RRPaR空间并联机构刚体动力学模型的正确性。

5 结论

(1)分析了3-RRPaR并联机构的结构特征,利用闭环矢量法建立了该机构的逆运动学模型,得到了主动臂的角位移、角速度和角加速度。

(2)通过质心坐标法和自然坐标法建立了并联机构的约束方程,分别计算出质心坐标和自然坐标下构件的质量矩阵,利用拉格朗日乘子法建立了3-RRPaR空间并联机构的动力学方程,并根据拉格朗日乘子和驱动力矩的关系求解出驱动杆的驱动力矩。

(3)通过Matlab求解3-RRPaR并联机构的刚体动力学方程,得到并联机构动平台的位移、速度和加速度,结果与所规划轨迹完全吻合,通过ADAMS虚拟仿真得到机构空载和加载时驱动杆的驱动力矩曲线,与Matlab数值计算结果进行对比分析,验证了3-RRPaR空间并联机构刚体动力学模型的正确性。

参 考 文 献

- [1] 王潇剑, 吴军, 岳义, 等. 2UPU/SP 3 自由度并联机构的动力学性能评价[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2019, 59(10): 838-846.
WANG Xiaojian, WU Jun, YUE Yi, et al. Dynamic performance evaluation of a 2UPU/SP three-DOF parallel mechanism[J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2019, 59(10): 838-846. (in Chinese)
- [2] YUAN W H, TSAI M S. A novel approach for forward dynamic analysis of 3-PRS parallel manipulator with consideration of friction effect[J]. Robotics & Computer Integrated Manufacturing, 2014, 30(3): 315-325.
- [3] 胡小亮, 谢志江, 吴小勇, 等. 4-PRR 冗余并联机构驱动力与能耗优化[J/OL]. 农业机械学报, 2019, 50(5): 413-419.
HU Xiaoliang, XIE Zhijiang, WU Xiaoyong, et al. Optimization of driving force and energy consumption of 4-PRR redundant parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(5): 413-419. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20190547&flag=1&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.05.047. (in Chinese)
- [4] 张彬彬, 王立平, 吴军. 3 自由度并联机构的动力学各向同性评价方法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2017, 57(8): 803-809.
ZHANG Binbin, WANG Liping, WU Jun. Dynamic isotropic performance evaluation of a 3-DOF parallel manipulator[J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2017, 57(8): 803-809. (in Chinese)
- [5] GOSSELIN C M, LALIBERTE T, VEILLETTE A. Singularity-free kinematically redundant planar parallel manipulators with unlimited rotational capability[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2015, 31(2): 457-467.
- [6] FONTES J V C, SANTOS J C, SILVA M M da. Optimization strategies for actuators of kinematically redundant manipulators to achieve high dynamic performance[C]//Robotics: Sbr-lars Robotics Symposium and Robocontrol, 2014: 31-36.
- [7] 曾达幸, 张星, 樊明洲, 等. 3-CUR 解耦并联 3D 打印机结构优化与动力学分析[J]. 中国机械工程, 2017, 28(12): 1420-1426.

- ZENG Daxing, ZHANG Xing, FAN Mingzhou, et al. Structure optimization and dynamics analysis of 3-CUR decoupled parallel 3D printers[J]. *China Mechanical Engineering*, 2017, 28(12):1420–1426. (in Chinese)
- [8] ZHAO Yongjie, QIU Ke, WANG Shuangxi, et al. Inverse kinematics and rigid-body dynamics for a three rotational degrees of freedom parallel manipulator[J]. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 2015, 31:40–50.
- [9] STAICU S. Dynamics of the spherical 3-U-PS/S parallel mechanism with prismatic actuators[J]. *Multibody System Dynamics*, 2009, 22(2):115–132.
- [10] CHEN Xiulong, GAO Wenhua, DENG Yu, et al. Chaotic characteristic analysis of spatial parallel mechanism with clearance in spherical joint[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 94(4):2625–2642.
- [11] 陈修龙, 董芳杞, 王清. 基于牛顿-欧拉法的4-UPS-UPU 并联机构动力学方程[J]. *光学精密工程*, 2015, 23(11):3129–3137.
CHEN Xiulong, DONG Fangqi, WANG Qing. Dynamic equation of 4-UPS-UPU parallel mechanism based on Newton-Euler approach[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2015, 23(11):3129–3137. (in Chinese)
- [12] 刘芳华, 裴竞宇, 宗泱. 6-UPS 并联平台考虑关节摩擦的动力学分析及数值仿真[J]. *应用力学学报*, 2015, 32(5):768–774, 894.
LIU Fanghua, PEI Jingyu, ZONG Yang. Dynamic analysis and numerical simulation of 6-UPS parallel mechanism with joint friction[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2015, 32(5):768–774, 894. (in Chinese)
- [13] XIN Guiyang, DENG Hua, ZHONG Guoliang. Closed-form dynamics of a 3-DOF spatial parallel manipulator by combining the Lagrangian formulation with the virtual work principle[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86(2):1329–1347.
- [14] 桑董辉, 陈原, 高军. 轮-腿复合移动机器人 RUPU-RUPR 球面并联腿机构动力学研究[J/OL]. *农业机械学报*, 2017, 48(8):376–383.
SANG Donghui, CHEN Yuan, GAO Jun. Dynamics investigation of RUPU-RUPR spherical parallel mechanism for wheel-legged mobile robot [J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2017, 48(8):376–383. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20170845&flag=1&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.08.045. (in Chinese)
- [15] 王英波, 黄其涛, 郑书涛, 等. Simulink 和 SimMechanics 环境下并联机器人动力学建模与分析[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2012, 33(1):100–105.
WANG Yingbo, HUANG Qitao, ZHENG Shutao, et al. Dynamic modeling and analysis of a parallel manipulator using Simulink and SimMechanics[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2012, 33(1):100–105. (in Chinese)
- [16] 陈修龙, 王成硕. 基于牛顿-欧拉法的4-UPS-RPS 机构刚体动力学分析[J]. *计算机集成制造系统*, 2014, 20(7):1709–1715.
CHEN Xiulong, WANG Chengshuo. Rigid-body dynamics analysis of 4-UPS-RPS mechanism based on Newton-Euler approach[J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2014, 20(7):1709–1715. (in Chinese)
- [17] ABDELLATIF H, HEIMANN B. Computational efficient inverse dynamics of 6-DOF fully parallel manipulators by using the Lagrangian formalism[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(1):192–207.
- [18] 朱伟, 郭倩, 马致远, 等. SCARA 并联机构刚度和动力学分析[J/OL]. *农业机械学报*, 2019, 50(10):375–385.
ZHU Wei, GUO Qian, MA Zhiyuan, et al. Stiffness and dynamics analysis of SCARA parallel mechanism [J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2019, 50(10):375–385. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20191044&flag=1&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.10.044. (in Chinese)
- [19] GOSSELIN C M, SCHREIBER L T. Kinematically redundant spatial parallel manipulators for singularity avoidance and large orientational workspace[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2017, 32(2):286–300.
- [20] ABADI B N R, MAHZOON M, FARID M. Singularity-free trajectory planning of a 3-RPRR planar kinematically redundant parallel mechanism for minimum actuating effort[J]. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 2019, 43(4):739–751.
- [21] QU H B, GUO S. Kinematics analysis of a new planar parallel manipulator with kinematic redundancy [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2017, 31(4):1927–1935.
- [22] QU H B, GUO S. Topology and mobility variations of a new redundant reconfigurable parallel manipulator [C]// *Advances in Reconfigurable Manipulators and Robots II*, 2016:223–233.
- [23] 谢志江, 吴小勇, 张军, 等. 3-PPR 并联机构动力学建模与分析[J]. *机械传动*, 2017, 41(5):53–58.
XIE Zhijiang, WU Xiaoyong, ZHANG Jun, et al. Dynamics modeling and analysis of a 3-PPR parallel mechanism [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2017, 41(5):53–58. (in Chinese)
- [24] 陈修龙, 陈天祥, 李跃文, 等. 3-PRR 并联机器人机构运动学建模与分析[J]. *山东科技大学学报(自然科学版)*, 2018, 37(5):79–87.
CHEN Xiulong, CHEN Tianxiang, LI Yuewen, et al. Kinematics modeling and analysis of 3-PRR parallel robot mechanism [J]. *Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science)*, 2018, 37(5):79–87. (in Chinese)
- [25] FLORES P, MACHADO M, SEABRA E, et al. A parametric study on the baumgarte stabilization method for forward dynamics of constrained multibody systems[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2011, 6(1):011019.