

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2020.06.042

零耦合度部分运动解耦三平移并联机构刚度建模与分析

孙驰宇¹ 沈惠平^{1,2} 王一熙² 许正骁² 袁军堂¹

(1. 南京理工大学机械工程学院, 南京 210094; 2. 常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

摘要: (RPa//3R)2R + RPa 机构是基于方位特征(POC)方程并联机构拓扑综合理论的一种非对称并联机构,其耦合度为零,且具有部分运动解耦性。本文对该机构进行刚度建模和特性分析。首先,对该机构进行拓扑结构描述,基于虚拟弹簧法对机构支链进行刚度建模,给出支链的静力学方程,并求解机构的刚度矩阵;其次,给出机构在工作空间中的整体刚度分布,并分别对 x, y, z 轴方向的扭转、线性刚度进行分析;进一步对机构进行有限元分析,并与虚拟弹簧法所得的机构变形结果进行对比,验证刚度结果的正确性;最后,对比非对称的(RPa//3R)2R + RPa 机构与对称 Delta 机构在不同截面下的刚度特性,结果表明,(RPa//3R)2R + RPa 机构的刚度大于 Delta 机构。

关键词: 并联机构; 三平移输出; 刚度分析; 虚拟弹簧法

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2020)06-0385-11

OSID:



Stiffness Analysis of Three-translation Parallel Mechanism with Zero Coupling Degree and Partial Motion Decoupling

SUN Chiyu¹ SHEN Huiping^{1,2} WANG Yixi² XU Zhengxiao² YUAN Juntang¹

(1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Technology and Engineering, Nanjing 210094, China

2. Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213016, China)

Abstract: The (RPa//3R)2R + RPa mechanism is an asymmetric 3-DOF translational parallel mechanism (PM) designed by the author's team based on the POC equation of the topological structure design theory. This parallel manipulator has zero coupling degree and partial motion decoupling is also easy to be manufactured. The stiffness model and performance of the PM were studied. Firstly, the stiffness model of the limb was established by using the virtual spring method, and the static equation of the limb was given. Then the overall stiffness distribution of the PM in the working space was given, and the torsion and linear stiffness of the x, y and z axes were analyzed respectively. Furthermore, finite element analysis method was used to analyze the deformation of the PM, and the deformation results of the PM were compared with those obtained by the virtual spring method, the correctness of stiffness results was verified. Finally, the stiffness characteristics of (RPa//3R)2R + RPa mechanism and Delta mechanism were compared with different sections, which indicated that the stiffness value of (RPa//3R)2R + RPa PM was greater than that of the Delta PM. The research result laid a foundation for the structural design of the parallel manipulator, and also provided a systematic theoretical framework to evaluate the kinematic properties of such PMs as a basis for future dimensional optimization, prototype development and dynamics analysis.

Key words: parallel mechanism; three-translation output; stiffness analysis; virtual springs method

0 引言

机构刚度是指机构动平台在外部载荷作用下,弹性构件发生形变而产生位移的度量。刚度分析对

并联操作手实际应用于参数选择和结构设计都具有重要的参考价值。

目前,主要的刚度分析方法有虚拟关节分析法^[1-5]、有限元分析法^[6-8]以及矩阵结构分析

收稿日期: 2019-09-11 修回日期: 2019-10-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(51475050)

作者简介: 孙驰宇(1990—),男,博士生,主要从事并联机构研究, E-mail: 476885351@qq.com

法^[9-10]。虚拟关节分析法将杆件设为刚体,在关节处通过建立柔性关节来描述杆件和关节所累积的柔性量;有限元分析法对杆件和关节的建模都需建立准确的物理模型,因此精度高,但其计算量较大;矩阵结构分析法将杆件和关节看作单元,相比于其他两种方法,其分析效率高,但无法直接得到笛卡尔系的刚度矩阵。

基于以上3种刚度分析方法,国内外学者进行了诸多刚度建模实例分析。胡波等^[11]给出了考虑约束反力产生变形的刚度建模方法,基于虚功原理建立机构静力学方程,通过分析机构在合力作用下的变形量给出机构刚度;徐东涛等^[12]基于传统的机构刚度映射矩阵建立机构刚度模型,并提出以机构弹性变形评价机构刚性特性的方法;曲海波等^[13]通过锁定机构驱动副,运用互易积运算求解动平台反螺旋力系,再以此推导出机构刚度及动平台的广义位移;周玉林等^[14]基于机构各构件的弹性变形,利用小变形叠加原理导出机构静力学方程,再运用正交变换得到机构静刚度;杨超等^[15]运用螺旋理论和应变能方法研究了具有2R1T三自由度的2UPR-RPU过约束并联机构的静弹性刚度性能,模型考虑了杆件和关节的柔度;CECCARELLI等^[16]研究了力的传递及力作用下的机构变形,以此推导出机构的刚度矩阵;MAJOU等^[3]通过参数化刚度分析建立了正交矩阵的相容模型,在各向同性结构中计算刚度矩阵元素,从而得到机构刚度;PASHKEVICH等^[17]提出利用6自由度虚拟弹簧建立刚度模型的方法;YAN等^[18]基于Castigliano第2定理,利用应变能法推导出一般平行四边形机构刚度的代数表达式,得到机构的整体刚度矩阵。

虚拟弹簧法基于虚拟关节分析法,是一种通过在弹性连杆的末端增加虚拟弹簧来描述连杆的线性/旋转变形以及变形之间的耦合特性的建模方法^[19-20],可对并联机构的支链进行单独建模,相比于上述建模方法,该方法不需要推导各类复杂的雅可比矩阵或运动映射关系,仅需利用机构的运动学逆解即可计算机构刚度(含处于奇异位形时)。

三平移并联操作手在定位、抓取、装卸等各种产业工艺操作上具有较广泛的应用。笔者团队提出一种新型零耦合度的非对称三平移并联操作手,该机构可得到位置正解的解析解,同时,还具有运动部分解耦特性,其运动控制及轨迹规划较易,已完成其运动学分析和计算^[21]。本文基于虚拟弹簧法对此机构进行刚度建模与特性分析,给出机构整体刚度在

工作空间中的分布规律,以及该机构在不同方向、不同高度截面上的扭转、线性刚度特性,以期为该操作手的动力学分析、样机设计及其实验研究提供理论基础。

1 机构描述

(RPa//3R)2R+RPa三平移并联机构的拓扑结构如图1所示,它由动平台1、静平台0及2条混合支链(HSOC)组成,坐标系如图1所示^[22]。

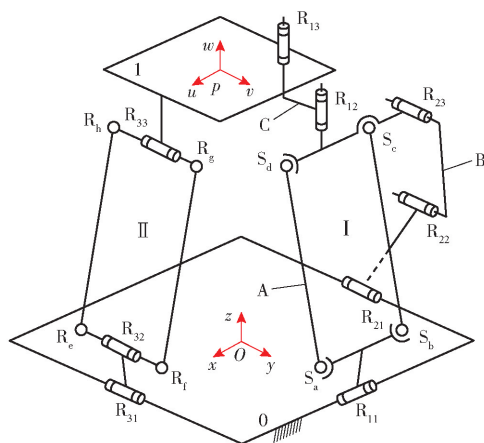


图1 零耦合度且运动解耦的非对称三平移并联机构
Fig.1 Asymmetric three-translational parallel mechanism with zero coupling degree and motion decoupling

混合支链I由支链A、B、C组成,其中4个球副(S_a 、 S_b 、 S_c 、 S_d)组成的平行四边形结构($Pa^{(4S)}$),支链A由驱动副 R_{11} 串联 $Pa^{(4S)}$ 组成; R_{11} 轴线与平行四边形 S_aS_b 边平行;支链B为驱动副 R_{21} 串联 R_{22} 与 R_{23} 组成,它们轴线相互平行;支链C由 R_{12} 串联 R_{13} 组成,它们轴线相互平行。因此,混合支链I记为:(RPa^(4S)3R) \perp 2R。混合支链II为驱动副 R_{31} 串联 R_{32} 后,又串联由4个R副(R_e 、 R_f 、 R_g 、 R_h)组成的平行四边形结构($Pa^{(4R)}$),进一步再串联 R_{33} 组成, R_{31} 、 R_{32} 、 R_{33} 的轴线相互平行,因子串 $R_e \perp R_{32} \perp R_f$ 、 $R_g \perp R_{33} \perp R_h$ 分别等效于2个球副(S),因此,该平行四边形相当于4个球副组成的平行四边形,但不存在绕其对角线的转动,故混合支链II可记为:RPa。

该机构自由度为3,当取静平台0上的3个转动副 R_{11} 、 R_{21} 、 R_{31} 为驱动副时,动平台1可实现沿 x 、 y 、 z 轴的三维平移,且沿 y 、 z 轴向的位移仅由驱动副 R_{11} 、 R_{21} 确定,因而具有输入-输出部分运动解耦性^[23]。

2 刚度模型建立

2.1 单杆刚度矩阵

建立刚度模型时,可将单杆看作悬臂梁,通过分

析其末端变形求解刚度矩阵。在单杆受到力/力矩作用时,根据欧拉-伯努利梁理论,可得连杆的挠曲线方程,在弯曲变形很小且材料服从胡克定律的情况下,挠曲线方程是线性的,因此,考虑到连杆受力/力矩的耦合情况,采用叠加法计算连杆在力/力矩作用下的柔度矩阵,再对柔度矩阵求逆,即可得到单杆刚度矩阵为^[20,25]

$$K_{rod} = \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (1)$$

式中 G ——杨氏模量

I_x, I_y, I_z ——截面关于 x, y, z 轴的惯性矩

l ——单杆杆长

E ——弹性模量

A ——杆件截面积

式(1)是计算机各支链及整体刚度矩阵的基础。为便于后续表述和计算,将式中各元素的表达式分别记作 K_{ij} 。

2.2 4S 平行四边形结构刚度矩阵

平行四边形结构无法直接采用单杆的刚度矩阵进行计算,需要将其作为独立结构进行刚度建模。在4S平行四边形结构中,建立图2所示的局部坐标系,其中,平行四边形的两短杆可视为刚性构件,两长杆可视为悬臂梁。 o_1 点为四边形结构末端基点; x_1 轴方向与两短杆中点连线重合,指向 o_1 点; y_1 轴方向垂直于四边形平面向外, z_1 轴方向由右手法则确定。

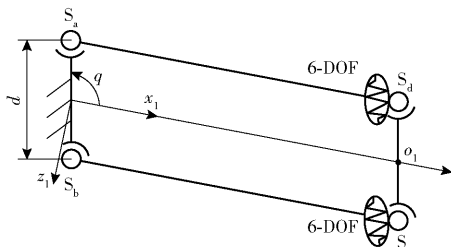


图2 4S 平行四边形结构的刚度模型

Fig.2 Stiffness model of 4S parallelogram structures

4S 四边形结构的刚度矩阵为

$$K_{II}^{4S} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{44}d^2S_q^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (2)$$

其中, S_q 表示 $\sin q$, 下同。

该平行四边形结构含有 S 副, 整体结构除了绕短杆 S_a, S_b 的转动和沿 z_1 轴的移动外, 对角线上的 2 个球副间也存在转动, 因此, x_1 轴方向的扭转刚度、 y_1 轴方向的线性刚度以及 z_1 轴方向的扭转刚度和线性刚度均受到被动副的补偿而消失, 只存在 y_1 轴方向的扭转刚度 $k_{44}d^2S_q^2/2$ 和 x_1 方向的线性刚度 $2k_{44}$; 其中, k_{44} 表示单杆刚度矩阵中的第 4 行第 4 列元素 EA/l , 下同。因此, 该 4S 四边形结构的末端可用 2-DOF 的虚拟弹簧来描述其刚度特性。

2.3 4R 平行四边形结构刚度矩阵

对于 4R 平行四边形结构, 局部坐标系建立方法同图 2, 如图 3 所示, 平行四边形的两短杆可视为刚性构件, 两长杆可视为悬臂梁。

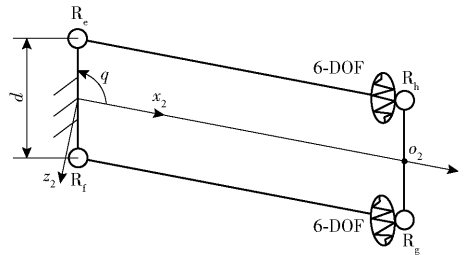


图3 4R 平行四边形结构的刚度模型

Fig.3 Stiffness model of 4R parallelogram structures

因此, 4R 四边形结构的刚度矩阵为

$$K_{II}^{4R} = 2 \begin{bmatrix} k_{11} + \frac{k_{55}d^2S_q^2}{4} & 0 & \frac{k_{55}d^2S_{2q}}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{44}d^2S_q^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{55}d^2S_{2q}}{8} & 0 & k_{33} + \frac{k_{55}d^2C_q^2}{4} & 0 & k_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{35} & 0 & k_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3)$$

其中, C_q 表示 $\cos q$ 。

因末端点 o_2 沿 z_2 方向的力受到被动副 R_c, R_f 与被动副 R_h, R_g 的补偿而消失, 因此, 该 4R 四边形

结构的末端可用 5-DOF 的虚拟弹簧来描述其刚度特性。

2.4 一般支链的刚度建模

2.4.1 运动方程的建立

一般支链通常由驱动副 (Ac)、主动杆、从动杆以及被动副组成,其虚拟弹簧模型如图 4 所示。

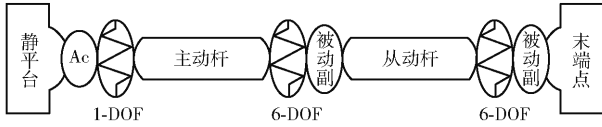


图 4 4R 一般支链的虚拟弹簧模型

Fig. 4 Virtual spring model of 4R branch chain

1-DOF 的虚拟弹簧,表示驱动副 Ac 的伺服刚度,其变形可表示为 $\Delta\theta_0$;6-DOF 的虚拟弹簧,表示杆件在笛卡尔坐标系中三自由度的旋转变形和三自由度的拉伸变形,主动杆和被动杆上弹簧的变形量可分别表示为 $(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_6)$ 和 $(\Delta\theta_7, \Delta\theta_8, \dots, \Delta\theta_{12})$ 。

基于图 4 给出支链中弹簧变形和被动关节变形到末端变形之间的一般性运动方程为

$$\Delta t = J_\theta^i \Delta\theta_i + J_\psi^i \Delta\psi_i \quad (4)$$

其中

$$\Delta t = [\Delta\varphi \quad \Delta p]^T$$

$$\Delta\varphi = [\Delta\varphi_x \quad \Delta\varphi_y \quad \Delta\varphi_z]^T$$

$$\Delta p = [\Delta p_x \quad \Delta p_y \quad \Delta p_z]^T$$

$$\Delta\theta_i = [\Delta\theta_{ac}^i \quad \Delta\theta_1^i \quad \dots \quad \Delta\theta_m^i]^T$$

$$\Delta\psi_i = [\Delta\psi_1^i \quad \Delta\psi_2^i \quad \dots \quad \Delta\psi_q^i]^T$$

式中 Δt ——静笛卡尔坐标系中机构末端变形

$\Delta\varphi$ ——旋转变形 Δp ——拉伸变形

$\Delta\theta_{ac}^i$ ——支链 i 中驱动关节处虚拟弹簧的变形

$\Delta\theta_m^i$ ——支链 i 中所有虚拟弹簧的第 m 个自由度的弹性变形

$\Delta\psi_q^i$ ——支链 i 中第 q 个被动运动副的运动量

J_θ^i ——第 i 条支链中虚拟弹簧的弹性变形 $\Delta\theta_i$ 到末端变形 Δt 的映射

J_ψ^i ——支链 i 中被动副的运动 $\Delta\psi_i$ 到末端变形 Δt 的映射

将式(4)的支链运动方程表示成螺旋运动形式,即

$$\mathcal{S} = J_\theta^i \Delta\theta_i + J_\psi^i \Delta\psi_i \quad (5)$$

其中 $J_\theta^i = [\hat{\mathcal{S}}_{\theta ac}^i \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta 1}^i \quad \dots \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta m}^i]$

$$J_\psi^i = [\hat{\mathcal{S}}_{\psi 1}^i \quad \hat{\mathcal{S}}_{\psi 2}^i \quad \dots \quad \hat{\mathcal{S}}_{\psi q}^i]$$

式中 \mathcal{S} ——机构末端参考点变形的旋量

$\Delta\theta_i$ ——虚拟弹簧变形量

$\Delta\psi_i$ ——被动副运动位移

$\hat{\mathcal{S}}_{\theta ac}^i$ ——末端关于驱动关节上弹簧的单位螺旋

$\hat{\mathcal{S}}_{\psi q}^i$ ——支链末端参考点相对于被动副的单位螺旋

2.4.2 静力学方程的建立

假设支链 i 末端所受的外力/力矩为 f_i ;虚拟弹簧所受的力/力矩为 τ_θ^i ;支链末端、虚拟弹簧及被动副处产生的无限小位移分别为 δt_i 、 $\delta\theta_i$ 和 $\delta\psi_i$,则式(4)可表示为

$$\delta t_i = J_\theta^i \delta\theta_i + J_\psi^i \delta\psi_i \quad (6)$$

因此,外力 f_i 所做虚功为

$$f_i^T \delta t_i = (f_i^T J_\theta^i) \delta\theta_i + (f_i^T J_\psi^i) \delta\psi_i \quad (7)$$

由于支链中各构件所受的约束力与虚拟弹簧所受力的大小相同,方向相反,因此,支链中约束力所做虚功为 $-\tau_\theta^{iT} \delta\theta_i$,由虚功原理可得

$$(f_i^T J_\theta^i) \delta\theta_i + (f_i^T J_\psi^i) \delta\psi_i - \tau_\theta^{iT} \delta\theta_i = 0 \quad (8)$$

而被动关节受力后会发生被动运动,所以在静平衡状态下,被动运动不做功,即

$$J_\psi^{iT} f_i = 0 \quad (9)$$

由式(8)、(9)可得

$$J_\theta^{iT} f_i = \tau_\theta^i \quad (10)$$

令关节空间刚度矩阵为 K_θ^i ,则有

$$K_\theta^{i-1} \tau_\theta^i = \Delta\theta_i \quad (11)$$

于是,支链的静力平衡方程可表示为

$$\begin{bmatrix} S_\theta^i & J_\psi^i \\ J_\psi^{iT} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ \Delta\psi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中

$$S_\theta^i = J_\theta^i K_\theta^{i-1} J_\theta^{iT}$$

令支链 i 的笛卡尔刚度矩阵为 K_i ,则有

$$f_i = K_i \Delta t \quad (13)$$

式中 f_i ——支链 i 所受的外力

由式(12)、(13)可得

$$\begin{bmatrix} K_i & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_\theta^i & J_\psi^i \\ J_\psi^{iT} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

由于每条支链所受外力为机构整体所受外力的分量,因此,一般整体的刚度矩阵为

$$K = \sum_{i=1}^n K_i \quad (15)$$

2.5 机构的刚度建模

该三平移并联机构由 2 条 HSOC 构成,其支链拓扑结构简化后如图 5 所示。

2.5.1 HSOC I 的刚度建模

HSOC I 由支链 A、B 并联组成子并联机构后再串联支链 C 组成,因此,先分别求出支链 A、B 的刚度矩阵,即可求得子并联机构的刚度矩阵;再将它看成一个整体与支链 C 串联进行刚度建模,即可得到

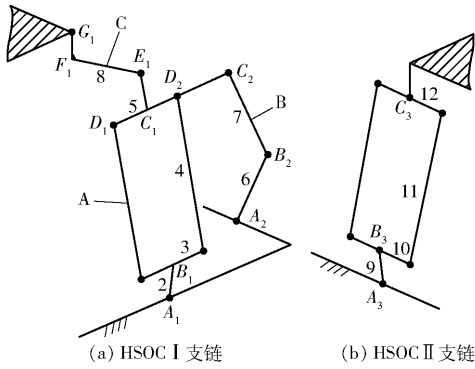


图5 机构的支链拓扑结构简图

Fig.5 Schematics of branch chain

HSOC I 的刚度矩阵。

(1) 支链 A 的刚度矩阵

支链 A 的刚度模型如图 6 所示,其中,驱动副 (Ac) 对应笛卡尔坐标系中 1 个旋转自由度的虚拟弹簧变形;主动杆杆 2 对应笛卡尔坐标系中 6 个自由度的虚拟弹簧变形,包含 3 个旋转变形和 3 个线性变形;4S 平行四边形结构对应笛卡尔坐标系中 2 个自由度的虚拟弹簧(2.2 节)。在支链 A 中,所有被动副均在 4S 平行四边形结构内,可将其看成整体结构,因此,可认为支链 A 不包含被动副。

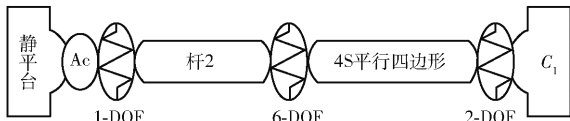


图6 支链 A 的虚拟弹簧模型

Fig.6 Virtual spring model of branch chain A

由式(12)、(14)可得支链 A 的静力方程为

$$f_A = [J_\theta^A (K_\theta^A)^{-1} (J_\theta^A)^T]^{-1} \mathcal{F}_{C_1} = K_A \mathcal{F}_{C_1}$$

其中

$$K_\theta^A = \text{diag}[K_{Ac1} \quad K_{rod} \quad K_{II}^{4S}]$$

$$J_\theta^A = [\hat{\mathcal{S}}_{\theta_0}^A \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_1}^A \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_2}^A \quad \dots \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_8}^A]$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\theta_0}^A = \begin{bmatrix} e_A \\ (A_1 - C_1) \times e_A \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_1}^A = \begin{bmatrix} u_A \\ (B_1 - C_1) \times u_A \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\theta_2}^A = \begin{bmatrix} v_A \\ (B_i - C_1) \times v_A \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_3}^A = \begin{bmatrix} w_A \\ (B_1 - C_1) \times w_A \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\theta_4}^A = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (B_1 - C_1) \times u_A \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_5}^A = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (B_1 - C_1) \times v_A \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\theta_6}^A = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (B_1 - C_1) \times w_A \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_7}^A = \begin{bmatrix} v'_A \\ O_{3 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\theta_8}^A = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ u'_A \end{bmatrix} \quad e_A = [-1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$u_A = \frac{B_1 - A_1}{\|B_1 - A_1\|} \quad v_A = \frac{u_A \times e_A}{\|u_A \times e_A\|} \quad w_A = \frac{u_A \times v_A}{\|u_A \times v_A\|}$$

$$u'_A = \frac{C_1 - B_1}{\|C_1 - B_1\|} \quad v'_A = \frac{u'_A \times e_A}{\|u'_A \times e_A\|} \quad w'_A = \frac{u'_A \times v'_A}{\|u'_A \times v'_A\|}$$

式中 K_A ——支链 A 的刚度矩阵

K_{Ac} ——驱动刚度

(2) 支链 B 的刚度矩阵

支链 B 的刚度模型如图 7 所示,其中,驱动副 (Ac) 对应笛卡尔坐标系中 1 个旋转自由度的虚拟弹簧变形;主动杆杆 6 和从动杆杆 7 各对应笛卡尔坐标系中 6 个自由度的虚拟弹簧变形。

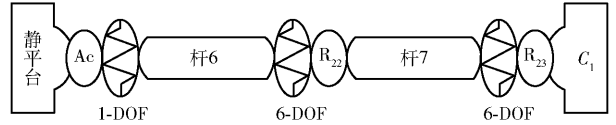


图7 支链 B 的虚拟弹簧建模图

Fig.7 Virtual spring model of branch chain B

由式(12)、(14)可得支链 B 的静力方程为

$$\begin{bmatrix} f_B \\ O_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\theta^B (K_\theta^B)^{-1} (J_\theta^B)^T & J_\psi^B \\ (J_\psi^B)^T & O_{2 \times 2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{C_1} \\ O_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_B & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{C_1} \\ O_{2 \times 1} \end{bmatrix}$$

其中

$$K_\theta^B = \text{diag}[K_{Ac2} \quad K_{rod1} \quad K_{rod2}]$$

$$J_\theta^B = [\hat{\mathcal{S}}_{\theta_0}^B \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_1}^B \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_2}^B \quad \dots \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_{12}}^B]$$

$$J_\psi^B = [\hat{\mathcal{S}}_{\psi_1}^B \quad \hat{\mathcal{S}}_{\psi_2}^B]$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\theta_0}^B = \begin{bmatrix} e_B \\ (A_2 - C_1) \times e_B \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_1}^B = \begin{bmatrix} u_B \\ (B_2 - C_1) \times u_B \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\theta_2}^B = \begin{bmatrix} v_B \\ (B_2 - C_1) \times v_B \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_3}^B = \begin{bmatrix} w_B \\ (B_2 - C_1) \times w_B \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\theta_4}^B = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (B_2 - C_1) \times u_B \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_5}^B = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (B_2 - C_1) \times v_B \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\theta_6}^B = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (B_2 - C_1) \times w_B \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_7}^B = \begin{bmatrix} u'_B \\ (C_2 - C_1) \times u'_B \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\theta_8}^B = \begin{bmatrix} v'_B \\ (C_2 - C_1) \times v'_B \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_9}^B = \begin{bmatrix} w'_B \\ (C_2 - C_1) \times w'_B \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\theta_{10}}^B = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (C_2 - C_1) \times u'_B \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\theta_{11}}^B = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (C_2 - C_1) \times v'_B \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\theta_{12}}^B = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (C_2 - C_1) \times w'_B \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\psi_1}^B = \begin{bmatrix} e_B \\ (B_2 - C_1) \times e_B \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{\psi_2}^B = \begin{bmatrix} e_B \\ (C_2 - C_1) \times e_B \end{bmatrix}$$

$$e_B = [0 \quad -1 \quad 0]^T$$

$$u_B = \frac{B_2 - A_2}{\|B_2 - A_2\|} \quad v_B = \frac{u_B \times e_B}{\|u_B \times e_B\|}$$

$$w_B = \frac{u_B \times v_B}{\|u_B \times v_B\|} \quad u'_B = \frac{C_2 - B_2}{\|C_2 - B_2\|}$$

$$v'_B = \frac{u'_B \times e_B}{\|u'_B \times e_B\|} \quad w'_B = \frac{u'_B \times v'_B}{\|u'_B \times v'_B\|}$$

式中 K_B ——支链 B 刚度矩阵

在求得支链 A 和 B 的刚度矩阵后,由式(15)可得子并联结构的整体刚度矩阵为

$$K_{sub} = K_A + K_B$$

(3)混合支链的刚度矩阵

将支链 A、B 组成的子并联机构看成一个整体与支链 C 串联进行刚度建模,混合支链的刚度模型如图 8 所示,其中,从动杆杆 8 对应笛卡尔坐标系中 6 个自由度的虚拟弹簧变形;杆 C_1E_1 、 F_1G_1 因杆长远短于其他杆件,因此,将它们看作刚性构件,不考虑在其末端建立虚拟弹簧。

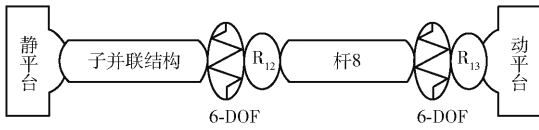


图 8 HSOC I 的虚拟弹簧模型

Fig. 8 Virtual spring modeling of HSOC I

由式(12)、(14)可得 HSOC I 的静力方程为

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ O_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\theta^1 (K_\theta^1)^{-1} (J_\theta^1)^T & J_\psi^1 \\ (J_\psi^1)^T & O_{2 \times 2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \$p \\ O_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \$p \\ O_{2 \times 1} \end{bmatrix}$$

其中

$$K_\theta^1 = \text{diag}[K_{sub}, K_{rod3}]$$

$$J_\theta^1 = [\hat{\$}_{\theta_1}^1 \quad \hat{\$}_{\theta_2}^1 \quad \hat{\$}_{\theta_3}^1 \quad \dots \quad \hat{\$}_{\theta_{12}}^1]$$

$$J_\psi^1 = [\hat{\$}_{\psi_1}^1 \quad \hat{\$}_{\psi_2}^1]$$

$$\hat{\$}_{\theta_1}^1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ (C_1 - p) \times e_1 \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\theta_2}^1 = \begin{bmatrix} e_2 \\ (C_1 - p) \times e_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{\theta_3}^1 = \begin{bmatrix} e_3 \\ (C_1 - p) \times e_3 \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\theta_4}^1 = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (C_1 - p) \times e_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{\theta_5}^1 = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (C_1 - p) \times e_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\theta_6}^1 = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (C_1 - p) \times e_3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{\theta_7}^1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ (F - p) \times u_1 \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\theta_8}^1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ (F - p) \times w_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{\theta_9}^1 = \begin{bmatrix} e_3 \\ (F - p) \times e_3 \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\theta_{10}}^1 = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (F - p) \times u_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{\theta_{11}}^1 = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (F - p) \times w_1 \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\theta_{12}}^1 = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (F - p) \times e_3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{\psi_1}^1 = \begin{bmatrix} e_3 \\ (E_1 - p) \times e_3 \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\psi_2}^1 = \begin{bmatrix} e_3 \\ (G_1 - p) \times e_3 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = [1 \ 0 \ 0]^T \quad e_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$$

$$e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$u_1 = \frac{F - E}{\|F - E\|} \quad w_1 = \frac{u_1 \times e_1}{\|u_1 \times e_1\|}$$

式中 K_1 ——混合支链 I 的刚度矩阵

2.5.2 HSOC II 的刚度建模

HSOC II 的刚度模型如图 9 所示,其中,驱动副 (Ac) 对应笛卡尔坐标系中 1 个旋转自由度的虚拟弹簧变形;主动杆杆 6 对应笛卡尔坐标系中 6 个自由度的虚拟弹簧变形;4R 平行四边形结构对应笛卡尔坐标系中 5 个自由度的虚拟弹簧(由 2.3 节说明)。被动副 R_{32} 、 R_{33} 各存在 1 个自由度的微小变形。

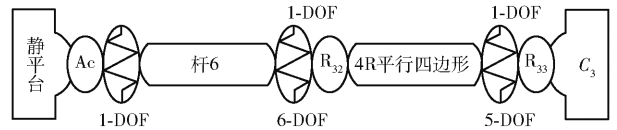


图 9 HSOC II 的虚拟弹簧建模

Fig. 9 Virtual spring modeling of HSOC II

由式(12)、(14)可得 HSOC II 的静力方程为

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ O_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\theta^1 (K_\theta^1)^{-1} (J_\theta^1)^T & J_\psi^1 \\ (J_\psi^1)^T & O_{2 \times 2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \$p \\ O_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \$p \\ O_{2 \times 1} \end{bmatrix}$$

其中

$$K_{\theta_2} = \text{diag}[K_{Ac3}, K_{rod1}, K_{II}^{4R}]$$

$$J_\theta^2 = [\hat{\$}_{\theta_0}^2 \quad \hat{\$}_{\theta_1}^2 \quad \hat{\$}_{\theta_2}^2 \quad \dots \quad \hat{\$}_{\theta_{11}}^2]$$

$$J_\psi^2 = [\hat{\$}_{\psi_1}^2 \quad \hat{\$}_{\psi_2}^2]$$

$$\hat{\$}_{\theta_0}^2 = \begin{bmatrix} e_2 \\ (A_3 - C_3) \times e_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\theta_1}^2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ (B_3 - C_3) \times u_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{\theta_2}^2 = \begin{bmatrix} v_2 \\ (B_3 - C_3) \times v_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\theta_3}^2 = \begin{bmatrix} w_2 \\ (B_3 - C_3) \times w_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{\theta_4}^2 = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (B_3 - C_3) \times u_A \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\theta_5}^2 = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (B_3 - C_3) \times v_A \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{\theta_6}^2 = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ (B_3 - C_3) \times w_A \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{\theta_7}^2 = \begin{bmatrix} u'_2 \\ O_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\theta_7}^2 = \begin{bmatrix} v'_2 \\ O_{3 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{\theta_7}^2 = \begin{bmatrix} w'_2 \\ O_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\theta_8}^2 = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ u'_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\theta_8}^2 = \begin{bmatrix} O_{3 \times 1} \\ v'_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{\psi_1}^2 = \begin{bmatrix} e_2 \\ (B_3 - C_3) \times e_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{\psi_2}^2 = \begin{bmatrix} e_2 \\ O_{3 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{B_3 - A_3}{\|B_3 - A_3\|} \quad v_2 = \frac{u_2 \times e_2}{\|u_2 \times e_2\|}$$

$$w_2 = \frac{u_2 \times v_2}{\|u_2 \times v_2\|} \quad u'_2 = \frac{C_3 - B_3}{\|C_3 - B_3\|}$$

$$v'_2 = \frac{u'_2 \times e_2}{\|u'_2 \times e_2\|} \quad w'_2 = \frac{u'_2 \times v'_2}{\|u'_2 \times v'_2\|}$$

式中 K_2 ——混合支链 II 的刚度矩阵

由式 (15) 可得机构的整体刚度为

$$K = K_1 + K_2$$

3 刚度分析

3.1 机构参数

机构各杆件的尺寸参数如表 1 所示。为了减轻机构质量,提高机构强度,机构杆件全部选择碳纤维材料。机构 3 个驱动输入采用相同的驱动电机,其驱动刚度取为 $5 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ 。

表 1 机构杆件尺寸参数

Tab. 1 Dimension parameters of mechanism

类型	杆长/m	直径/m	弹性模量/MPa
L_1	0.35	0.05	2.1×10^5
L_2	0.8	0.03	
L_3	0.5	0.02	

3.2 数值算例

根据第 2 节中的刚度矩阵建模,可计算出机构在某一姿态下的整体静刚度矩阵。现取动平台基点 p 的坐标为 $(0.02, 0.03, 0.8)$, 可得该姿态下机构的整体刚度为

$$K =$$

$$\begin{bmatrix} 1.2381 & 0.0117 & 0.1838 & 0.0601 & 1.4533 & 0.2267 \\ 0.0117 & 0.0198 & 0 & 0 & 0.0065 & 0.0714 \\ -0.1838 & 0 & 0.0397 & 0 & -0.2262 & 0.0024 \\ 0.0601 & 0 & 0 & 0.2639 & 0.2485 & -0.2434 \\ 1.4533 & 0.0065 & -0.2262 & 0.2485 & 2.1861 & -0.3311 \\ 0.2207 & 0.0715 & 0.0023 & -0.2435 & -0.3311 & 3.4502 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$(16)$$

可知刚度矩阵 K 为 6×6 方阵,其中,对角线前 3 项为机构在 x, y, z 轴方向的扭转刚度(单位: $\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$);后 3 项为机构在 x, y, z 轴方向的线性刚度(单位: N/m)。

机构在运动过程中,刚度随着机构末端基点位置的变化而变化,为研究其分布规律,定义刚度矩阵中对角线上 6 项数值的平均值 $\eta^{[24]}$, 即

$$\eta = \frac{K_{11} + K_{22} + K_{33} + K_{44} + K_{55} + K_{66}}{6} \quad (17)$$

利用 Matlab 软件计算 η 在机构工作空间中的分布,如图 10 所示。

由图 10 可知,当动平台在 y 轴方向上越靠近两侧时,机构的整体刚度越大;为更加清晰地分析 z 轴方向对机构整体刚度的影响,利用 Matlab 软件计算机构工作空间中 $z = 0.75 \text{ m}$ 和 $z = 0.90 \text{ m}$ 两截面的

η 分布,如图 11 所示。

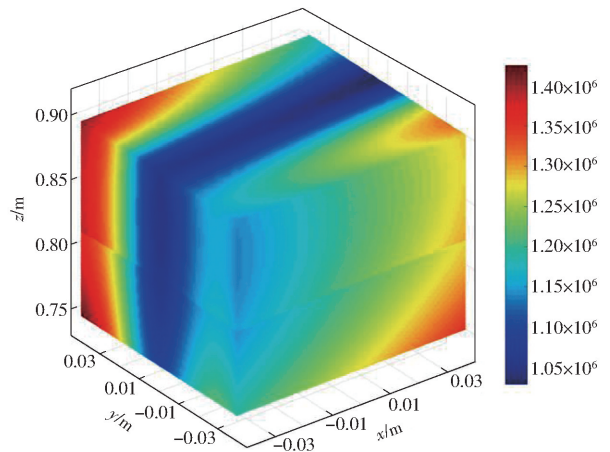


图 10 工作空间中机构的刚度分布

Fig. 10 Stiffness distribution of mechanism

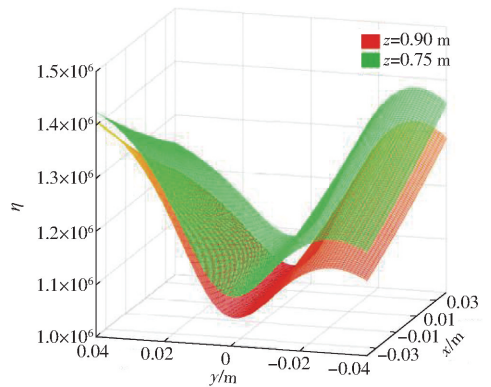


图 11 不同 z 值截面的机构刚度分布

Fig. 11 Stiffness distribution of mechanism with different z sections

由图 11 可知,动平台在不同高度下,刚度变化趋势相似;但随着 z 的减小,机构整体刚度变大。

为了更加具体地分析刚度矩阵中各方向的扭转刚度和线性刚度的分布情况,取机构工作空间中 $z = 0.75 \text{ m}$ 和 $z = 0.90 \text{ m}$ 两截面进行分析,如图 12 所示。

由图 12 可知,机构 x 轴方向的扭转刚度最大, y, z 轴方向的扭转刚度相近,原因为支链 B 不能绕 x 轴方向旋转,因此, x 轴方向的扭转刚度高于其他两轴方向。 z 轴方向的线性刚度最大,原因为该类机械手在工作时,其所受的外部线性载荷主要由 z 轴方向承担,因此,需要 z 轴方向有较大的线性刚度。刚度特性均随着 z 的减小而增大,说明机构动平台离定平台越近,刚度越大,因此,只要机械手在刚抓取物件时不发生变形,则在其向上提升物件的运送过程中,机构也不会变形,这一特性符合机械臂的抓取性能需要。

3.3 数值验证

为了验证数值算例的正确性,现将该机构的简

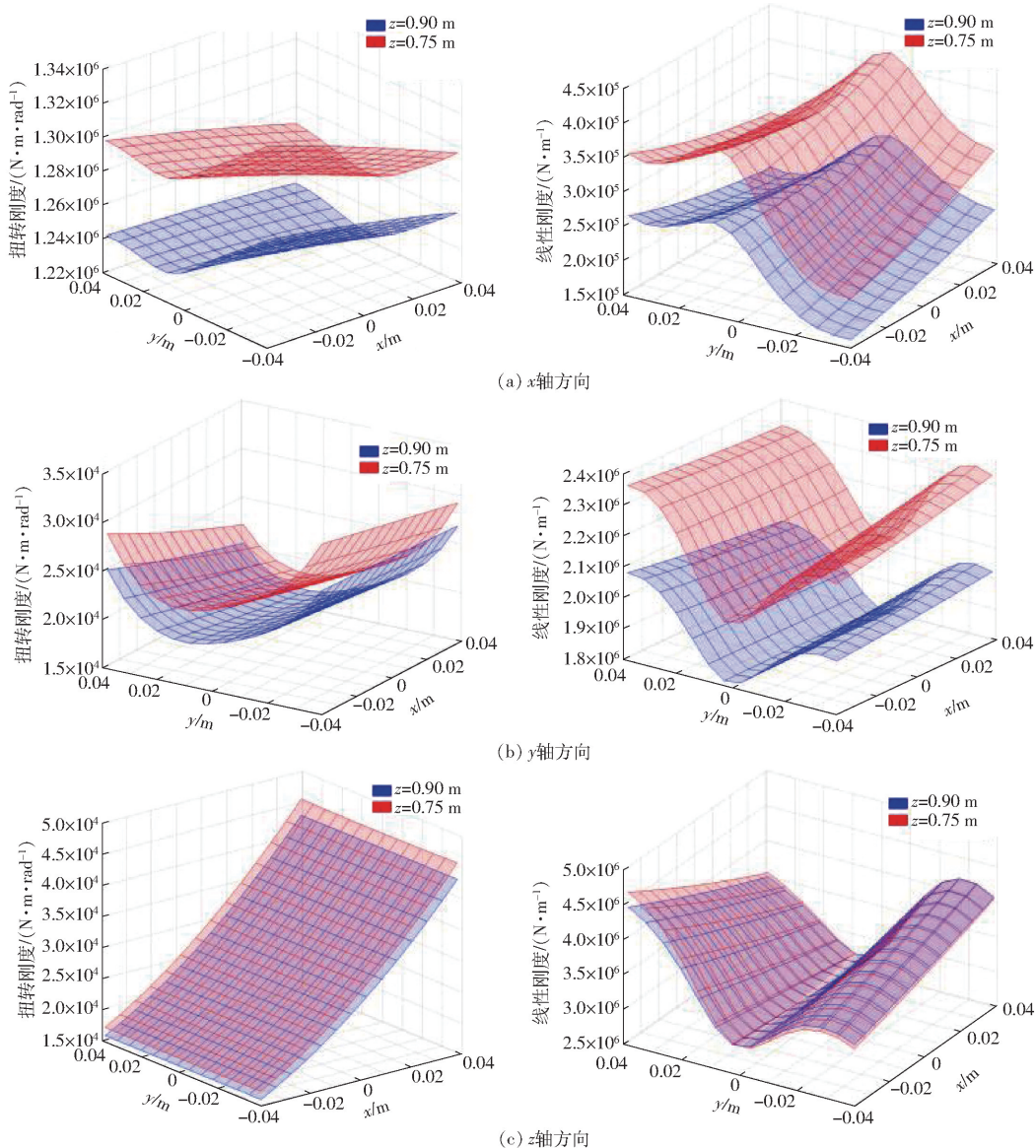


图 12 不同 z 值截面的刚度矩阵主对角线元素分布情况

Fig. 12 Distributions of main diagonal elements of stiffness matrix with different z-sections

化模型导入 ANSYS Workbench, 进行有限元分析 (FEA)。当机构末端基点 p 的位置坐标为 (0.02, 0.03, 0.8) m 时, 在动平台上施加单位力、力矩, 将动平台看作刚性无限大的柔性构件, 对机构进行刚柔耦合分析, 网格划分如图 13a 所示; 考虑约束和受

力, 如图 13b 所示。由此得到动平台相对于静坐标系各个方向产生的微小位姿变化, 其值分别对应虚拟弹簧法 (VSM) 中所得刚度矩阵的逆矩阵中对角线上 6 个元素的数值。

对式 (16) 求逆, 可得机构的柔度矩阵为

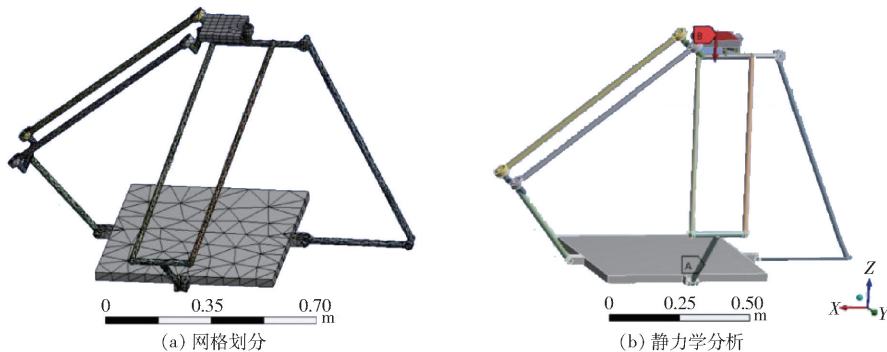


图 13 机构的刚柔耦合分析

Fig. 13 Rigid-flexible coupling analysis of mechanism

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0646 & -0.0019 & 0.1004 & 0.0118 & -0.0349 & -0.0067 \\ -0.0019 & 0.5520 & -0.0344 & -0.0064 & -0.0050 & -0.0122 \\ 0.1004 & -0.0344 & 0.9066 & -0.0625 & 0.0332 & -0.0076 \\ 0.0118 & -0.0064 & -0.0625 & 0.0559 & -0.0205 & 0.0014 \\ -0.0349 & -0.0050 & 0.0332 & -0.0205 & 0.0342 & 0.0041 \\ -0.0067 & -0.0122 & -0.0076 & 0.0014 & 0.0041 & 0.0041 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

将有限元分析所得的机构变形结果与虚拟弹簧法所得的机构变形结果进行对比,并得到其相对误差,如表2所示。

由表2可知,理论变形与仿真变形的误差在-6%内。因此,虚拟弹簧法的建模精度满足工程设计要求。

表2 末端参考点变形比较

Tab.2 Deformation comparison of end reference point

方法	$\Delta\varphi_x/\text{rad}$	$\Delta\varphi_y/\text{rad}$	$\Delta\varphi_z/\text{rad}$	$\Delta p_x/\text{m}$	$\Delta p_y/\text{m}$	$\Delta p_z/\text{m}$
VSM	6.462×10^{-6}	5.520×10^{-5}	9.066×10^{-5}	5.591×10^{-6}	3.423×10^{-6}	4.136×10^{-7}
FEA	6.718×10^{-6}	5.712×10^{-5}	9.363×10^{-5}	5.912×10^{-6}	3.631×10^{-6}	4.372×10^{-7}
误差/%	-3.81	-3.36	-3.17	-5.43	-5.73	-5.40

4 (RPa//3R)2R + RPa 与 Delta 机构的刚度比较

将三平移(RPa//3R)2R + RPa机构与Delta机构进行刚度比较,两者选取相同的机构参数(3.1节),取工作空间中 $z_1 = 0.85 \text{ m}$ 、 $z_2 = 0.80 \text{ m}$ 、 $z_3 =$

0.75 m处的3个截面进行研究。

根据文献[25]中Delta机构的运动学反解,使用Matlab编程,得到3个截面中两机构的刚度参数 η 在 $x \in [-0.04, 0.04] \text{ m}$ 、 $y \in [-0.04, 0.04] \text{ m}$ 范围内的分布,及其在 xoy 平面的投影,如图14所示。

由图14可知,(RPa//3R)2R + RPa机构与

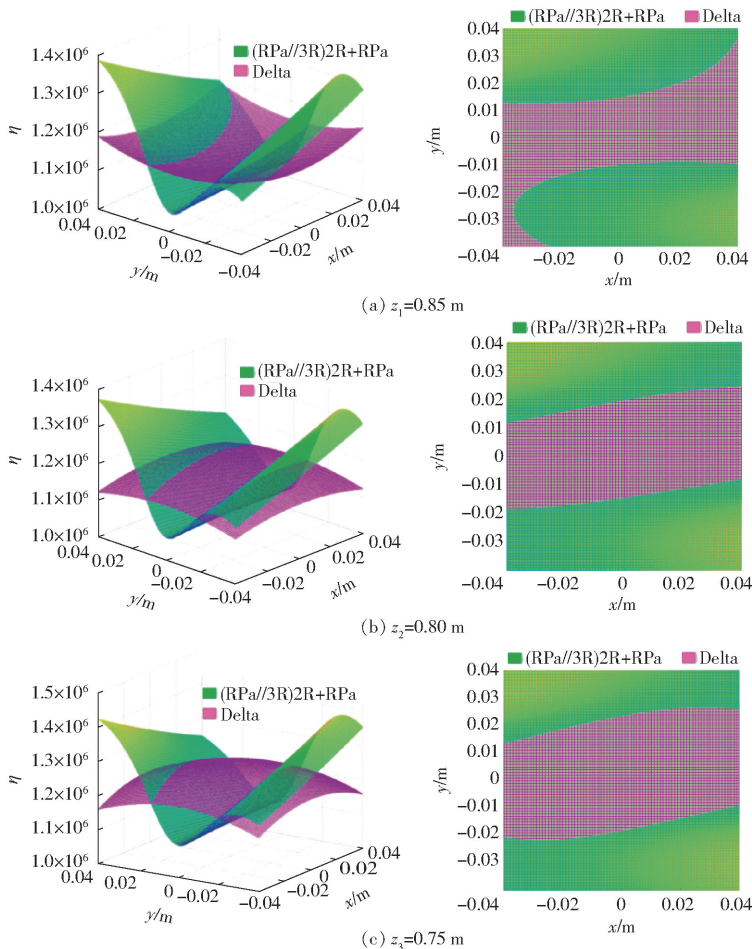


图14 两机构的 η 值分布

Fig.14 η distributions of two mechanisms

Delta 机构,在 y 轴方向上越靠近两侧时,机构的整体刚度越大。Delta 机构的刚度分布曲面更为规则且刚度变化更为平稳。(RPa//3R)2R + RPa 机构的刚度大于 Delta 机构的部分在 z_1 、 z_2 、 z_3 截面中所占的面积(图中绿色部分)分别为 60.54%、58.69%、56.37%(由划分网格的面积估算),均大于 50%,因此,可得 (RPa//3R)2R + RPa 机构的刚度较大于 Delta 机构。

5 结论

(1) 运用虚拟弹簧法对 (RPa//3R)2R + RPa 三平移机构进行刚度建模,得到了该机构笛卡尔空间的刚度矩阵。

(2) 给出了该机构在工作空间中的整体刚度分布,并分别对 x 、 y 、 z 轴方向的扭转、线性刚度进行分析。结果表明:机构 x 轴方向的扭转刚度最大, y 、 z 轴方向的扭转刚度相近, z 轴方向的线性刚度最大;机构动平台与定平台距离越近,刚度性能越稳定。

(3) 对机构变形进行有限元分析,并与虚拟弹簧法所得机构变形结果进行对比,结果表明,理论变形与仿真变形的误差在 -6% 内,验证了虚拟弹簧法所得刚度结果的正确性。

(4) (RPa//3R)2R + RPa 和 Delta 机构的刚度特性对比表明,Delta 机构的刚度分布曲面更为规则,且刚度变化更为平稳,(RPa//3R)2R + RPa 的刚度大于 Delta 机构。

参 考 文 献

- [1] GOSSELIN C M. Stiffness mapping for parallel manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990,6(3): 377-382.
- [2] ALICI G, SHIRINZADEH B. Enhanced stiffness modelings[J]. Identification and Characterization for Robot Manipulators, Proceedings of IEEE Transactions on Robotics, 2005,21(4): 554-564.
- [3] MAJOU F, GOSSELIN C M, WENGER P, et al. Parametric stiffness analysis of the orthoglide[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007,42: 296-311.
- [4] VERTECHY R, PARENTI-CASTELLI V. Static and stiffness analyses of a class of over-constrained parallel manipulators with legs of type US and UPS[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2007: 561-567.
- [5] QUENNOUELLE C, GOSSELIN C M. Stiffness matrix of compliant parallel mechanisms[M]//Advances in Robot Kinematics: Analysis and Design. Springer Netherlands, 2008.
- [6] SEBASTIEN K, COMPANY O, CORADINI C, et al. Evaluation of a 4 degree of freedom parallel manipulator stiffness[C]//IFTOMM International Federation for the Promotion of Mechanism & Machine Science, 2004: 1857-1861.
- [7] RIZK R, FAUROUX J C, MUNTEANU M, et al. A comparative stiffness analysis of a reconfigurable parallel machine with three or four degrees of mobility[J]. Journal of Machine Engineering, 2006,6(2): 45-55.
- [8] FERNANDEZ_BUSTOS I, AGIRREBEITIA J, AJURIA G, et al. A new finite element to represent prismatic joint constraints in mechanisms[J]. Finite Elements in Analysis & Design, 2007,43(1): 36-50.
- [9] DEBLAISE D, HERNOT X, MAURINE P. A systematic analytical method for PKM stiffness matrix calculation[C]//Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Orlando, 2006: 4213-4219.
- [10] GAEL E, NEUGEBAUER R, MAURINE P. Elasto-geometrical modeling and calibration of redundantly actuated PKMs original research article[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010,45: 795-810.
- [11] 胡波, 路懿. 求解 3-RPS 并联机构刚度的新方法[J]. 机械工程学报, 2010,46(1): 24-29.
HU Bo, LU Yi. New approach for analyzing the stiffness of 3-RPS parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010,46(1): 24-29. (in Chinese)
- [12] 徐东涛, 孙志礼, 于晓光. 考虑杆件弹性变形的改进型 Delta 并联机构刚度特性分析[J/OL]. 农业机械学报, 2013, 44(5): 294-298.
XU Dongtao, SUN Zhili, YU Xiaoguang. Stiffness characteristic analysis of modified Delta parallel mechanism based on bars' elastic deformation[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(5): 294-298. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20130551&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2013.05.051. (in Chinese)
- [13] 曲海波, 梁艺瀚, 方跃法. 4-RRS 冗余球面并联机构的静力学与刚度分析[J]. 机械工程学报, 2015,51(11): 8-15.
QU Haibo, LIANG Yihan, FANG Yuefa. Statics and stiffness analysis of 4-RRS redundant spherical parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015,51(11): 8-15. (in Chinese)
- [14] 周玉林, 高峰. 3-RRR 3 自由度球面并联机构静刚度分析[J]. 机械工程学报, 2009,45(4): 25-32.
ZHOU Yulin, GAO Feng. Stiffness analysis of spherical parallel mechanism 3-RRR with 3-DOF[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009,45(4): 25-32. (in Chinese)
- [15] 杨超, 叶伟, 张克涛, 等. 2UPR-RPU 过约束并联机构刚度性能评价[J/OL]. 农业机械学报, 2020,51(2): 392-401.
YANG Chao, YE Wei, ZHANG Ketao, et al. Stiffness performance evaluation of 2UPR-RPU over-constrained parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020,51(2): 392-401. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=2002043&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2020.02.043. (in Chinese)
- [16] CECCARELLI M, CARBONE G. A stiffness analysis for CaPaMan (cassion parallel manipulator)[J]. Mechanism and

- Machine Theory, 2002, 37(5): 427–439.
- [17] PASHKEVICH A, CHABLAT D, WENGER P. Stiffness analysis of overconstrained parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 44: 966–982.
- [18] YAN S J, ONG S K, NEE A Y C. Stiffness analysis of parallelogram-type parallel manipulators using a strain energy method [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2016, 37: 13–22.
- [19] WU Guanglei, BAI Shaoping, HJORNET Preben. On the stiffness of three/four degree-of-freedom parallel pick-and-place robots with four identical limbs [C] // 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA) Stockholm, 2016.
- [20] 王一熙, 吴广磊, 沈惠平, 等. 半对称三平移 Delta-CU 并联机构的刚度建模与分析[J]. 中国机械工程, 2019, 12(9): 75–85.
WANG Yixi, WU Guanglei, SHEN Huiping, et al. Stiffness modeling and analysis of semi-symmetric three-translation Delta-CU parallel mechanism[J]. Chinese Mechanical Engineering, 2019, 12(9): 75–85. (in Chinese)
- [21] 李家宇, 沈惠平, 孟庆梅, 等. 一种 Delta 变形机构及其基于工作空间分析的尺度设计[J]. 机械设计, 2018, 35(7): 92–98.
LI Jiayu, SHEN Huiping, MENG Qingmei, et al. A Delta derived mechanism and its scale design based on working space analysis[J]. Journal of Machine Design, 2018, 35(7): 92–98. (in Chinese)
- [22] 沈惠平, 吴成琦, 许可, 等. 一种零耦合度且运动解耦的非对称三平移并联机构——设计及运动学[J]. 中国机械工程, 2019, 30(6): 658–664.
SHEN Huiping, WU Chenqi, XU Ke, et al. Design and kinematics of 3-translation parallel mechanisms with zero coupling degree[J]. Chinese Mechanical Engineering, 2019, 30(6): 658–664. (in Chinese)
- [23] 王一熙. 一种新型 SCARA 并联机构的运动学、刚度及动力学分析[D]. 常州: 常州大学, 2019.
WANG Yixi. Kinematics, stiffness and dynamics analysis of a new SCARA parallel mechanism[D]. Changzhou: Changzhou University, 2019. (in Chinese)
- [24] 许正骁. 三平移—转动并联操作手的设计与分析[D]. 常州: 常州大学, 2019.
XU Zhengxiao. Design and analysis of the parallel manipulator with three translation and one rotation [D]. Changzhou: Changzhou University, 2019. (in Chinese)
- [25] 朱伟, 郭倩, 马致远, 等. SCARA 并联机构刚度和动力学分析[J/OL]. 农业机械学报, 2019, 50(10): 376–385.
ZHU Wei, GUO Qian, MA Zhiyuan, et al. Stiffness and dynamics analysis of SCARA parallel mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(10): 376–385. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20191044&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2019.10.044. (in Chinese)

(上接第 317 页)

- [22] 高德才, 张蕾, 刘强, 等. 旱地土壤施用生物炭减少土壤氮损失及提高氮素利用率[J]. 农业工程学报, 2014, 30(6): 54–61.
GAO Decai, ZHANG Lei, LIU Qiang, et al. Application of biochar in dryland soil decreasing loss of nitrogen and improving nitrogen using rate[J]. Transactions of the CSAE, 2014, 30(6): 54–61. (in Chinese)
- [23] BROOKS P, STARK J M, MCINTEER B, et al. Diffusion method to prepare soil extracts for automated nitrogen-15 analysis [J]. Soil Science Society of America Journal, 1989, 53(6): 1707–1711.
- [24] 温腾, 曹亚澄, 张佩仪, 等. 微扩散法测定铵态氮、硝态氮的¹⁵N 稳定同位素研究综述[J]. 土壤, 2016, 48(4): 634–640.
WEN Teng, CAO Yacheng, ZHANG Peiyi, et al. On progress in use of micro-diffusion method in $\delta^{15}\text{N-NH}_4^+$ and $\delta^{15}\text{N-NO}_3^-$ measurements[J]. Soils, 2016, 48(4): 634–640. (in Chinese)
- [25] 张亚丽, 董园园, 沈其荣, 等. 不同水稻品种对铵态氮和硝态氮吸收特性的研究[J]. 土壤学报, 2004, 41(6): 918–923.
ZHANG Yali, DONG Yuanyuan, SHEN Qirong, et al. Characteristics of NH_4^+ and NO_3^- uptake by rice of different genotypes [J]. Acta Pedologica Sinica, 2004, 41(6): 918–923. (in Chinese)
- [26] 彭卫福, 吕伟生, 黄山, 等. 土壤肥力对红壤性水稻土水稻产量和氮肥利用效率的影响[J]. 中国农业科学, 2018, 51(18): 3614–3624.
PENG Weifu, LÜ Weisheng, HUANG Shan, et al. Effects of soil fertility on rice yield and nitrogen use efficiency in a red paddy soil [J]. Scientia Agricultura Sinica, 2018, 51(18): 3614–3624. (in Chinese)
- [27] LIU Z, HE T, CAO T, et al. Effects of biochar application on nitrogen leaching, ammonia volatilization and nitrogen use efficiency in two distinct soils[J]. Soil Science and Plant Nutrition, 2017, 17(2): 35–39.
- [28] WANG Y, LIU Y, LIU R, et al. Biochar amendment reduces paddy soil nitrogen leaching but increases net global warming potential in Ningxia irrigation, China[J]. Scientific Reports, 2017, 7: 1592–1602.
- [29] 和玉璞, 张展羽, 徐俊增, 等. 控制地下水位减少节水灌溉稻田氮素淋失[J]. 农业工程学报, 2014, 30(23): 121–127.
HE Yupu, ZHANG Zhanyu, XU Junzeng, et al. Reducing nitrogen leaching losses from paddy field under water-saving irrigation by water table control[J]. Transactions of the CSAE, 2014, 30(23): 121–127. (in Chinese)