

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2020.01.043

大范围转动弹性梁柔性动力学建模与摄动解耦

赵磊^{1,2} 赵新华^{1,3} 李彬^{1,3} 周海波^{1,3} 杨玉维^{2,3} 刘凉^{2,3}

(1. 天津理工大学机械工程学院, 天津 300384; 2. 天津市先进机电系统设计与智能控制重点实验室, 天津 300384;
3. 机电工程国家级实验教学示范中心(天津理工大学), 天津 300384)

摘要: 为实现大空间转动弹性梁的高速、高精度平稳控制, 首先需解决弹性梁的非线性动力学建模问题, 并完成动力学解耦。假设柔性连杆为欧拉-伯努利梁, 应用假设模态法进行坐标离散, 采用 Galerkin 法和 Hamilton 最小变微分原理建立弹性梁柔性动力学模型; 基于摄动理论构建正则摄动式, 应用多尺度法对摄动式进行改进, 对比分析了常规正则摄动法、改进后摄动法的解耦精度, 应用四阶 Runge-Kutta 法验证了所提出方法的有效性与可行性。数值仿真结果表明, 改进后的摄动法解耦精度高, 解耦误差比常规正则摄动误差降低一个数量级, 解决了低阶正则摄动法解耦精度低的问题, 避免了采用高阶摄动来提高解耦精度而产生庞大计算量的弊端。

关键词: 弹性梁; 柔性动力学; 摄动解耦; 多尺度法; 误差

中图分类号: TH113; O326 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2020)01-0391-07

OSID:



Flexible Dynamics Modeling and Perturbation Decoupling of Elastic Beam in Large Overall Rotation

ZHAO Lei^{1,2} ZHAO Xinhua^{1,3} LI Bin^{1,3} ZHOU Haibo^{1,3} YANG Yuwei^{2,3} LIU Liang^{2,3}

(1. School of Mechanical Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China

2. Tianjin Key Laboratory of the Design and Intelligent Control of the Advanced Mechatronical System, Tianjin 300384, China

3. National Demonstration Center for Experimental Mechanical and Electrical Engineering Education, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China)

Abstract: In order to realize the stable and precision control of elastic beams in large overall rotation at high speed, its nonlinear dynamic model must be built and the decoupling work should be completed. Flexible rod was assumed by Euler-Bernoulli beam. The approach of assumed modes was applied to discrete the coordinates, and the Galerkin method and Hamilton principle were adopted to establish the flexible dynamic model. The regular perturbation formula was deduced with perturbation theory. Multiscale method was used to improve the perturbation formula by separating two-time parameters. The decoupling accuracy was deeply analyzed for the regular perturbation method and the improved perturbation method. The validity and feasibility of the proposed method were verified by Runge-Kutta method. The simulation data indicated that the improved perturbation solution owned high decoupling accuracy, little computation and good rapidity. The problem of low decoupling accuracy was solved compared with the common regular perturbation method which was limited by effective time series. The proposed decoupling method also avoided much calculation caused by high-order perturbation to improve the computation's accuracy. It provided an important theoretical basis and data support for dynamic decoupling about complex multi-body flexible systems.

Key words: elastic beam; flexible dynamics; perturbation decoupling; multiple scales method; error

0 引言

1987年, Kane 对大范围转动弹性梁进行了研

究, 指出在大范围转动为高速旋转时, 传统混合坐标建模方法得到弹性梁的变形将无限增大, 出现动力刚度为负、角位移发散的情况, 这与实际情况相

收稿日期: 2019-05-14 修回日期: 2019-08-27

基金项目: 国家重点研发计划项目(2017YFB1303502、2018YFB1308900)和天津市自然科学基金面上项目(18JCYBJC87900、17JCYBJC18300)

作者简介: 赵磊(1983—), 男, 讲师, 博士, 主要从事机电一体化技术研究, E-mail: leizhaotjut@163.com

通信作者: 赵新华(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事机器人技术研究, E-mail: xinhuazhao@tjut.edu.cn

反^[1-2]。传统混合坐标建模方法对低频的大范围运动和高频的柔性体小变形运动之间的耦合处理过于简单,所以只适用于刚体大范围运动情形。学者们围绕动力刚度项的存在及其与系统运动的关系进行了大量研究,对传统混合坐标模型进行修正,主要有非线性有限元法、附加初始应力几何刚度法、几何非线性法和子结构法等^[3-5]。这几种方法均采用不同的近似方法增加动力刚度,并没有从力学理论角度研究这种大范围高速运动与柔性体小变形运动之间的耦合关系。近年来,高精控制系统在汽车、造船、核工业、机械制造、航空航天和设备装配等工业领域得到越来越广泛的应用^[6-7]。

当弹性梁作大范围转动时,机电耦合效应下产生的非线性振动严重影响了系统的控制精度^[8-12]。在航天器机械臂设计中,在保证轻质大范围工作空间的基础上,又需保证较高的控制精度。经常因结构设计的优化需要不断更改结构参数,导致动力学性质发生变化,影响系统的控制精度^[13-14]。对于大范围转动的弹性梁而言,应用有限元法分析需要进行大量的复杂计算,这在柔性结构动力学分析中难以承受。大量的动态数学模型都含有小参数,对非线性的复杂方程在无法求出精确解的前提下,求出一致有效的近似解尤其重要,故摄动理论得到广泛应用^[15]。此外,随着系统动力学模型的复杂化,数值类解耦方法广泛得到应用,如多尺度法^[16-17]。DENG等提出了一种基于多尺度形变特征卷积网络的目标检测方法,利用可形变卷积网络对具有尺度和方向变化的遥感图像目标进行特征提取^[18-19]。摄动法的有效性在机器人动力学解耦、多尺度图像处理和非线性能量阱的动力学分析等实际工程中已经得到验证,具有计算量小、解耦效率高的优势,尤其适于强耦合、非线性系统的求解^[20]。

本文在正则摄动基础上,应用多尺度原理拓展时间尺度,从快、慢两个尺度描述弹性梁刚柔耦合作用下的非线性振动特征,以解决经典正则摄动法存在的低阶摄动求解精度较低的问题。

1 刚柔耦合原理与运动学分析

1.1 刚柔耦合原理

将柔性细长连杆作欧拉-伯努利梁假设,大范围转动时,弹性梁存在其自身变形的同时还存在自身变形与工作范围内运动相互耦合产生弹性体耦合振动。连杆上任一点运动学弹性变形位移描述如图1所示。

1.2 弹性梁小变形位移运动学约束关系

图2中, e^0 为惯性基, e^f 为固结在未变形弹性梁

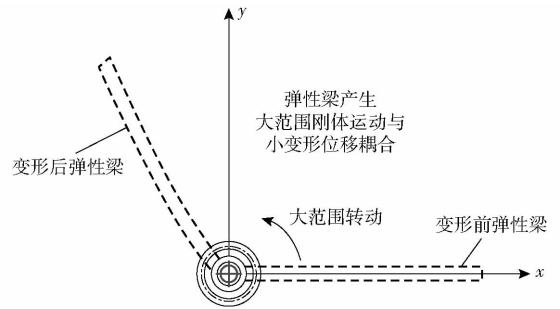


图1 弹性梁刚柔耦合运动

Fig. 1 Rigid and flexible coupling motion of elastic beam

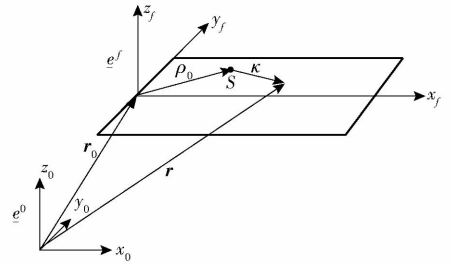


图2 运动学坐标系

Fig. 2 Kinematic coordinate system

中线上的浮动基, r_0 为浮动基在惯性基下的矢径, ρ_0 代表未变形前梁非中线上任意点S在浮动基下的矢径, κ 表示变形位移。

由空间矢量法可得

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}_0 + \boldsymbol{\kappa} \quad (1)$$

梁上任意点速度在 e^0 下的坐标阵为

$${}^0 \frac{d\mathbf{r}}{dt} = {}^f \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \overline{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r} \quad (2)$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

式中 ω ——绕 z_f 轴的转动角速度

则梁上任意一点的位移 κ 与对应中线上点的位移 λ 有如下关系

$$\begin{cases} \kappa_1 = \lambda_1 + \lambda_z \\ \kappa_2 = \lambda_2 \end{cases} \quad (3)$$

式中 λ_1 ——对应中线上点在 x 轴的位移

λ_2 ——对应中线上点在 y 轴的位移

λ_z ——中线耦合变形量

2 非线性动力学建模

考虑柔性问题,基于大范围转动弹性梁的运动学约束关系,惯性力所做虚功包括不考虑中线耦合变形所做的虚功 δW_0 和中线耦合变形所做的虚功 δW_z ,则有

$$\delta W_0 = \int_0^L \gamma A [\ddot{\kappa}_1 - 2\omega \dot{\kappa}_2 - \omega^2 (x + \kappa_1)] \delta \kappa_1 dx + \int_0^L \gamma A (\ddot{\kappa}_2 + 2\omega \dot{\kappa}_1 - \omega^2 \kappa_2) \delta \kappa_2 dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta W_z = & \int_0^L \gamma A (\ddot{\lambda}_z - \omega^2 \lambda_z) \delta \lambda_1 dx + \\ & \int_0^L 2\gamma A \omega \dot{\lambda}_z \delta \lambda_2 dx + \\ & \int_0^L \gamma A [\ddot{\lambda}_1 + \ddot{\lambda}_z - 2\omega \dot{\lambda}_1 - \omega^2 (x + \lambda_1 + \lambda_2)] \delta \lambda_2 dx \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{故 } \delta W = \delta W_0 + \delta W_z = \int_0^L \gamma A \left(\frac{0}{dt} \frac{dr}{dt} \right)^T \delta \kappa dx \quad (6)$$

式中 γ ——弹性梁密度
 A ——等截面梁面积
 L ——弹性梁长度

欧拉-贝努利梁不考虑剪切应变产生的应变能, 设弹性梁由正交各向同性线性材料构成, 则有

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon_{xx}^2 dx \quad (7)$$

式中 E ——弹性模量
 ε_{xx} —— x 方向的正应变
 Π ——弹性梁变性能

考虑几何非线性影响, 应变与几何非线性关系为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right)^2 \quad (8)$$

由式(7)和式(8)可得

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \quad (9)$$

其中

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^L EA \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{8} \int_0^L EA \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right)^4 dx$$

式中 I ——截面转动惯量

Π_1 ——不考虑几何非线性时线性弹性项
 Π_2 ——几何非线性所产生的变性能

由于 Π_2 在动力学方程中以弹性力的形式出现, 故这里只考虑线性弹性模型, 则其转动下的变性能为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (10)$$

对于弹性梁连续体, 应用 Galerkin 法假设弹性梁变形位移为

$$\omega = \phi q \quad (11)$$

其中 $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{bmatrix}$ $\phi_1 = [\phi_{11} \quad \phi_{12} \quad \cdots \quad \phi_{1n}]$

$$q = [q_1 \quad q_2]^T \quad \phi_2 = [\phi_{21} \quad \phi_{22} \quad \cdots \quad \phi_{2n}]$$

式中 ϕ ——假设模态阵
 q ——模态坐标阵

应用 Hamilton 最小作用原理可得

$$\delta H_L = \int_{t_1}^{t_2} (\delta W - \delta \Pi + \delta \omega) dt = 0 \quad (12)$$

式中 H_L ——Hamilton 函数

$\delta \omega$ ——外力所做的虚功

不计外力作用, 由式(6)、(9)和式(12)可得作大范围转动弹性梁的刚柔耦合动力学模型。

3 动力学解耦与精度分析

Euler 梁振动以横向为主, 且高阶非线性对横向振动特性影响很小, 可忽略不计^[21]。本文考虑大范围转动弹性梁自身阻尼影响, 设阻尼比为 η , 则梁横向振动的动力学方程可简化为

$$\ddot{q} + 2\eta\omega_n \dot{q} + \omega_n^2 q = 0 \quad (13)$$

式中 ω_n ——固有频率 q ——横向振幅

3.1 正则摄动解耦及精度分析

3.1.1 正则摄动式建立

设 $q(t, \eta)$ 为式(13)的解, 并以幂级数形式展开

$$q(t, \eta) = q_0(t) + \eta q_1(t) + \eta^2 q_2(t) + \cdots \quad (14)$$

式中 $q_k(t)$ ——未知项 ($k=0, 1, 2, \cdots$), 由初始条件决定

通常摄动式取前两项, 高阶项是微小误差修正部分^[12]。故将式(14)代入式(13)并按 η 的幂级数合并各项有

$$\begin{aligned} & (\ddot{q}_0(t) + q_0(t)) + \eta(\ddot{q}_0(t) + 2\omega_n \dot{q}_0(t) + \omega_n^2 q_1(t)) + \\ & \eta^2(\ddot{q}_0(t) + 2\omega_n \dot{q}_0(t) + \omega_n^2 q_1(t)) + \\ & O(\eta^3) + \cdots = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

基于摄动理论, 式(15)中, 对于足够小的 η 其系数为零, 则有

$$\begin{cases} \ddot{q}_0(t) + q_0(t) = 0 \\ \ddot{q}_0(t) + 2\dot{q}_0(t) + q_1(t) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

解式(16)可得到 $q_0(t)$ 和 $q_1(t)$, 故其一阶正则摄动近似解形式为

$$q_z(t, \eta) = q_0(t) + \eta q_1(t) \quad (17)$$

3.1.2 正则摄动解耦精度分析

为便于分析改进前后大范围转动弹性梁的摄动解耦精度, 忽略电磁激励影响, 转动时无负载, 初始位移和速度分别为 0 和 1 mm/s, 设梁的固有频率为 $\omega_n = 1$ Hz, 材质为 LY06 型硬铝, 长度为 0.2 m, 密度为 2.76×10^3 kg/m³, 横截面积 7.0×10^{-5} m², 弹性模量为 6.85×10^{10} Pa, 转动惯量 8.22×10^{-9} kg·m²。

由图 3a 可知, 在时间大于 10 s 时, 摄动近似解与精确解曲线出现较明显的分离时间节点且在此之后分离程度更加显著; 图 3b 表明在 3.3 s 后, 相比图 3a 近似解与精确解曲线提前分离; 图 3c 中, 在

0~2 s 区间,摄动解曲线很接近精确解,表明该区间摄动解耦合精度高;图 3d 中摄动解大致在大于 1.4 s 后就开始发散,有效时间序列最短。通过上述分析

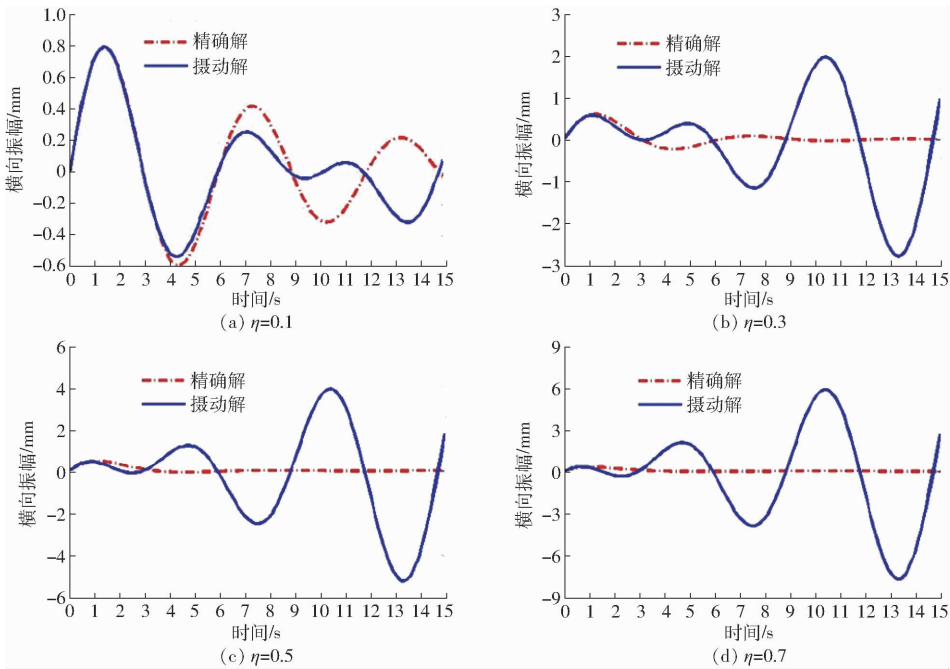


图3 正则摄动解

Fig. 3 Regular perturbation solution

表1 不同阻尼下正则摄动解有效时间序列分布

Tab. 1 Error of perturbation solution and distribution of effective time series

阻尼比 η	发散时间 t_r/s	有效时间序列 t_y/s
0.1	10.0	0~10.0
0.3	3.3	0~3.3
0.5	2.0	0~2.0
0.7	1.3	0~1.4

由上述分析发现,一阶正则摄动解在有效时间序列外是离散的,其根本原因是低阶摄动解难以在有效时间序列外修正发散误差,只能描述短时间内解的振荡特征;然而,通过增加摄动级数可以提高整体解耦精度,但由式(15)可知,随着摄动级数增加,摄动式越加复杂且计算量越来越大,解耦效率明显降低。

3.2 正则摄动法的改进与精度分析

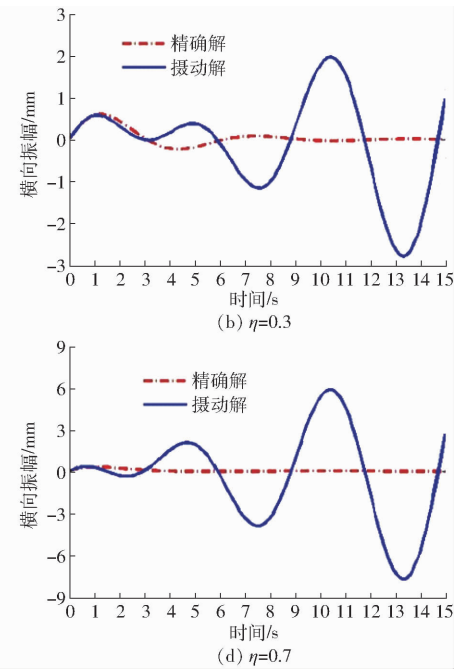
为解决上述低阶正则摄动方法存在的弊端,采用多尺度法改进摄动式,拓展两个独立时间参量。令 $\tau = t, T = \eta t$, 可得应用多尺度法改进后的摄动式

$$q_s(t, \eta) = q_0(\tau, T) + \eta q_1(\tau, T) + O(\eta^2) + \dots \quad (18)$$

利用链式法则和微分原理推导摄动解的一阶导数为

$$\dot{q}_s(t, \eta) = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial q}{\partial T} = \partial_\tau q + \eta \partial_T q \quad (19)$$

和数值仿真结果发现:当时间由 0 趋于 $1/\eta$ 时,摄动近似解精度高,一阶正则摄动解有效时间序列分布如表 1 所示。



将式(18)代入式(19)并合并 η 的幂级数项,得到

$$\dot{q}_s(t, \eta) = \partial_\tau q_0 + \eta(\partial_\tau q_0 + \partial_\tau q_1) + O(\eta^2) \quad (20)$$

同理,可得到

$$\ddot{q}_s(t, \eta) = \partial_{\tau\tau} q_0 + \eta(\partial_{\tau\tau} q_1 + \partial_{\tau T} q_0) + O(\eta^2) \quad (21)$$

取一阶摄动级数,将式(20)和式(21)代入式(13)可得方程组

$$\begin{cases} \partial_{\tau\tau} q_0 + q_0 = 0 \\ \partial_{\tau\tau} q_1 + 2\partial_{\tau T} q_0 + 2\partial_\tau q_0 + q_1 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

显然,方程组(22)中第 1 个方程是简谐振子,其通解为

$$q_0 = A \sin \tau + B \cos \tau \quad (23)$$

将式(23)代回式(22)可得

$$\begin{aligned} \partial_{\tau\tau} q_1 + q_1 &= -2(\partial_{\tau T} q_0 + \partial_\tau q_0) = \\ &= -2(A + A') \cos \tau + 2(B + B') \sin \tau \end{aligned} \quad (24)$$

式(24) $q_1(t)$ 的解中会存在如 $\tau \sin \tau$ 和 $\tau \cos \tau$ 长期项的共振力,这些将导致收敛且无用的幂级数,为从长期项中获得近似值,令共振力为零,则有

$$\begin{cases} A' + A = 0 \\ B' + B = 0 \end{cases} \quad (25)$$

基于微分理论可得式(25)通解,结合初始条件可快速计算得式(21)近似解 $q_s(t, \eta)$ 。对比分析了正则摄动法、改进后摄动法和四阶 Runge - Kutta 法等 3 种算法的弹性梁动力学解耦精度,如图 4 所示。

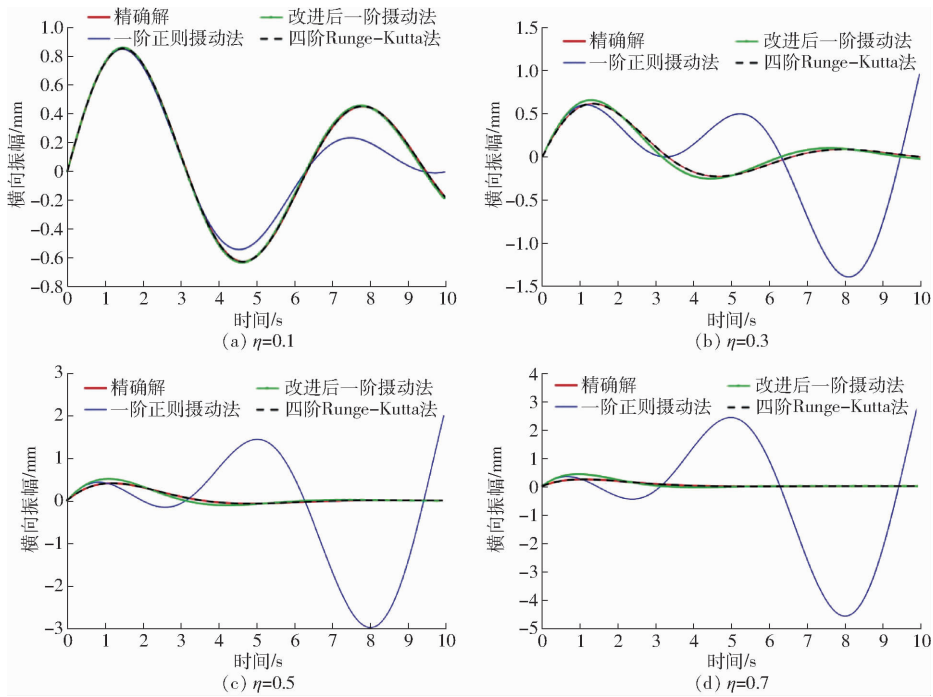


图 4 不同阻尼下动力学解耦曲线

Fig. 4 Dynamic decoupling curves under different dampers

由图 4 可知,与精确解相比,四阶 Runge - Kutta 法具有极高的求解精度,几乎与精确解一致。应用多尺度原理对常规正则摄动式进行优化改进。同取一阶摄动,改进后的一阶摄动解精度高,在经历了快速的振荡环节后趋于收敛,与精确解一致。可见,改进后的一阶摄动法具有良好的快、慢两个尺度的动态跟踪特性,解决了常规一阶正则摄动法存在有效时间序列外解耦曲线发散的难题。

为了对比有效时间序列下改进前后摄动解的精度,图 5 给出了在阻尼比为 $\eta = 0.3$ 和 $\eta = 0.5$ 时两种方法的解耦曲线,可以看出,改进后的一阶摄动法的整体跟踪精度仍优于一阶正则摄动法。

文献[3]忽略阻尼因素的影响,深入解析了非线性高阶几何项与弹性梁振动特性的耦合关系。然而,实际工程中系统存在阻尼效应,故引入阻尼参数 $c' = 2\eta\omega_n$,则动力学方程为

$$\mathbf{M}_l \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_l \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_l \mathbf{q} + \mathbf{F}_l = 0 \quad (26)$$

其中 $\mathbf{F}_l = [(4mL\omega^2 - 2Lm\pi\omega^2)/\pi^2 \quad 0]^T$

$$\mathbf{q}_l = [q_1 \quad q_2]^T$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \frac{EA\pi^2 - 8Lm\omega^2}{8L} & -m\omega \\ m\omega & \frac{EI\pi^4 - 32L^3m\omega^2}{32L^3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_l = \begin{bmatrix} m/2 & 0 \\ 0 & m/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_l = \begin{bmatrix} 0 & -m\omega \\ m\omega & c' \end{bmatrix}$$

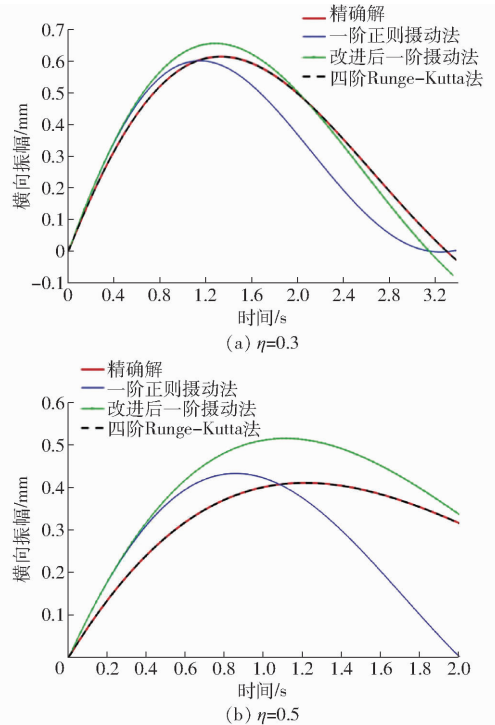
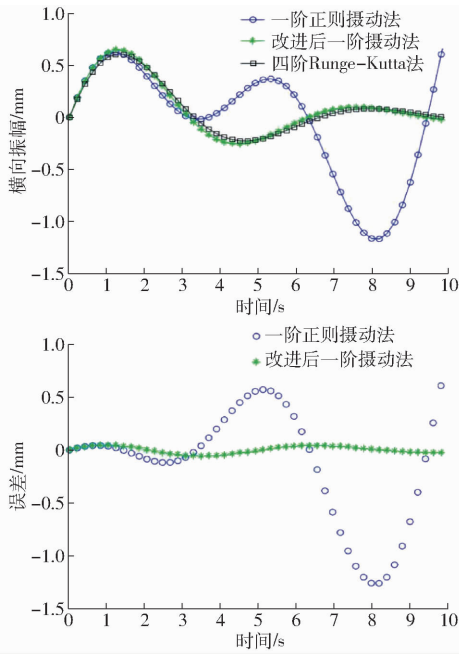
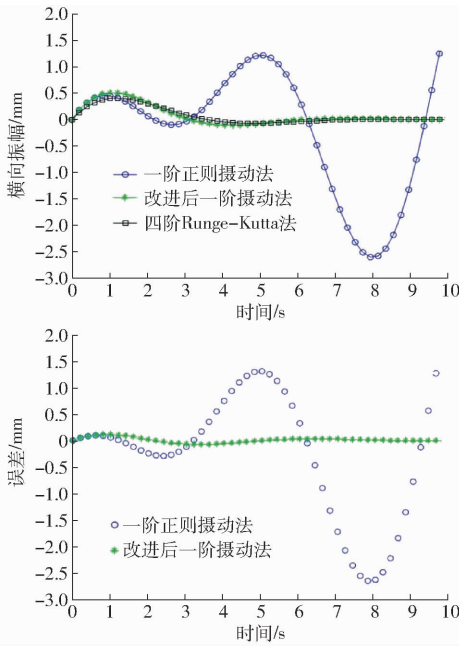


图 5 有效时间序列内动力学解耦曲线

Fig. 5 Decoupling curves of dynamics during effective time

由于非线性方程难以获得精确的解析解,故采用四阶 Runge - Kutta 法验证改进后摄动解耦精度及其有效性,结果如图 6 ~ 8 所示。

由图 6 ~ 8 可知,当系统阻尼增加时,正则一阶摄动近似解随着时间增加,跟踪精度明显降低。由表 2 可知,阻尼比分别取 0.3、0.5 和 0.7 时,一阶正则摄动解耦最大误差 e_{2m} 由 -1.28 mm 增大至

图6 改进前后摄动解耦及误差曲线($\eta = 0.3$)Fig. 6 Perturbation decoupling and error curves before and after optimization ($\eta = 0.3$)图7 改进前后摄动解耦及误差曲线($\eta = 0.5$)Fig. 7 Perturbation decoupling and error curves before and after optimization ($\eta = 0.5$)

-4.11 mm; 同取一阶摄动式, 改进后的摄动法具有良好的快、慢尺度的动态跟踪特性, 其最大解耦误差 e_{dm} 仅为 0.13 mm, 绝对值平均误差最大值 e_{am} 为 0.06 mm, 而一阶正则摄动最大绝对值误差 e_{bm} 达到 2.41 mm。可见, 求解精度提高了一个数量级, 表明改进后摄动解耦整体精度得到大幅提高。

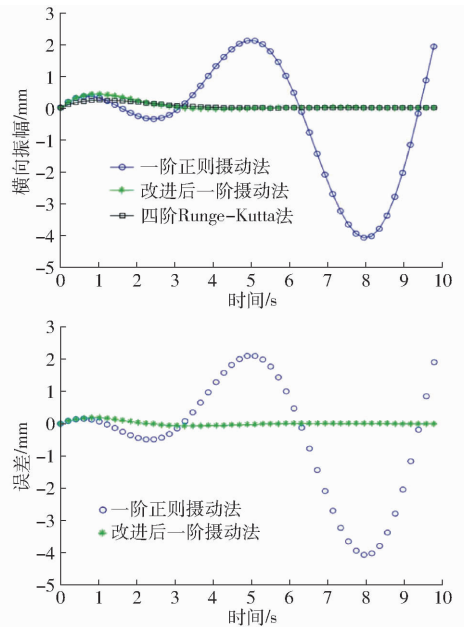
图8 改进前后摄动解耦及误差曲线($\eta = 0.7$)Fig. 8 Perturbation decoupling and error curves before and after optimization ($\eta = 0.7$)

表2 不同阻尼下动力学解耦误差

Tab. 2 Error of two perturbation solutions in different damping parameters

η	一阶正则摄动法		改进后一阶摄动法	
	绝对值平均误差	最大误差	绝对值平均误差	最大误差
	e_{bm}/mm	e_{zm}/mm	e_{am}/mm	e_{dm}/mm
0.3	0.72	-1.28	0.03	0.09
0.5	1.63	-2.73	0.05	0.12
0.7	2.41	-4.11	0.06	0.13

4 结论

(1) 一阶正则摄动法的有效解与系统阻尼存在强耦合关系。当阻尼增大时, 其有效时间序列明显缩短, 摄动解误差增大。

(2) 应用多尺度原理对正则摄动进行改进, 拓展时间维度。改进后一阶摄动解耦绝对值平均误差 e_{am} 最大值为 0.06 mm, 相比一阶正则摄动 e_{bm} 为 2.41 mm 降低了一个数量级, 表明整体解耦精度大幅提高。

(3) 当系统阻尼比 η 增大时, 改进后摄动解耦最大误差 e_{dm} 仅为 0.13 mm, 而一阶正则摄动解耦最大误差 e_{zm} 为 -4.11 mm, 表明有效修正了一阶正则摄动有效时间序列外的发散误差。

(4) 一阶正则摄动虽然仅具备单尺度特性, 即只能体现快尺度振荡特征, 但非常适用于弱阻尼非线性系统的动力学求解, 其解耦原理为优化改进近似解耦方法提供了理论基础。

参 考 文 献

- [1] TOGUN N, BAGDATLI S M. Size dependent nonlinear vibration of the tensioned Nano beam based on the modified couple stress theory[J]. *Composites Part B-Engineering*, 2016,9(7): 255 - 262.
- [2] 蔡敢为,李兆军,王汝贵. 连杆机构弹性振动理论研究[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2012.
- [3] 姜丽忠,赵跃宇. 作大范围运动柔性结构的耦合动力学[M]. 北京:科学出版社,2007.
- [4] LIU S. Stability analyses of a nonlinear electromechanical coupling transmission system with time delay feedback[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016,86(3): 1863 - 1874.
- [5] WU Qing, LI Yikai, JUNJI S. Detailed nonlinear dynamics of the liquid spike development in gaseous medium caused by a three-dimensional Rayleigh - Taylor instability[J]. *International Journal of Multiphase Flow*, 2019, 252:475 - 487.
- [6] 赵磊,赵新华,王收军,等. 柔性测量臂的 RPY 建模与误差标定[J]. *光学精密工程*, 2016,24(2):365 - 371.
ZHAO Lei, ZHAO Xinhua, WANG Shoujun, et al. RPY modeling and error calibration of flexible measuring arm [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2016,24(2):365 - 371. (in Chinese)
- [7] 赵磊,范梦然,赵新华,等. 柔性并联机器人非线性摩擦动力学建模与速度规划[J/OL]. *农业机械学报*, 2017, 48(5): 390 - 396.
ZHAO Lei, FAN Mengran, ZHAO Xinhua, et al. Nonlinear friction dynamic modeling and velocity planning of flexible parallel robot [J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2017,48(5):390 - 396. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20170550&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.05.050. (in Chinese)
- [8] FANG X, WEN J H, YIN J F, et al. Highly efficient continuous bitable nonlinear energy sink composed of a cantilever beam with partial constrained layer damping [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017,87(4): 2677 - 2695.
- [9] KIM H G, WIEBE R. Experimental and numerical investigation of nonlinear dynamics and snap-through boundaries of post-buckled laminated composite plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*,2018,43(9):362 - 387.
- [10] MANINI N, BRAUN O M, TOSATTI E, et al. Friction and nonlinear dynamics[J]. *Journal of Physics Condensed Matter*, 2016,28(29):293 - 301.
- [11] 赵磊,赵新华,周海波,等. 并联测量机柔性动力学建模及误差耦合[J]. *光学精密工程*, 2016, 24(10):2471 - 2479.
ZHAO Lei, ZHAO Xinhua, ZHOU Haibo, et al. The flexible dynamics modeling and error coupling of parallel measuring machine [J]. *Optics and Precision Engineering*,2016,24(10):2471 - 2479. (in Chinese)
- [12] XIANG Changle, LIU Feng, LIU Hui, et al. Nonlinear dynamic behaviors of permanent magnet synchronous motors in electric vehicles caused by unbalanced magnetic pull[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016,371:277 - 294.
- [13] 袁惠群. 转子动力学分析方法[M]. 北京:冶金工业出版社,2017.
- [14] 张策. 机械动力学[M]. 北京:高等教育出版社,2015.
- [15] 巨建民,刘新明,张书娜. 一般阻尼动力系统非奇异摄动法[J]. *动力学与控制学报*, 2017,15(2):102 - 105.
JU Jianmin, LIU Xinming, ZHANG Shuna. Non-singular perturbation method for general damped dynamical system [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017,15(2):102 - 105. (in Chinese)
- [16] 刘锋,刘辉,项昌乐,等. 基于多尺度法的电机转子在不平衡磁拉力作用下的自由振动特性分析[J]. *机械工程学报*, 2017,53(16):52 - 60.
LIU Feng, LIU Hui, XIANG Changle, et al. Influence of unbalanced magnetic pull on free vibration characteristics of motor rotor based on multi-scale method[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017,53(16):52 - 60. (in Chinese)
- [17] 邓习军. 多尺度法在时滞弹性关节机械臂非线性振动问题中的应用 [J]. *力学季刊*,2018,38(4):778 - 784.
DENG Xijun. Application of multi-scale method in nonlinear vibration problem of time delay flexible joint manipulator [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2018,38(4):778 - 784. (in Chinese)
- [18] 姚群力,胡显,雷宏. 基于多尺度卷积神经网络的遥感图像飞机目标检测研究[J]. *光学学报*,2019,39(11):1128002 - 1 - 1128002 - 8.
YAO Qunli, HU Xian, LEI Hong. Object detection in remote sensing images using multiscale convolutional neural networks [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019,39(11):1128002 - 1 - 1128002 - 8. (in Chinese)
- [19] 孙龙清,刘婷,陈帅华,等. 多目标鱼体对象提议检测算法研究[J/OL]. *农业机械学报*,2019,50(12):260 - 268.
SUN Longqing, LIU Ting, CHEN Shuaihua, et al. Multi-target fish detection algorithm based on object proposals [J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*,2019,50(12):260 - 268. http://www.j-csam.org/jcsam.org/jcsam/ch/reder/view_abstract.aspx?file_no=20191230&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.12.030. (in Chinese)
- [20] 陈金香,于立业. 模糊奇异摄动控制理论及其应用[M]. 北京:清华大学出版社,2014.
- [21] 董珊珊,王砚. 高度非线性孤立波与 Euler 梁的耦合作用研究[J]. *应用力学学报*,2018,35(4):803 - 810.
DONG Shanshan, WANG Yan. The coupling mechanism between highly nonlinear solitary waves with Euler beam [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2018,35(4):803 - 810. (in Chinese)