

# 并联驱动双向偏转平台设计与动力学分析

陈纯 徐永帅 王佳伟 房舟 魏碧辉

(陕西理工大学机械工程学院, 汉中 723001)

**摘要:** 提出一种并联驱动双向偏转平台, 动平台通过在空间呈正十字交错且同心的两个驱动拱支撑, 由圆弧导轨副导向, 由固联于底座的电机驱动, 实现了平台绕  $X$ 、 $Y$  轴的大角度偏转。给出了平台的位置、速度逆解方程, 分析了其运动特性。基于 Lagrange 法运用虚功原理建立了平台的动力学模型, 对平台进行了动力学仿真, 分析了在不同外载状态下电机输出力矩的变化规律。依据所建立的动力学模型进行了理论计算, 并与仿真值进行了对比分析, 验证了平台的可行性与动力学模型的正确性。

**关键词:** 双向偏转平台; 并联驱动; Lagrange 法; 动力学仿真

**中图分类号:** TH122; TH113 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2019)05-0420-07

## Design and Dynamic Analysis of Novel Parallel Bidirectional Deflection Platform

CHEN Chun XU Yongshuai WANG Jiawei FANG Zhou WEI Bihui

(School of Mechanical Engineering, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723001, China)

**Abstract:** A type of parallel drive bidirectional deflection platform was proposed. The platform was mainly composed of a base, a slider, a motor, a drive arch, a circular arc guide, a pin shaft, a moving platform, a driving gear and a support plate. The moving platform in the platform was supported by two driving arches which were cross-staggered and concentric in space, and respectively guided by semi-circular guides, driven by motor fixed with base. The motor was driven to realize the large-angle deflection of the platform around the  $X$  and  $Y$  axes, and the degree of freedom of the platform was calculated by using the modified Kutzbach - Grubler formula. A special motion pair was designed in the platform to make the movement of platform simple and easy to control. The inverse equations of the position and velocity of the platform were given. The motion relationship and coupling characteristics were analyzed. The dynamics model of the platform was established based on the Lagrange method by using the principle of virtual work. Then the dynamic simulation of the platform was performed by using ADAMS. The variation curve of the motor output torque under different external loads was obtained. The mechanical properties of the platform were analyzed and the coupling relationship with the kinematics conclusion was obtained. Finally, based on the established dynamic model, the theoretical calculations under the same conditions as the simulated external load state were made to the platform, and the theoretical calculation results were compared with the simulated values. The simulation values and theoretical calculations under different external loads were calculated. The deviation between values was small and almost equal.

**Key words:** bidirectional deflection platform; parallel driving; Lagrange method; dynamic simulation

## 0 引言

与传统的串联机构相比, 并联机构具有精度高、响应快、易于控制等优点, 引起了国内外专家、学者

的极大兴趣<sup>[1-2]</sup>。而结构简单、作业空间大、动力学求解简单、运动耦合度小、对机械零部件加工制造精度要求不高, 以及对机构运动控制精度要求较低的少自由度并联机构更受到青睐<sup>[3-7]</sup>, 许多学者对不

同类型的并联机构进行了动力学分析<sup>[8-19]</sup>。目前学者们提出的并联机构多以 Stewart、Tricept 为原形的杆结构类型为主,本文提出一种并联驱动双向偏转平台,运用 Lagrange 法建立平台动力学模型并进行仿真分析。

## 1 并联驱动双向偏转平台机构

### 1.1 机构描述

并联驱动双向偏转平台如图 1 所示,平台主要由底座、滑块、电机、驱动拱、圆弧导轨、销轴、动平台、主动齿轮以及支撑板等构件组成,圆形动平台由在空间呈正十字交错且同心的两个半圆形外齿轮环(半径大小不同,称之为驱动拱)支撑,其中大驱动拱通过销轴 8 由转动副与动平台连接,小驱动拱通过销轴 11 由一种特殊的运动副(称为滑伸副)与动平台相连;大小驱动拱分别与半径不同的圆弧导轨(称为大、小圆弧导轨)相固联并由圆弧导轨副(分别由大圆弧导轨与滑块 2、14,小圆弧导轨与滑块 6、13 组成)导向,滑块固联于置于底座 1 上的呈正十字布置的支撑板上,大、小驱动拱的偏转分别由主动齿轮 16、15 驱动,主动齿轮 16、15 分别安装在电机 17、3 的主轴上,电机 17、3 固定于底座上,从而实现动平台绕 X、Y 轴两个方向上的大角度偏转。

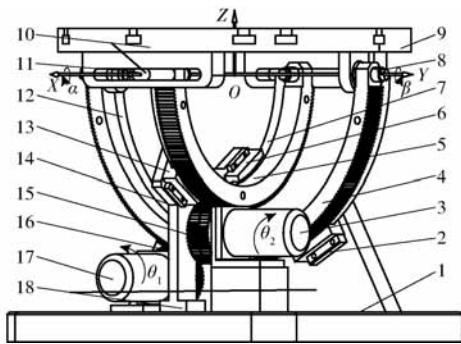


图 1 并联驱动双向偏转平台模型

Fig. 1 Parallel bidirectional deflection platform model

- 1. 底座 2、6、13、14. 滑块 3、17. 电机 4. 大驱动拱 5. 小驱动拱 7. 小圆弧导轨 8、11. 销轴 9. 动平台 10. 滑伸副 12. 大圆弧导轨 15、16. 主动齿轮 18. 支撑板

在该平台中存在一种特殊的运动副(滑伸副 10),如图 2 所示,该运动副在动平台同时作绕 X 轴和 Y 轴运动的过程中,与小驱动拱连接的销轴 11 会在与平台固联的 U 型孔中滑移并伸缩。

### 1.2 自由度分析

在此平台中,由于大驱动拱的中心与销轴 11 的轴线共线、小驱动拱的中心与销轴 8 的轴线共线,且平台分别相对于 XOZ、YOZ 面对称,可看作该平台是沿对称面切分为含有 4 条支链的并联机构。由于 4 条支链中对称面两边的两条支链结构完全相同,

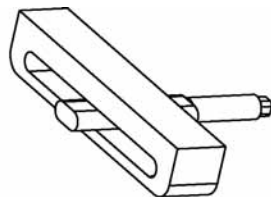


图 2 滑伸副

Fig. 2 Sliding telescopic pair

故该并联机构可认为是 2-GRR(FR)/GRR 运动链形式的并联机构,其中 G 为齿轮副、F 为平面副、R 为转动副,滑伸副(FR)可看作是由平面副 F 和转动副 R 组合而成。采用修正的 Kutzbach-Grubler 公式<sup>[20]</sup>计算其自由度

$$K = 6(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + v - \xi \quad (1)$$

式中 K——机构的自由度

n——包括机架的构件数目

g——运动副的数目

$f_i$ ——第 i 个运动副的自由度

v——多环并联机构在去除公共约束因素后的冗余约束数目

$\xi$ ——机构中存在的局部自由度

为了增加并联机构的刚性和导向精度,此并联机构中大、小圆弧导轨副中分别含有两个滑块,因此该机构中含有两个冗余约束,即  $v = 2$ ;该机构中不含局部自由度,即  $\xi = 0$ ,其余未知量均较易得出,此处不再详细分析。

故该平台中: $n = 8; g = 12; \sum_{i=1}^g f_i = 30; v = 2; \xi = 0$ 。根据式(1)计算得机构的自由度为 2。

## 2 运动学逆解

如图 1 所示,假定动平台绕 X 轴与 Y 轴偏转角分别为  $\alpha$  和  $\beta$ ;主动齿轮 15、16 转动角分别为  $\theta_1$  和  $\theta_2$ ;主动齿轮 15 与小驱动拱的齿数分别为  $z_1$  和  $z_2$ ,模数为  $m_1$ ;主动齿轮 16 与大驱动拱的齿数分别为  $z_3$  和  $z_4$ ,模数为  $m_2$ 。

动平台在绕 X 轴方向上位置解为

$$\theta_1(t) = i_1 \alpha(t) = \frac{z_4}{z_3} \alpha(t) \quad (2)$$

动平台绕 Y 轴偏转可简化为图 3 所示的几何关系,假设当动平台绕 X、Y 轴偏转角为  $\alpha, \beta$ ,由于滑伸副的存在使得小驱动拱转角并不等于  $\beta$ ,而是  $\beta_1$ ,其空间关系如图 3 所示。

由图 3 空间几何关系可得

$$\cos \alpha = \frac{\tan \beta}{\tan \beta_1} \quad (3)$$

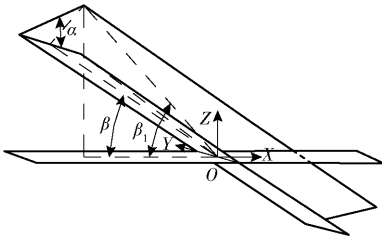


图3 动平台绕Y轴偏转示意图

Fig. 3 Schematic of deflection of moving platform around Y axis

将  $\beta_1 = \frac{z_1}{z_2}\theta_2$  代入式(3)得

$$\theta_2(t) = \frac{z_2}{z_1} \arctan \frac{\tan\beta(t)}{\cos\alpha(t)} \quad (4)$$

将式(2)、(4)写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_4}{z_3}\alpha(t) \\ \frac{z_2}{z_1} \arctan \frac{\tan\beta(t)}{\cos\alpha(t)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

对式(5)求其对时间的一阶导数即可得平台速度逆解,即

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_4}{z_3} & 0 \\ \frac{z_2}{z_1} \frac{\sin\alpha(t)\cos^2\alpha(t)\tan\beta(t)}{\cos^2\alpha(t) + \tan^2\beta(t)} & \frac{z_2}{z_1} \frac{\sec^2\beta(t)\cos^3\alpha(t)}{\cos^2\alpha(t) + \tan^2\beta(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

则并联驱动双向偏转平台的速度 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{z_4}{z_3} & 0 \\ \frac{z_2}{z_1} \frac{\sin\alpha(t)\cos^2\alpha(t)\tan\beta(t)}{\cos^2\alpha(t) + \tan^2\beta(t)} & \frac{z_2}{z_1} \frac{\sec^2\beta(t)\cos^3\alpha(t)}{\cos^2\alpha(t) + \tan^2\beta(t)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

从平台的运动学方程可以得出,平台在绕X轴方向的偏转运动不受其绕Y轴方向偏转运动的影响;平台在绕Y轴方向的偏转运动受其绕X轴方向偏转运动的影响,存在耦合关系。

### 3 平台动力学建模

平台总动能  $T$  可表示为

$$T = \sum T_i \quad (i=4,5,7,8,9,11,12,15,16) \quad (8)$$

式中  $i$ ——构件编号(图1)

其中构件4、5、7、12的动能可表示为

$$T_i = \frac{1}{2} I_i^o (\omega_{ci}^o)^2 \quad (i=4,5,7,12) \quad (9)$$

式中  $I_i^o$ ——第  $i$  个构件在坐标系  $O$  下的转动惯量  
 $\omega_{ci}^o$ ——第  $i$  个构件质心  $c$  在坐标系  $O$  下的转动角速度(下同)

构件8的动能可表示为

$$T_8 = 2 \times \frac{1}{2} I_8^o (\omega_{c8}^o)^2 \quad (10)$$

构件11的动能可表示为

$$T_{11} = 2 \times \frac{1}{2} I_{11}^o (\omega_{c11}^o)^2 + 2 \times \frac{1}{2} I_{11} (\omega_{c11})^2 \quad (11)$$

式中  $I_{11}$ ——构件11在自传回转轴下转动惯量  
 $\omega_{c11}$ ——构件11在自传回转轴下角速度

构件9的动能可表示为

$$T_9 = \frac{1}{2} \omega_{c9}^o \mathbf{I}_9^o (\omega_{c9}^o)^T \quad (12)$$

构件15、16的动能可表示为

$$T_i = \frac{1}{2} I_i (\omega_{ci})^2 \quad (i=15,16) \quad (13)$$

令  $\mathbf{J} = [\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2]^T$ , 用构件9(动平台)的速度矢量来表示其余各构件的速度矢量可得

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{1}{2} I_4^o \left( \frac{z_3}{z_4} \dot{\theta}_1 \right)^2 = \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{z_3}{z_4} \right)^2 I_4^o [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}] \mathbf{J}_1^T \mathbf{J}_1 [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}]^T \\ T_5 &= \frac{1}{2} I_5^o \left( \frac{z_1}{z_2} \dot{\theta}_2 \right)^2 = \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 I_5^o [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}] \mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_2 [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}]^T \\ T_7 &= \frac{1}{2} I_7^o \left( \frac{z_1}{z_2} \dot{\theta}_2 \right)^2 = \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 I_7^o [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}] \mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_2 [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}]^T \\ T_8 &= 2 \times \frac{1}{2} I_8^o \left( \frac{z_3}{z_4} \dot{\theta}_1 \right)^2 = \\ & 2 \times \frac{1}{2} \left( \frac{z_3}{z_4} \right)^2 I_8^o [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}] \mathbf{J}_1^T \mathbf{J}_1 [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}]^T \\ T_9 &= \frac{1}{2} [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}] \mathbf{I}_9^o [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}]^T = \\ & \frac{1}{2} [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}] \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}]^T \\ T_{16} &= \frac{1}{2} I_{16} \dot{\theta}_1 = \frac{1}{2} I_{16} [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}] \mathbf{J}_1^T \mathbf{J}_1 [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}]^T \\ T_{11} &= 2 \times \frac{1}{2} I_{11}^o \left( \frac{z_1}{z_2} \dot{\theta}_2 \right)^2 + 2 \times \frac{1}{2} I_{11} \left( \frac{z_3}{z_4} \dot{\theta}_1 \right)^2 = \\ & 2 \times \frac{1}{2} \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 I_{11}^o [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}] \mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_2 [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}]^T + \\ & 2 \times \frac{1}{2} \left( \frac{z_3}{z_4} \right)^2 I_{11} [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}] \mathbf{J}_1^T \mathbf{J}_1 [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}]^T \end{aligned}$$

$$T_{12} = \frac{1}{2} I_{12}^o \left( \frac{z_3}{z_4} \dot{\theta}_1 \right)^2 =$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{z_3}{z_4} \right)^2 I_{12}^o [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T J_1^T J_1 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T$$

$$T_{15} = \frac{1}{2} I_{15} \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2} I_{15} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T J_2^T J_2 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T$$

则可得平台总动能  $T$  为

$$T = \sum T_i =$$

$$T_4 + T_5 + T_7 + T_8 + T_9 + T_{11} + T_{12} + T_{15} + T_{16} =$$

$$A [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T J_1^T J_1 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T + B [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T J_2^T J_2 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T + \frac{1}{2} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T \quad (14)$$

其中

$$A = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{z_3}{z_4} \right)^2 I_4^o + 2 \left( \frac{z_3}{z_4} \right)^2 I_8^o + 2 \left( \frac{z_3}{z_4} \right)^2 I_{11} + \left( \frac{z_3}{z_4} \right)^2 I_{12}^o + I_{16} \right]$$

$$B = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 I_5^o + \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 I_7^o + 2 \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 I_{11}^o + I_{15} \right]$$

根据虚功原理可得

$$Q_k \Delta q_k = \sum \delta W' = M \Delta \varphi + M_k \Delta q_k \quad (k=1,2) \quad (15)$$

其中

$$M = M_x i + M_y j + M_z k$$

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_x i + \Delta \varphi_y j + \Delta \varphi_z k$$

$$\varphi = [\alpha \ \beta]^T$$

式中  $M$ ——动平台所受的外力矩

$\Delta \varphi$ ——动平台的偏转角

$M_k$ ——电机输出的驱动力矩

$q_k$ ——输入广义坐标

$Q_k$ ——广义坐标下的广义力

对式(15)两边同时除以  $\Delta q_k$  得

$$Q_k = \frac{\Delta \varphi_x}{\Delta q_k} M_x + \frac{\Delta \varphi_y}{\Delta q_k} M_y + \frac{\Delta \varphi_z}{\Delta q_k} M_z + M_k \quad (k=1,2) \quad (16)$$

整理式(16)可得

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

故

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} - J^T \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (18)$$

Lagrange 方程为

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (19)$$

将式(14)代入式(18)得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = A [1 \ 0] \frac{dJ_1^T}{dt} J_1 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T +$$

$$A [1 \ 0] J_1^T \frac{dJ_1}{dt} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T + A [1 \ 0] J_1^T J_1 [\ddot{\alpha} \ \ddot{\beta}]^T +$$

$$A [\ddot{\alpha} \ \ddot{\beta}]^T J_1^T J_1 [1 \ 0]^T + A [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] \frac{dJ_1^T}{dt} J_1 [1 \ 0]^T +$$

$$A [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] J_1^T \frac{dJ_1}{dt} [1 \ 0]^T + B [1 \ 0] \frac{dJ_2^T}{dt} J_2 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T +$$

$$B [1 \ 0] J_2^T \frac{dJ_2}{dt} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T + B [1 \ 0] J_2^T J_2 [\ddot{\alpha} \ \ddot{\beta}]^T +$$

$$B [\ddot{\alpha} \ \ddot{\beta}]^T J_2^T J_2 [1 \ 0]^T + B [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] \frac{dJ_2^T}{dt} J_2 [1 \ 0]^T +$$

$$B [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] J_2^T \frac{dJ_2}{dt} [1 \ 0]^T +$$

$$\frac{1}{2} [1 \ 0] \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} [\ddot{\alpha} \ \ddot{\beta}]^T +$$

$$\frac{1}{2} [\ddot{\alpha} \ \ddot{\beta}] \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} [1 \ 0]^T \quad (20)$$

$$\frac{dT}{d\alpha} = A [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] \frac{dJ_1^T}{d\alpha} J_1 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T +$$

$$A [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] J_1^T \frac{dJ_1}{d\alpha} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T + B [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] \frac{dJ_2^T}{d\alpha} J_2 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T +$$

$$B [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] J_2^T \frac{dJ_2}{d\alpha} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right) = A [0 \ 1] \frac{dJ_1^T}{dt} J_1 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T +$$

$$A [0 \ 1] J_1^T \frac{dJ_1}{dt} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T + A [0 \ 1] J_1^T J_1 [\ddot{\alpha} \ \ddot{\beta}]^T +$$

$$A [\ddot{\alpha} \ \ddot{\beta}]^T J_1^T J_1 [0 \ 1]^T + A [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] \frac{dJ_1^T}{dt} J_1 [0 \ 1]^T +$$

$$A [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] J_1^T \frac{dJ_1}{dt} [0 \ 1]^T + B [0 \ 1] \frac{dJ_2^T}{dt} J_2 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T +$$

$$B [0 \ 1] J_2^T \frac{dJ_2}{dt} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T + B [0 \ 1] J_2^T J_2 [\ddot{\alpha} \ \ddot{\beta}]^T +$$

$$B [\ddot{\alpha} \ \ddot{\beta}]^T J_2^T J_2 [0 \ 1]^T + B [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] \frac{dJ_2^T}{dt} J_2 [0 \ 1]^T +$$

$$B [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] J_2^T \frac{dJ_2}{dt} [0 \ 1]^T + \frac{1}{2} [0 \ 1] \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} \cdot$$

$$[\ddot{\alpha} \ \ddot{\beta}]^T + \frac{1}{2} [\ddot{\alpha} \ \ddot{\beta}] \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} [0 \ 1]^T \quad (22)$$

$$\frac{dT}{d\beta} = A [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] \frac{dJ_1^T}{d\beta} J_1 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T +$$

$$A [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] J_1^T \frac{dJ_1}{d\beta} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T + B [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] \frac{dJ_2^T}{d\beta} J_2 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T +$$

$$B [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}] J_2^T \frac{dJ_2}{d\beta} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T \quad (23)$$

将式(20)~(23)代入式(19)得

$$Q_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} \quad (24)$$

$$Q_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta} \quad (25)$$

将式(24)、(25)代入式(18)得平台的动力学模型为

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta} \end{bmatrix} - \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (26)$$

#### 4 动力学计算与仿真

依据所建立的并联驱动双向偏转平台的动力学模型,给出平台的参数以及施加在其上的外载,即可计算、仿真电机输出的驱动力矩。

利用 SolidWorks 软件测得平台中各构件的转动惯量为  $I_4^a = 2\,112.51 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ ,  $I_5^a = 763.061 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ ,  $I_7^a = 219.729 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ ,  $I_8^a = 0.806 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ ,  $I_{xx} = 10\,688.89 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ ,  $I_{yy} = -46\,826.13 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ ,  $I_{yx} = -46\,826.13 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ ,  $I_{yy} = 12\,600.333 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ ,  $I_{11}^a = 6.325 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ ,  $I_{11} = 2.42 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ ,  $I_{12}^a = 1\,267.677 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ ,  $I_{15} = 6.043 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ ,  $I_{16} = 8.244 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ 。

(1) 给动平台在绕  $X$ 、 $Y$  轴分别输入  $\dot{\alpha}(t) = 3(^{\circ})/s$  ( $t = [0, 10 \text{ s}]$ )、 $\dot{\beta}(t) = 3(^{\circ})/s$  ( $t = [0, 10 \text{ s}]$ ) 运动规律,外力矩  $M_x = M_y = 0$ , 得出驱动电机 3、17 输出驱动力矩  $M_2$ 、 $M_1$  变化曲线,如图 4 所示。

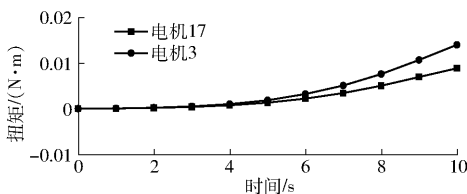


图 4 空载时  $M_1$ 、 $M_2$  曲线

Fig. 4 Curves of  $M_1$  and  $M_2$  under no load

由图 4 可知,驱动电机 17 输出力矩  $M_1$  最大为  $0.009\,1 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、最小为  $0.000\,6 \text{ N}\cdot\text{m}$ ;驱动电机 3 输出力矩  $M_2$  最大为  $0.014\,2 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、最小为  $0.001\,1 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。

(2) 动平台 9 受外力矩  $M_x = 4 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、 $M_y = 0$ , 得出驱动电机 3、17 输出的驱动力矩  $M_2$ 、 $M_1$  变化曲线,如图 5 所示。

图 5 中驱动电机 17 输出力矩  $M_1$  最大为  $25.443\,2 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、最小为  $25.431\,2 \text{ N}\cdot\text{m}$ ;驱动电机 3 输出的力矩  $M_2$  最大为  $3.426\,9 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、最小为  $0.006\,7 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。

(3) 动平台 9 受外力矩  $M_x = 0$ 、 $M_y = 4 \text{ N}\cdot\text{m}$ , 得出驱动电机 3、17 输出的驱动力矩  $M_2$ 、 $M_1$  变化曲线,如图 6 所示。

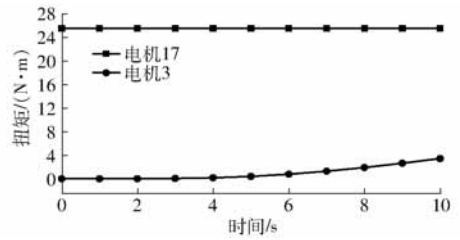


图 5 绕  $X$  轴带载时  $M_1$ 、 $M_2$  曲线

Fig. 5 Curves of  $M_1$  and  $M_2$  when loading around  $X$  axis

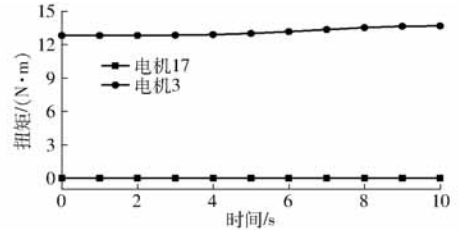


图 6 绕  $Y$  轴带载时  $M_1$ 、 $M_2$  曲线

Fig. 6 Curves of  $M_1$  and  $M_2$  when loading around  $Y$  axis

由图 6 可知,驱动电机 17 输出力矩  $M_1$  最大为  $0.009\,1 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、最小为  $0.000\,6 \text{ N}\cdot\text{m}$ ;驱动电机 3 输出力矩  $M_2$  最大为  $13.658\,2 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、最小为  $12.802\,3 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。

(4) 动平台 9 受外力矩  $M_x = M_y = 4 \text{ N}\cdot\text{m}$ , 得出驱动电机 3、17 输出的驱动力矩  $M_2$ 、 $M_1$  变化曲线,如图 7 所示。

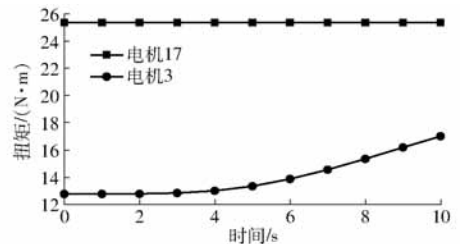


图 7 绕  $X$ 、 $Y$  轴均带载时  $M_1$ 、 $M_2$  曲线

Fig. 7 Curves of  $M_1$  and  $M_2$  when loading around

$X$  and  $Y$  axes

图 7 中驱动电机 17 输出力矩  $M_1$  最大为  $25.443\,2 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、最小为  $25.441\,2 \text{ N}\cdot\text{m}$ ;驱动电机 3 输出力矩  $M_2$  最大为  $17.071\,1 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、最小为  $12.803\,4 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。

从图 4 可以看出,当动平台上负载为 0 时,驱动电机 17、3 的输出力矩虽小但呈递增的趋势,说明随着动平台偏转角增加其重力产生的力矩也越大,电机 17、3 的输出力矩主要用来克服动平台及其相关组件重力产生的力矩。

当动平台上负载为 0 时,驱动电机 17、3 的输出力矩  $M_1$ 、 $M_2$  虽呈递增趋势,但均很小(几乎为 0);由图 7 可知,当动平台在绕  $X$ 、 $Y$  轴方向上同时施加大小相同的负载时,驱动电机 17、3 均输出较大的力矩,且  $M_1 > M_2$ , 故可知平台自身重力对驱动电机 17、3 的输出力矩影响很小,驱动电机输出的力矩主要用来克服外载。



对比图5、6可知,当动平台在绕 $X$ 轴方向上施加负载、绕 $Y$ 轴方向上为空载时输入力矩 $M_1$ 、 $M_2$ 均产生较大的变化;反之当动平台在绕 $X$ 轴方向上为空载而绕 $Y$ 轴方向上施加负载时输入力矩 $M_2$ 产生较大的变化, $M_1$ 变化很小,故可知平台在绕 $X$ 轴方向上的偏转不受其绕 $Y$ 轴负载的影响,而在绕 $Y$ 轴方向上的偏转存在耦合关系(受平台绕 $X$ 轴负载的影响),与平台运动学的结论一致,验证了平台动力学结论的正确性。

为了验证所设计平台的可行性与所建动力学模型的正确性,分别取 $t = 1、3、5、7、9$  s时各外载状态下理论计算值与仿真值进行比较,结果如表1、2所示。

表1 绕 $X、Y$ 轴空载与均带载时电机输出力矩

Tab.1 Output torque of motor around  $X$  and  $Y$  axes under no load and even load N·m

负载状态	$t/s$	理论值		仿真值	
		$M_1$	$M_2$	$M_1$	$M_2$
$M_x = 0$ $M_y = 0$	1	0.000 1	0.000 2	0.000 6	0.001 1
	3	0.000 4	0.000 5	0.001 8	0.002 2
	5	0.001 3	0.001 8	0.003 2	0.004 1
	7	0.003 4	0.005 1	0.005 1	0.007 1
$M_x = 4 \text{ N}\cdot\text{m}$ $M_y = 4 \text{ N}\cdot\text{m}$	9	0.006 9	0.010 6	0.007 6	0.013 2
	1	25.440 0	12.800 0	25.441 2	12.803 4
	3	25.439 6	12.876 2	25.441 8	12.900 1
	5	25.438 6	13.378 7	25.442 1	13.381 4
	7	25.436 5	14.601 8	25.442 6	14.610 2
	9	25.432 6	16.246 5	25.443 0	16.251 1

表2 绕 $X、Y$ 轴分别单独带载时电机输出力矩

Tab.2 Motor output torque when  $X$  and  $Y$  axes were loaded separately N·m

负载状态	$t/s$	理论值		仿真值	
		$M_1$	$M_2$	$M_1$	$M_2$
$M_x = 4 \text{ N}\cdot\text{m}$ $M_y = 0$	1	25.440 0	0.005 8	25.441 2	0.006 7
	3	25.439 6	0.051 1	25.441 8	0.052 4
	5	25.438 6	0.393 4	25.442 1	0.395 1
	7	25.436 5	1.277 4	25.442 6	1.279 9
$M_x = 0$ $M_y = 4 \text{ N}\cdot\text{m}$	9	25.432 6	2.627 7	25.433 0	2.631 1
	1	0.000 1	12.800 4	0.000 6	12.802 1
	3	0.000 4	12.825 6	0.001 8	12.826 6
	5	0.001 3	12.987 1	0.003 2	12.990 1
	7	0.003 4	13.329 5	0.005 1	13.332 4
	9	0.006 9	13.629 4	0.007 6	13.632 1

下驱动电机17、3输出力矩 $M_1$ 、 $M_2$ 的理论值与仿真值偏差很小( $\Delta_{\max} = 0.010 4 \text{ N}\cdot\text{m}$ ),几乎相等,验证了模型的正确性。

## 5 结论

(1)所设计的并联驱动双向偏转平台原理可行,动力学模型正确。

(2)从运动学和动力学分析可知,平台绕 $X$ 轴方向上的偏转不受其绕 $Y$ 轴方向上偏转的影响,而绕 $Y$ 轴方向上的偏转受其绕 $X$ 轴方向上偏转的影响,两者存在耦合关系。

(3)驱动电机输出的力矩除了克服由于平台偏转零部件重力所产生的转矩外,主要用来克服外载,这与实际工况相符。

由表1、2可以看出,动平台9在各种负载状态

## 参 考 文 献

- [1] 刘伟,刘宏昭.具有2T1R与2R1T运动模式3自由度并联机构型综合[J/OL].农业机械学报,2018,49(1):401-409. LIU Wei, LIU Hongzhao. Type synthesis of 3-DOF parallel mechanism with 2T1R and 2R1T motion mode[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(7):401-409. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?flag=1&file\\_no=20180750&journal\\_id=jcsam](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20180750&journal_id=jcsam). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.07.050. (in Chinese)
- [2] 赵星宇,赵铁石,云轩,等.3-P(4S)并联机构分析与多目标性能优化[J/OL].农业机械学报,2017,48(10):390-400. ZHAO Xingyu, ZHAO Tieshi, YUN Xuan, et al. Mechanism analysis and multi-target performance optimization of 3-P(4S) parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(10):390-400. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?flag=1&file\\_no=20171050&journal\\_id=jcsam](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20171050&journal_id=jcsam). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.10.050. (in Chinese)
- [3] 张彦斌,荆献领,韩建海,等.无耦合二自由度转动并联机构型综合方法研究[J].机械工程学报,2018,54(15):21-30. ZHANG Yanbin, JING Xianling, HAN Jianhai, et al. Research on integrated method of rotating parallel mechanism without coupling two degrees of freedom[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(15):21-30. (in Chinese)
- [4] FATEMEH S, FARZAM F, MOHAMMAD D, et al. Design and analysis of a novel parallel mechanism for prosthetic knee wear test simulators[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2017, 31(2):885-892.
- [5] JAVAD E, REZA N. The performance indices optimization of a symmetrical fully spherical parallel mechanism for dimensional synthesis[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2018, 90(3-4):305-321.
- [6] 王汝贵,袁吉伟,孙家兴,等.一种空间非对称2自由度并联机构设计与应用研究[J].机械设计,2017,34(8):85-91. WANG Rugui, YUAN Jiwei, SUN Jiaying, et al. Design and application of a spatial asymmetric 2-DOF parallel mechanism

- [J]. *Journal of Machine Design*, 2017, 34(8):85-91. (in Chinese)
- [7] 李守忠. 两种新颖的柔性机构自由度分析方法[J]. *机械工程学报*, 2016, 52(1):41-46.  
LI Shouzhong. Two kinds of novel methods for analyzing the degree of freedom of flexure mechanisms[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 52(1):41-46. (in Chinese)
- [8] 山显雷,程刚. 考虑关节摩擦的3SPS+1PS并联机构显式动力学建模研究[J]. *机械工程学报*, 2017, 53(1):28-35.  
SHAN Xianlei, CHENG Gang. Explicit dynamic modeling of a 3SPS+1PS parallel manipulator with joint friction [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 53(1):28-35. (in Chinese)
- [9] HU Bo, ZHANG Liandong, YU Jingjing. Kinematics and dynamics analysis of a novel serial-parallel dynamic simulator[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2016, 30(11):5183-5195.
- [10] MAHMOOD M, MOSTAFA T, M. RASOOL N. Kinematic analysis and design of a 3-DOF translational parallel robot [J]. *International Journal of Automation and Computing*, 2017, 4(14):432-441.
- [11] 姚建涛,韩博,窦玉超,等. 基座运动对并联调整机构动力学性能的影响[J/OL]. *农业机械学报*, 2018, 49(7):410-418.  
YAO Jiantao, HAN Bo, DOU Yuchao, et al. Influence of base motion on dynamic performance of parallel adjustment mechanism[J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2018, 49(7):410-418. [http://www.jcsam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?flag=1&file\\_no=20180751&journal\\_id=jcsam](http://www.jcsam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20180751&journal_id=jcsam). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.07.051. (in Chinese)
- [12] SHANKAR G, KOTESWARA R. Inverse dynamics of a 3-DOF translational parallel kinematic machine [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2015, 29(11):4583-4591.
- [13] 韩旭焯,陈阳阳,高峰,等. 一种两自由度并联机构的动力学分析[J]. *机械设计与制造*, 2018(10):9-12.  
HAN Xuzhao, CHEN Yangyang, GAO Feng, et al. Dynamic analysis of a 2-DOF parallel mechanism[J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2018(10):9-12. (in Chinese)
- [14] 闫世洲,赵志刚,霍树林. 轴对称矢量喷嘴 Lagrange 动力学分析[J]. *机械科学与技术*, 2017, 53(21):46-53.  
YAN Shizhou, ZHAO Zhigang, HUO Shulin. Lagrange dynamics analysis of the axisymmetric vector nozzle [J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2017, 53(21):46-53. (in Chinese)
- [15] 陈子明,刘晓檬,张扬,等. 对称两转一移 3-UPU 并联机构的动力学分析[J]. *机械工程学报*, 2017, 53(21):46-53.  
CHEN Ziming, LIU Xiaomeng, ZHANG Yang, et al. Dynamics analysis of a symmetrical 2R1T 3-UPU parallel mechanism [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 53(21):46-53. (in Chinese)
- [16] BEHZAD D, ALALEH A, MEHDI T M, et al. Dynamic modeling and base inertial parameters determination of a 2-DOF spherical parallel mechanism[J]. *Multibody System Dynamics*, 2017, 41(4):367-390.
- [17] SIAMAK P, SAEID N, HAMID A. Closed-form dynamics of a hexarot parallel manipulator by means of the principle of virtual work[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2018, 34(5):883-895.
- [18] 宋轶民,金雪莹,梁栋,等. 两类平面并联机构凯恩动力学建模与比较研究[J]. *天津大学学报(自然科学与工程技术版)*, 2019, 52(2):173-182.  
SONG Yimin, JIN Xueying, LIANG Dong, et al. Kane-formulation-based dynamic modeling and comparative study on dynamic performance of two kinds of parallel robots[J]. *Journal of Tianjin University(Science and Technology)*, 2019, 52(2):173-182. (in Chinese)
- [19] ZHAO Tieshi, GENG Mingchao, CHEN Yuhang, et al. Kinematics and dynamics Hessian matrices of manipulators based on screw theory[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 28(2):226-235.
- [20] 赵永生,郑魁敬,李秦川,等. 5-UPS/PRPU 5 自由度并联机床运动学分析[J]. *机械工程学报*, 2004, 40(2):12-13.  
ZHAO Yongsheng, ZHENG Kuijing, LI Qinchuan, et al. Kinematics analysis of 5-UPS/PRPU 5-DOF parallel machine tool [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2004, 40(2):12-13. (in Chinese)