doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.04.044

零耦合度且部分解耦的 3T1R 并联机构设计与运动分析

沈惠平　许正骁　许　可　邓嘉鸣　杨廷力
(常州大学现代机构学研究中心，常州 213016)

摘要：零耦合度($\kappa=0$)且运动解耦的三平移一转动(3T1R)并联操作手机构，不仅其运动学和动力学分析简单且能得到解析解，实时控制也较容易。根据基于方位特征(POC)方程的并联机构拓扑设计理论和冗余支链消除奇异位置原理，设计了一种含冗余支链的 3T1R 并联操作手机构，对其进行拓扑结构分析，主要包括 POC 集、自由度、运动解耦性以及耦合度分析，表明其耦合度为零且具有部分运动解耦性；根据提出的基于序单开链法的运动学建模原理，方便地求解出机构的位置正解解析解；基于导出的位置逆解公式，分析了机构的工作空间、转动能力及其奇异性条件；推导出机构动平台的速度、加速度变化规律。

关键词：并联机构；零耦合度；运动解耦；拓扑设计；工作空间；奇异位置
中图分类号：TH112　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2019)04-0382-11

Design and Kinematic Analysis of Zero Coupling and Partially Decoupled 3T1R Parallel Mechanism

SHEN Huiping　XU Zhengxiao　XU Ke　DENG Jiaming　YANG Tingli
(*Research Center for Advanced Mechanism Theory*, *Changzhou University*, *Changzhou* 213016, *China*)

Abstract: The three-translation and one-rotation (3T1R) parallel manipulator with zero coupling ($\kappa=0$) and motion decoupling is not only simple in kinematics and dynamics analysis, but also easy in control. Therefore, its research and development has attracted much attention. Firstly, a novel 3T1R parallel mechanism was designed according to the topological design theory of parallel mechanism based on the position and orientation characteristic (POC) equations and principle of avoiding singularity by using redundant actuation limb. Secondly, the topological structure of POC was analyzed, including POC set, degree of freedom, motion decoupling and coupling degree analysis, which showed that the coupling degree was zero, which had partial motion decoupling. Then, according to the kinematics modeling principle based on the ordered single opened chain (SOC) method proposed by the author, the forward kinematic solution of the parallel mechanism was solved. Thirdly, based on the derived inverse kinematic solution, the workspace, rotational capacity and singularity conditions of the mechanism were analyzed. Meanwhile, the law of velocity and acceleration of the moving platform was given. The curves of velocity and acceleration were given by ADAMS and the numerical values were verified by Matlab based on the derived formulas. The research laid a theoretical foundation for the mechanical design of parallel manipulator, dynamic analysis and prototype development.

Key words: parallel mechanism; zero coupling; motion decoupling; topology design; workspace; singular position

0　引言

具有空间三平移一转动(3T1R)功能的并联机器人操作手，其工作空间大、速度快、刚度高，在现代制造业中有着良好的应用前景。但是，一般这类少自由度并联机构结构复杂、耦合度高、运动输入-输出不解耦，且易出现奇异位置，因此，4 自由度 3T1R 并联机构新机型的设计和性能研究一直受到国内外学者的关注。文献[1-3]设计了 H4、I4、Par4 等系列的 4 自由度 3T1R 并联操作手；赵铁石等[4]提出

收稿日期：2018-09-28　修回日期：2018-10-23
基金项目：国家自然科学基金项目(51375062、514755050)和江苏省重点研发计划项目(BE2015043)
作者简介：沈惠平(1965—)，男，教授，博士生导师，主要从事机器人机构学研究，E-mail：shp65@126.com

了一种 4－URU 型 3T1R 并联机器人；金琼等[5]基于单开链（Single－open－chain，SOC）方法，提出了一类 3T1R 并联机器人；KONG 等[6]基于螺旋理论，通过构建能产生 3T1R 运动的支链，综合出一组具有相同支链的并联机构；RICHARD 等[7]对一种部分解耦的 4 自由度 3T1R 并联机构进行了运动学分析；CORBEL 等[8]对 3T1R 并联机械手的加速度特性进行了研究；AMINE 等[9]对具有相同支链的 3T1R 并联机构的奇异性条件进行了研究；黄田等[10]在 H4、I4、Par4 等相似机器人主体构造的基础上，发明了一种 3T1R 的 Cross－Ⅳ型高速搬运机器人，并实现了产业化；刘辛军等[11]研发了 X4 机器人；文献[12－13]对含有 4 条相同支链的 3T1R 并联机构进行了分析。但上述 3T1R 机构大部分耦合度 κ 大（$\kappa \geqslant 2$），且运动不解耦，给运动控制及轨迹规划带来了困难。文献[14]提出了一种低耦合度且运动解耦的 3T1R 并联操作手，但因其耦合度 $\kappa = 1$，位置正解仍无法求得其解析解，给误差分析、实时控制等带来了困难。

本文提出一种零耦合度且具有部分运动解耦性的 3T1R 并联机器人机构，并对此机构的拓扑特性（POC 集、自由度、耦合度、运动耦合性）以及运动学（位置正逆解求解、工作空间与转动能力、奇异位置，以及速度、加速度）特性进行系统分析。

1　3T1R 并联机构设计及拓扑分析

1.1　机构设计

根据基于 POC 方程的并联机构拓扑结构设计理论[15－16]、并联机构结构降耦原理[17]，以及冗余支链消除奇异位置的原理[18－19]可知：需具有零耦合度（$\kappa = 0$），即要求有部分支链回路的约束度为零；需具有运动部分解耦性，即要求包含两个以上至少各含一个驱动副的基本运动链（BKC）；冗余支链消除奇异位置，即需要根据 POC 集和自由度，对支链在动静平台之间作特殊布置。根据这些分析，本文提出一种含冗余支链的零耦合度且具有部分运动解耦的 4-DOF 3T1R 并联机器人机构，如图 1 所示。

（1）该机构包括含平行四边形的一条混合支链（Hybrid single－open－chain，$HSOC_1$），包含 4 个分支链 A、B、C、D，其中，由 4 个球副组成的平行四边形（$\Diamond S_1S_2S_3S_4$），其一短边杆 3 与驱动杆 2 固接后，再用转动副 R_{11} 与静平台 0 连接，为支链 A，记作 $RPa^{(4S)}$；另一短边杆 5 的右侧延伸端，与三平行轴线转动副组（$R_{21} \parallel R_{22} \parallel R_{23}$）（记支链 B）并联连接；短边杆 5 的左侧延伸端，与另一三平行轴线转动副组（$R_{51} \parallel R_{52} \parallel R_{53}$）（记支链 C），也并联连接，这样，支

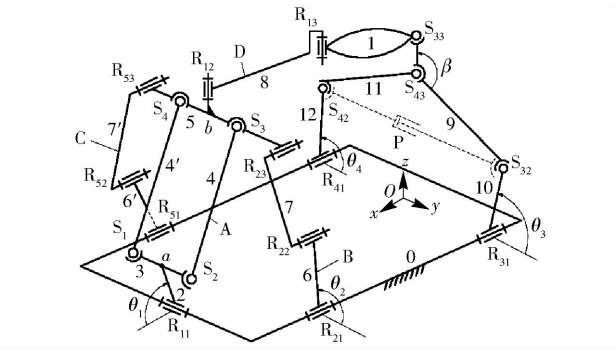


图 1　零耦合度、部分运动解耦且可避奇异的 3T1R 并联机构

Fig. 1　3T1R parallel mechanism with zero coupling degree and partial motion decoupling which can avoid singularity

链 A 与 B（或 A 与 C）构成一个子并联机构，记作：$RPa^{(4S)}3R$（3R 表示支链 B 或 C 的 3 个转动副）；同时，短边杆 5 的上侧通过与其固接的杆 8，与杆 9 两平行轴线转动副组（$R_{12} \parallel R_{13}$）（记支链 D）串联连接，但 $R_{12} \perp R_{23}$。

1.2 节将说明：该混合支链中的子并联机构（$RPa^{(4S)}3R$）的子平台输出杆 5 将产生两平移的输出；而整个混合支链的末端（即动平台 1 的一部分）将产生三平移一转动（绕 R_{13}）的输出。

（2）另外，无约束支链 $SOC_2\{R_{31}－S_{32}－S_{33}\}$ 铰接于 $SOC_3\{R_{41}－S_{42}－S_{43}\}$ 的球副 S_{43} 处，从而构成第 2 条 $HSOC_2$，因此，机构动平台 1 只有两个联接点，即 R_{13} 和 S_{33}。

静平台 0 上的各转动副轴线的布置关系为：$R_{11} \perp R_{21}$，$R_{21} \parallel R_{51}$；而 R_{21} 与 R_{31}，R_{41} 与 R_{51} 轴线分别重合。1.2 节将证明输出杆 5 两侧的任一支链 B、C 为冗余支链，设支链 C 为冗余支链。因此，可取转动副 R_{51} 为冗余驱动副：机构正常工作时，该冗余支链处于被动、随动状态；当机构出现奇异时，该冗余驱动副 R_{51} 产生动作，以消除机构奇异位置。

1.2　机构的拓扑分析

1.2.1　机构的方位特征（POC）

由文献[15－16]可知，串联、并联机构的 POC 集方程分别为

$$M_{bi} = \bigcup_{i=1}^{m} M_{Ji} \tag{1}$$

$$M_{Pa} = \bigcap_{j=1}^{v+1} M_{bj} \tag{2}$$

式中　m——运动副数　　v——独立回路数

M_{Ji}——第 i 个运动副的 POC 集

M_{bj}——第 j 条支链末端的 POC 集

M_{Pa}——机构动平台的 POC 集

选动平台 1 上任意一点 O' 为基点，由 1.1 节可知，$HSOC_1$ 包含 A、B、C、D 4 个支链，其构成分别为

$RPa^{(4S)}$(支链 A)、$R_{21} \parallel R_{22} \parallel R_{23}$(支链 B)、$R_{51} \parallel R_{52} \parallel R_{53}$(支链 C),以及 $R_{12} \parallel R_{13}$(支链 D)。因此,由式(1)、(2)可得

$$M_{HSOC_1} = (M_A \cap M_B \cap M_C) \cup M_D$$

由式(1)可得

$$M_A = \begin{bmatrix} t^1(\perp R_{11}) \\ r^1(\parallel R_{11}) \end{bmatrix} \cup$$

$$\begin{bmatrix} t^1(\parallel \diamond S_1S_2S_3S_4) \cup t^1(\perp S_1S_2) \\ r^1(\parallel S_1S_2) \cup r^1(\parallel S_2S_4) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond S_1S_2S_3S_4) \end{bmatrix}$$

$$M_B = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{41}) \\ r^1(\parallel R_{41}) \end{bmatrix} \quad M_C = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{51}) \\ r^1(\parallel R_{51}) \end{bmatrix}$$

$$M_D = \begin{bmatrix} t^1(\perp R_{13}) \cup \{t^1(\perp R_{12})\} \\ r^1(\parallel R_{13}) \end{bmatrix}$$

由式(2)可得

$$M_{(A-B)} = M_A \cap M_B = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{21}) \\ r^0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

由式(3)可知,因支链 A、B 构成一子并联机构,其输出杆 5 已得到两平移零转动(2T0R)的输出,且支链 C 与支链 B 的拓扑结构和 POC 集完全相同,支链 C 对支链 A、B 构成的子并联机构的 POC 集没有影响,因此,它已属于冗余支链。

由式(1)可得

$$M_{b1} = M_{HSOC_1} = M_{(A-B)} \cup M_D =$$

$$\begin{bmatrix} t^2(\perp R_{21}) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{13}) \\ r^1(\parallel R_{13}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{13}) \end{bmatrix}$$

$HSOC_2$末端的 POC 集为

$$M_{b2} = M_{HSOC_2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

由式(2)可得机构的 POC 集为

$$M_{Pa} = M_{b1} \cap M_{b2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{13}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{13}) \end{bmatrix}$$

因此,当静平台 0 上的 4 个转动副 R_{11}、R_{21} 和 R_{31}、R_{41} 为主动副时,动平台 1 即产生 3 个移动和 1 个转动(绕转动副 R_{13}的轴线)的输出运动。

1.2.2 自由度

并联机构全周 DOF 一般公式[12]为

$$F = \sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{v} \xi_{Lj} \tag{4}$$

其中 $$\sum_{j=1}^{v} \xi_{Lj} = \dim. \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^{j} M_{bi} \right) \cup M_{b(j+1)} \right\} \tag{5}$$

式中 F——机构自由度

f_i——第 i 个运动副的自由度

ξ_{Lj}——第 j 个独立回路的独立位移方程数

dim. ——方位特征集的维数

$\bigcap_{i=1}^{j} M_{bi}$——前 j 条支链组成的子并联机构 POC 集

$M_{b(j+1)}$——第 $j+1$ 条支链末端构件的 POC 集

由支链 A、B 组成的第 1 个回路,即 $RPa^{(4S)}3R$ 由式(5)知其独立位移方程数为

$$\xi_{L1} = \dim. \{M_A \cup M_B\} = \dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

由第 1 回路组成的第 1 个子并联机构 Sub-PM 的 DOF 和 POC 集,由式(4)可得

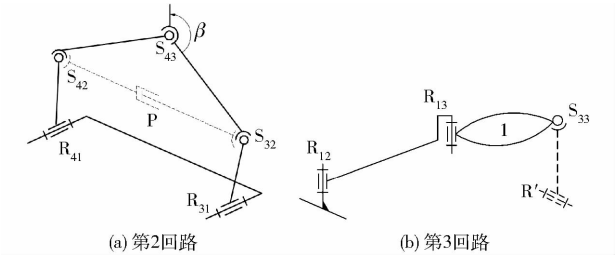
$$F_{(A-B)} = \sum f - \xi_{L1} = (5+3) - 6 = 2$$

由式(3)可得

$$M_{(A-B)} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{41}) \\ r^0 \end{bmatrix}$$

如图 2 所示,因球副 S_{32} 和 S_{42} 间的距离是变化的,故在球副 S_{32} 和 S_{42} 间设想存在一个虚拟的移动副 P(此时,可把球副 S_{32}、S_{42}、S_{43} 的组成体,视为一个整体三角形构件)。这样,由 $\{R_{31}-S_{32}-P-S_{42}-R_{41}\}$ 构成第 2 个回路,其中,绕球副 S_{32} 和 S_{42} 连线的转动自由度,对第 2 回路的运动位置没有影响,但对第 3 回路的运动位置有影响,故应将其放入第 3 回路中考虑。由式(5)易知,第 2 回路的独立位移方程数为

$$\xi_{L2} = \dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$



(a) 第2回路 (b) 第3回路

图 2 第 2、3 回路的构成

Fig. 2 Composition of the second and third loops

由式(4)可得第 2 回路组成的第 2 个子并联机构 Sub-PM 的 DOF 为

$$F_{L2} = \sum f - \xi_{L2} = (9-1) - 6 = 2$$

因球副 S_{32}、S_{42}、S_{43}组成的整体三角形构件绕球副 S_{32}和 S_{42}连线的转动,等效为一个转动副 R′,所以第 3 回路的组成为 $\{R_{12}-R_{13}-S_{33}-R'\}$,由式(5)

可得

$$\xi_{L3}=\dim.\left\{\begin{bmatrix}t^3\\r^3\end{bmatrix}\right\}=6$$

由式(4)可得整个并联机构的 DOF 为

$$F=\sum_{i=1}^{m}f_i-\sum_{j=1}^{v}\xi_{Lj}=(8+8+6)-(6+6+6)=4$$

1.2.3　机构耦合度

由基于单开链(SOC)单元的机构组成原理[15-16]可知,任一机构可分解为一系列单开链,第 j 个单开链(SOC_j)的约束度为

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m_j}f_i-I_j-\xi_{Lj}\Rightarrow\begin{cases}\Delta_j^-=-5,-4,-3,-2,-1\\\Delta_j^0=0\\\Delta_j^+=+1,+2,+3\end{cases}\tag{6}$$

式中　m_j——第 j 个 SOC_j 的运动副数

I_j——第 j 个 SOC_j 的驱动副数

一组有序的 v 个 SOC 可构成一个独立回路数为 v 的基本运动链(Basic kinematics chain,BKC),对一个 BKC 则有

$$\sum_{j=1}^{v}\Delta_j=0$$

因此,耦合度为

$$\kappa=\Delta_j^+=|\Delta_j^-|=\frac{1}{2}\min\left\{\sum_{j=1}^{v}|\Delta_j|\right\}$$

式中 $\min\left\{\sum_{j=1}^{v}|\Delta_j|\right\}$ 为 BKC 分解为 v 个 $SOC(\Delta_j)$,可有多种分配方案,取($\sum|\Delta_j|$)为最小者。

κ 揭示了机构基本回路变量之间的关联、依赖程度;κ 值越大,机构的运动学、动力学分析越复杂。

前文已计算了上述 3 个回路的独立位移方程数分别为 $\xi_{L1}=\xi_{L2}=\xi_{L3}=6$,因此,3 个回路的约束度均可由式(6)求得:$\Delta_1=8-2-6=0$,$\Delta_2=(9-1)-2-6=0$,$\Delta_3=6-0-6=0$。

上述 3 个回路均独立构成一个 BKC,因此,该机构包含 3 个 BKC,即 BKC_1、BKC_2、BKC_3,它们的耦合度分别为 $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=0$;整个机构的运动位置正解,可依次通过 BKC_1、BKC_2、BKC_3 直接求出其解析解。

2　位置分析

2.1　基于序单开链的机构位置正解求解原理

由文献[16,20]知,因任一机构可分解为若干个 BKC,而每个 BKC 又可分解出约束度为正值、零、负值 3 种形式的单开链,因此,机构位置正解的求解,可转换为 3 种单开链的位置求解,而这 3 种单开链的约束特性及其建模方法为:

(1)约束度为正值的 SOC(Δ_j^+),会使机构自由度增加 Δ_j^+;为确定其运动,需在约束度为正值的 SOC(Δ_j^+)上设定 Δ_j^+ 个虚拟变量($\Delta_j^+=\kappa$)。

(2)约束度为零的 SOC(Δ_j^0),不影响机构自由度,其运动具有确定性,即其位置正解能独立求解。

(3)约束度为负值的 SOC(Δ_j^-),使机构自由度减少$|\Delta_j^-|$,即对机构施加了$|\Delta_j^-|$个约束方程($|\Delta_j^-|=\kappa$)。

因 SOC(Δ_j^+)中的虚拟变量数目 Δ_j^+,恰等于约束方程数目$|\Delta_j^-|$,因此,易建立含 Δ_j^+ 个变量的位置方程。对本机构而言,因其 3 个 BKC 的耦合度均为零,即 $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=0$,因此,可直接得到解析解。

2.2　参数标注

建立图 1 机构的运动模型,如图 3a 所示,因冗余支链正常情况下处于随动状态,对机构正常工作不起作用,因此,机构运动学分析时,可不考虑图 3a 中的冗余支链(即 $A_5-B_5-C_5$ 支链);同时,为了计算方便,将图 1 中的 β 定为 180°,即点 B_3、C_4、C_3 在一条直线上。

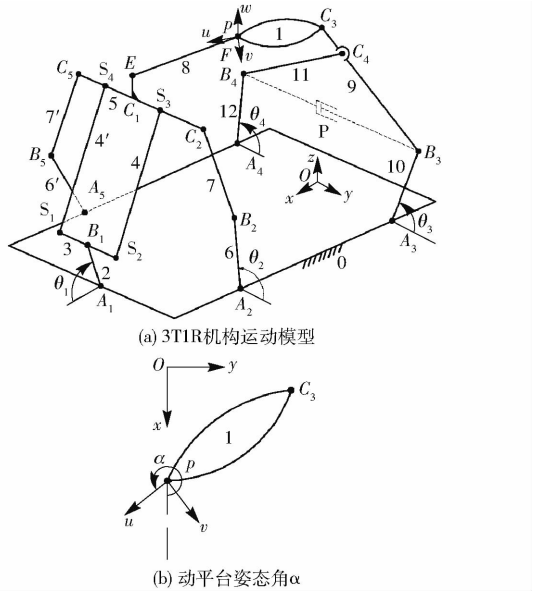


图 3　3T1R 并联机构的运动建模

Fig. 3　Kinematic modeling of 3T1R parallel mechanism

设该机构静平台 0 为矩形,A_1、A_2、A_3、A_4 分别表示位于静平台 0 上的转动副 R_{11}、R_{21}、R_{31} 和 R_{41} 的位置。

在静平台上建立 $Oxyz$ 坐标系,坐标系原点 O 位于 A_3 和 A_4 连线的中点,x 轴过 A_1 点,y 轴与 A_3A_4 重合,z 轴由右手法则确定;在动平台 1 上建立 $puvw$ 坐标系,原点 p 位于 F 点(即动平台 1 与转动副 R_{13} 的相连处),u 轴平行于 FC_3 连线,w 轴与 z 轴平行,v 轴由右手法则确定。

设 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 分别为转动副 R_{11}、R_{21}、R_{31}、R_{41}

的输入角(θ_1为 x 轴正向与杆 2 的夹角,θ_2、θ_3、θ_4分别为 y 轴正向与杆 6、10、12 的夹角),如图 3a 所示;动平台 1 的姿态角 α 为 u 轴正向与 x 轴正向之间的夹角,如图 3b 所示。

该机构结构参数为:动平台长为 $FC_3=l_3$,主动杆 $A_1B_1=A_2B_2=A_3B_3=A_4B_4=l_4$($<l_1$);从动杆 $B_1C_1=B_2C_2=B_3C_3=l_5$;其它尺寸 $S_3C_1=S_3C_2=C_3C_4=l_6$,$EF=l_7$,$EC_1=l_8$,$B_3C_4=B_4C_4=l_9$。易知,在静坐标系 $Oxyz$ 下,点 A_1、A_2、A_3和 A_4的坐标分别为$(2l_1,0,0)$、$(l_1,l_2,0)$、$(0,l_2,0)$、$(0,-l_2,0)$。

2.3 位置正解求解

已知主动输入角 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4,求动平台 1 上 p 点的位置(x,y,z)及姿态角 α。

2.3.1 BKC_1的位置求解

求得点 B_1、B_2的坐标分别为:$(2l_1+l_4\cos\theta_1,0,l_4\sin\theta_1)$、$(l_1,l_2+l_4\cos\theta_2,l_4\sin\theta_2)$。因 BKC_1的 $\kappa_1=0$,因此,输出杆 5 上 C_1点的位置计算如下:

由式(3)可知,输出杆 5 的输出运动为两平移(2T)且始终平行于 yOz 平面,因此,$x_{C_1}=l_1$,即 C_2的坐标为$(l_1,y_{C_1}+2l_6,z_{C_1})$。

由杆长 $B_1C_1=B_2C_2=l_5$ 可得约束方程

$$\begin{cases}(x_{B_1}-l_1)^2+y_{C_1}^2+(z_{B_1}-z_{C_1})^2=l_5^2\\(y_{B_4}-y_{C_1}-2l_6)^2+(z_{B_4}-z_{C_1})^2=l_5^2\end{cases}\tag{7}$$

并整理得

$$Hy_{C_1}+Mz_{C_1}=N$$

其中 $H=2(y_{B_2}-2l_6)$ $M=2(z_{B_2}-z_{B_1})$

$$N=(y_{B_2}-2l_6)^2+z_{B_2}^2-z_{B_1}^2-(x_{B_1}-l_1)^2$$

若 $H=M=0$,则 $N=-(x_{B_1}-l_1)^2=0$,但由于 $l_4<l_1$,即 $x_{B_1}>l_1$,因此,H、M 不能同时为零。

(1)当 $H=0$ 时

$$\begin{cases}z_{C_1}=\dfrac{N}{M}\\y_{C_1}=\pm\sqrt{l_5^2-(x_{B_1}-l_1)^2-(z_{B_1}-z_{C_1})^2}\end{cases}$$

(2)当 $H\neq0$ 时

$$\begin{cases}z_{C_1}=\dfrac{J_1\pm\sqrt{J_1^2-4P_1Q_1}}{2P_1}\\y_{C_1}=\dfrac{N-Mz_{C_1}}{H}\end{cases}$$

其中 $P_1=H^2+M^2$ $J_1=2(MN+z_{B_1}H^2)$

$$Q_1=H^2[(x_{B_1}-l_1)^2+z_{B_1}^2-l_5^2]+N^2$$

2.3.2 BKC_2的位置求解

在 BKC_2中,球副 S_{32}和 S_{42}连线上的任意一点均可作为整个回路的末端点,故只需这两个球副的坐标即可求解连线上任意一点的坐标。

根据主动臂的杆长和输入角 θ_3、θ_4即可求出点 B_3、B_4的坐标分别为$(0,l_2+l_4\cos\theta_3,l_4\sin\theta_3)$、$(0,-l_2+l_4\cos\theta_4,l_4\sin\theta_4)$。

2.3.3 BKC_3的位置求解

在三角形 $B_4C_4B_3$中,由杆长约束 $B_3C_4=B_4C_4=l_9$可得

$$\begin{cases}(x_{C_4}-x_{B_3})^2+(y_{C_4}-y_{B_3})^2+(z_{C_4}-z_{B_3})^2=l_9^2\\(x_{C_4}-x_{B_4})^2+(y_{C_4}-y_{B_4})^2+(z_{C_4}-z_{B_4})^2=l_9^2\end{cases}\tag{8}$$

解方程组可得

$$\begin{cases}x_{C_4}=\pm\sqrt{H_1-(y_{C_4}-y_{B_4})^2}\\y_{C_4}=\dfrac{M_1}{N_1}\\z_{C_4}=(z_{C_3}-z_{B_3})\dfrac{l_9}{l_6+l_9}+z_{B_3}\end{cases}$$

其中 $M_1=(z_{C_4}-z_{B_4})^2-(z_{C_4}-z_{B_3})^2+y_{B_4}^2-y_{B_3}^2$

$$N_1=2(y_{B_4}-y_{B_3})\quad H_1=l_9^2-(z_{C_4}-z_{B_4})^2$$

由于 B_3、C_4、C_3在同一杆上,可根据杆长比例求得 C_3点的坐标为

$$\begin{cases}x_{C_3}=(x_{C_4}-x_{B_3})\dfrac{l_9+l_6}{l_9}+x_{B_3}\\y_{C_3}=(y_{C_4}-y_{B_3})\dfrac{l_9+l_6}{l_9}+y_{B_3}\\z_{C_3}=z_{C_1}+l_8\end{cases}$$

在 $E-F-C_3$中,由杆长约束 $FC_3=l_3$和 $EF=l_7$可得

$$\begin{cases}(x-x_{C_3})^2+(y-y_{C_3})^2+(z-z_{C_3})^2=l_3^2\\(x-x_{C_1})^2+(y-y_{C_1})^2+(z-z_{C_1}-l_8)^2=l_7^2\end{cases}\tag{9}$$

解方程组可得

$$\begin{cases}x=\pm\sqrt{T-(y-y_{C_3})^2}+x_{C_3}\\y=\dfrac{-J_2\pm\sqrt{J_2^2-4P_2Q_2}}{2P_2}\\z=z_{C_3}=z_{C_1}+l_8\end{cases}\tag{10}$$

其中 $T=l_7^2-(z-z_{C_1}-l_8)^2$

$$P_2=(y_{C_1}-y_{C_3})^2+(x_{C_3}-x_{C_1})^2$$

$$J_2=4[P_3(y_{C_1}-y_{C_3})-2y_{C_3}(x_{C_3}-x_{C_1})^2]$$

$$Q_2=P_3^2-4(x_{C_3}-x_{C_1})^2(l_3^2-y_{C_3}^2)$$

$$P_3=l_7^2-l_3^2+y_{C_3}^2-y_{C_1}^2-(x_{C_3}-x_{C_1})^2$$

至此,动平台末端点 p 的坐标已求得,而转角 α 可由动平台上 p 与 C_3两点的坐标求得,计算公式为

$$\alpha=2\arctan\frac{y-y_{C_3}}{x-x_{C_3}}\tag{11}$$

由式(10)、(11)可知,$x=\varphi(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$、$y=f(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$、$z=\phi(\theta_1,\theta_2)$、$\alpha=\eta(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$,

因此，该机构具有输入-输出（I－O）部分运动解耦性。

2.4　位置逆解求解

已知动平台 p 的坐标(x,y,z)和姿态角 α，求输入角 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4。

由机构中 E、F、C_3处于同一水平面及杆长约束 $EF=l_7$，可得 C_1、C_3的坐标为$(l_1, y\pm\sqrt{l_7^2-(l_1-x)^2}, z-l_8)$、$(-l_3\cos\alpha+x, -l_3\sin\alpha+y, z)$。

而 C_2、C_4的坐标分别根据 C_1、C_3的坐标可得

$$C_2=(l_1, y_{C_1}+2l_6, z_{C_1})$$

$$\begin{cases} x_{C_4}=(x_{C_3}-x_{B_3})\dfrac{l_9}{l_9+l_6}+x_{B_3} \\ y_{C_4}=(y_{C_3}-y_{B_3})\dfrac{l_9}{l_9+l_6}+y_{B_3} \\ z_{C_4}=(z_{C_3}-z_{B_3})\dfrac{l_9}{l_9+l_6}+z_{B_3} \end{cases}$$

由杆长约束 $B_1C_1=B_2C_2=B_3C_3=l_5$，$B_4C_4=l_9$ 有

$$\begin{cases} (x_{B_1}-x_{C_1})^2+(y_{B_1}-y_{C_1})^2+(z_{B_1}-z_{C_1})^2=l_5^2 \\ (x_{B_2}-x_{C_2})^2+(y_{B_2}-y_{C_2})^2+(z_{B_2}-z_{C_2})^2=l_5^2 \\ (x_{B_3}-x_{C_3})^2+(y_{B_3}-y_{C_3})^2+(z_{B_3}-z_{C_3})^2=l_5^2 \\ (x_{B_4}-x_{C_4})^2+(y_{B_4}-y_{C_4})^2+(z_{B_4}-z_{C_4})^2=l_9^2 \end{cases} \tag{12}$$

由此可得

$$\theta_i=2\arctan\frac{2z_il_4\pm\sqrt{4z_i^2l_4^2-a_ic_i}}{a_i}\quad(i=1,2,3,4) \tag{13}$$

其中　$z_1=z_2=z_{C_1}$　$z_3=z$　$z_4=z_3-\dfrac{(z_3-z_{B_4})l_6}{l_6+l_9}$

$$a_1=l_1^2-2l_1l_4+l_4^2-l_5^2+y_{C_1}^2+z_{C_1}^2$$

$$c_1=l_1^2+2l_1l_4+l_4^2-l_5^2+y_{C_1}^2+z_{C_1}^2$$

$$a_2=l_4^2+l_2^2-2l_2y_{C_2}+y_{C_2}^2+z_{C_2}^2-l_5^2-2l_2l_4+2l_4y_{C_2}$$

$$c_2=l_4^2+l_2^2-2l_2y_{C_2}+y_{C_2}^2+z_{C_2}^2-l_5^2+2l_2l_4-2l_4y_{C_2}$$

$$a_3=x_{C_3}^2+l_4^2-2l_2l_4+l_2^2-2l_2y_{C_3}+y_{C_3}^2+z_{C_3}^2-l_5^2+2l_4y_{C_3}$$

$$c_3=x_{C_3}^2+l_4^2+l_2^2-2l_2y_{C_3}+y_{C_3}^2+z_{C_3}^2-l_5^2+2l_2l_4-2l_4y_{C_3}$$

$$a_4=x_{C_4}^2+l_4^2+2l_2l_4+l_2^2+2l_2y_{C_4}+y_{C_4}^2+z_{C_4}^2-l_9^2+2l_4y_{C_3}$$

$$c_4=x_{C_4}^2+l_4^2+l_2^2+2l_2y_{C_4}+y_{C_4}^2+z_{C_4}^2-l_9^2-2l_2l_4-2l_4y_{C_4}$$

综上，C_1点坐标有两组解，且输入角 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 均有两组解，故该机构位置逆解共有 32 组解。

2.5　位置正逆解的实例验算

2.5.1　正解算例

设并联机构结构参数为 $l_1=300$ mm，$l_2=300$ mm，$l_3=150$ mm，$l_4=250$ mm，$l_5=800$ mm，$l_6=100$ mm，$l_7=200$ mm，$l_8=25$ mm，$l_9=700$ mm。

设 4 个输入角分别为：$\theta_1=51.45°$、$\theta_2=31.81°$、$\theta_3=76.61°$、$\theta_4=124.57°$。

根据位置正解式（10）、（11）求得 4 组实数正解，如表 1 所示。

表 1　位置正解数值

Tab. 1　Numerical values of direct kinematics

序号	x/mm	y/mm	z/mm	α/(°)
1	100.222 5	－45.239 5	876.995 2	34.27
2	102.836 5	－2.245 0	876.995 2	58.18
3	164.117 3	－182.560 1	876.995 2	－20.64
4	126.174 5	－134.726 6	876.995 2	－1.92

2.5.2　逆解算例

将表 1 中序号 1 数据代入逆解式（13），求得 4 个输入角分别为：$\theta_1'=51.45°$、$\theta_2'=31.81°$、$\theta_3'=76.61°$、$\theta_4'=124.57°$，这与求解正解中给定的 4 个输入角一致；用表 1 中其余 3 组正解的数据，同样可得相同的输入角，因此，正解、逆解公式推导正确。

3　工作空间和转动能力

3.1　工作空间

并联机构的工作空间，是指在考虑运动副转角范围（球副转角为 ±30°）、无奇异及杆长不干涉等约束条件下，末端执行器的工作区域。本文采用极限边界搜索法对该并联机构工作空间进行分析，首先，根据杆长设定工作空间的搜索范围，然后，基于位置逆解式（12）求得该并联机构的工作空间。

确定空间三维搜索范围：600 mm≤z≤1 000 mm，$-\pi\leq\theta\leq\pi$，$0\leq\rho\leq800$ mm（略大于杆件的活动范围即可）。通过 Matlab 软件编程，得到该并联机构的三维工作空间如图 4 所示；取不同 z 值时的 $x-y$ 截面图，如图 5 所示。

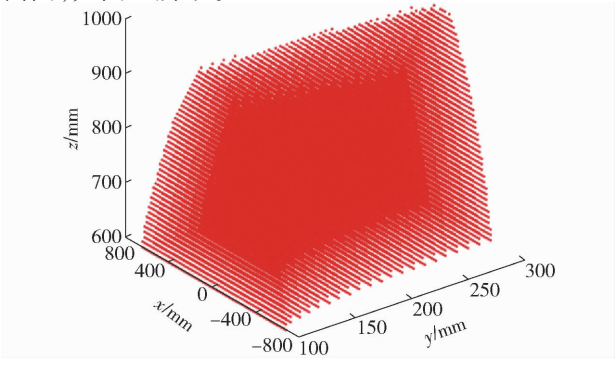


图 4　工作空间三维图

Fig. 4　Three dimensional diagram of workspace

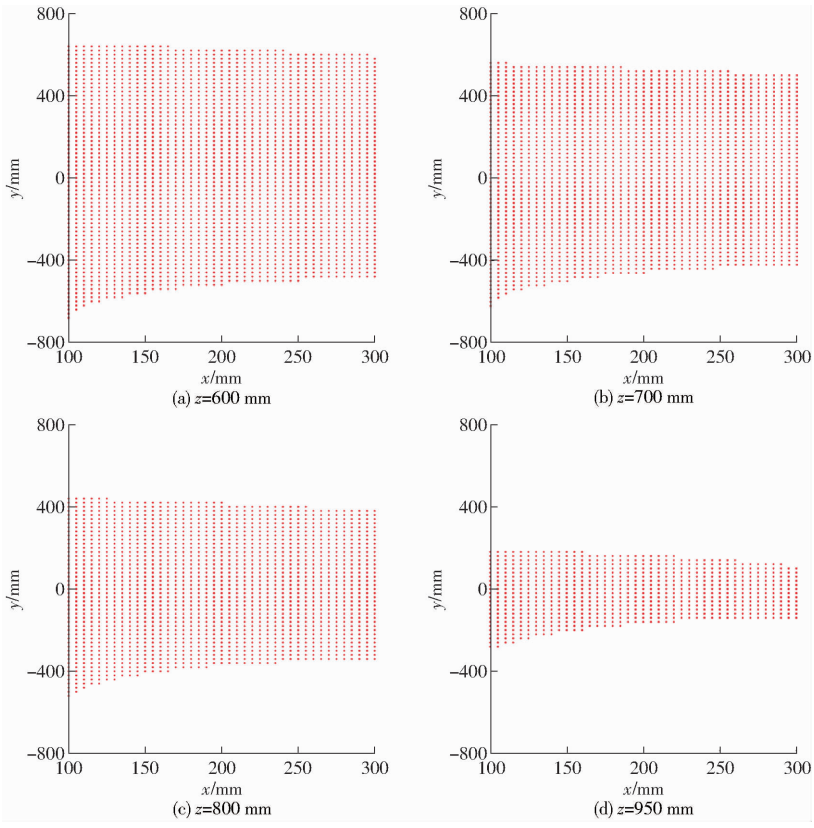


图 5 工作空间的 $x-y$ 截面图

Fig. 5 $x-y$ sections of workspace

由图 4、5 可得,在 $z\in[600\ \text{mm},950\ \text{mm}]$ 范围内,工作空间截面连续,且随着 z 增加,截面面积逐渐缩小。由于杆 5 的运动始终垂直于 x 轴且位于支链 B、C 所组成的平面内,故动平台上的 p 点在 x 方向上的极限位置,只与杆 8 的杆长 l_7 有关,故工作空间仅在 $x\in[100\ \text{mm},300\ \text{mm}]$ 上存在。

3.2 转动能力

转动能力是指动平台(末端执行器)在工作区域内的转角范围,是衡量并联机构输出转动灵活性的重要指标。本文采用与求解工作空间一样的极限边界搜索法,基于逆解式(12)分析某一固定 z 值处平面内各点的转动能力。现取 $z=600$ mm,通过 Matlab,求得该高度 z 上 $x-y$ 截面内的转角 α 的范围,如图 6 所示。

由图 6 可知,动平台在 $z=600$ mm 时,转角 α 的范围很大,能达到 $[-180°,180°]$ 的区域面积为 0.23 m^2,约占总区域面积(0.33 m^2)的 70%,表明在该平面内,动平台具有较大的转动能力;在 $z=700$、800 mm 的截面内,其对应的数值分别为 66% 和 54%,因此,当动、静平台的距离变大时,动平台的转动能力会逐渐削弱。

4 奇异位置分析

当机构处于奇异位置时,运动会出现分岔现象,此时,机构的运动不具有确定性。因此,在并联机构设计时,有必要对其可能存在的奇异位置进行分析。

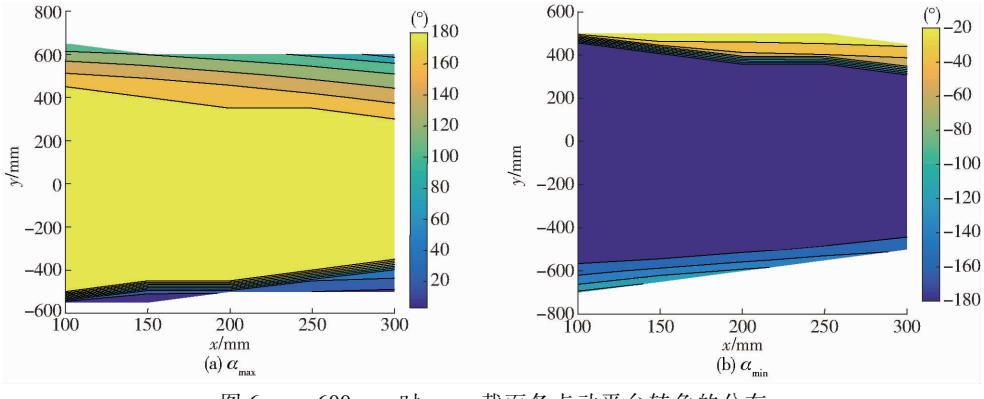


图 6 $z=600$ mm 时 $x-y$ 截面各点动平台转角的分布

Fig. 6 Distributions of rotation angles of PM at $z=600$ mm

本文通过对位置逆解公式的求导，得出并分析雅可比矩阵，进一步得到该并联机构可能存在的奇异位置。

4.1　雅可比矩阵求解

设该机构动平台的输出速度为 $\boldsymbol{V}=[\dot{x}\quad\dot{y}\quad\dot{z}\quad\dot{\alpha}]^{\mathrm{T}}$，主动输入角速度为 $\boldsymbol{\omega}=[\dot{\theta}_1\quad\dot{\theta}_2\quad\dot{\theta}_3\quad\dot{\theta}_4]^{\mathrm{T}}$；将式(12)两边同时对时间 t 求导，可得

$$\boldsymbol{J}_p\boldsymbol{V}=\boldsymbol{J}_q\boldsymbol{\omega} \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_p=\begin{bmatrix}f_{11}&f_{12}&f_{13}&f_{14}\\f_{21}&f_{22}&f_{23}&f_{24}\\f_{31}&f_{32}&f_{33}&f_{34}\\f_{41}&f_{42}&f_{43}&f_{44}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_q=-\begin{bmatrix}u_{11}&0&0&0\\0&u_{22}&0&0\\0&0&u_{33}&0\\0&0&u_{43}&u_{44}\end{bmatrix}$$

$$u_{11}=(z_{B_1}-z_{C_1})l_4\cos\theta_1-(x_{B_1}-x_{C_1})l_4\sin\theta_1$$

$$u_{22}=(z_{B_2}-z_{C_2})l_4\cos\theta_2-(y_{B_2}-y_{C_2})l_4\sin\theta_2$$

$$u_{33}=(z_{B_3}-z_{C_3})l_4\cos\theta_3-(y_{B_3}-y_{C_3})l_4\sin\theta_3$$

$$u_{43}=-\frac{l_6}{l_6+l_9}[(z_{B_4}-z_{C_4})l_4\cos\theta_3-(y_{B_4}-y_{C_4})l_4\sin\theta_3]$$

$$u_{44}=(z_{B_4}-z_{C_4})l_4\cos\theta_4-(y_{B_4}-y_{C_4})l_4\sin\theta_4$$

$$f_{11}=\pm\frac{y_{C_1}(l_1-x)}{\sqrt{l_7^2-(l_1-x)^2}}$$

$$f_{12}=y_{C_1}\quad f_{13}=z_{C_1}-z_{B_1}\quad f_{14}=0$$

$$f_{21}=\pm\frac{(y_{B_2}-y_{C_2})(l_1-x)}{\sqrt{l_7^2-(l_1-x)^2}}\quad f_{22}=y_{C_2}-y_{B_2}$$

$$f_{23}=z_{C_2}-z_{B_2}\quad f_{24}=0$$

$$f_{31}=x_{C_3}\quad f_{32}=y_{C_3}-y_{B_3}\quad f_{33}=z_{C_3}-z_{B_3}$$

$$f_{34}=(y_{B_3}-y_{C_3})l_3\cos\alpha+x_{C_3}l_3\sin\alpha$$

$$f_{41}=\frac{l_9}{l_9+l_6}x_{C_4}\quad f_{42}=\frac{l_9}{l_9+l_6}(y_{C_4}-y_{B_4})$$

$$f_{43}=\frac{l_9}{l_9+l_6}(z_{C_4}-z_{B_4})$$

$$f_{44}=\frac{l_9}{l_9+l_6}(y_{B_4}-y_{C_4})l_3\cos\alpha+\frac{l_9}{l_9+l_6}x_{C_4}l_3\sin\alpha$$

4.2　奇异位置求解

当雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}_p$ 和 $\boldsymbol{J}_q$ 中，只要有一个矩阵的行列式为零，该机构就会出现奇异位置。据此，可将并联机构的奇异位置分为两类：输入奇异、输出奇异。

4.2.1　输入奇异

当 $\det(\boldsymbol{J}_q)=0$ 时，机构发生输入奇异，此时机构的执行构件将失去某个方向的运动能力。一般此时的位形情况是一个运动链达到了工作空间的边界。

由 $\det(\boldsymbol{J}_q)=0$ 得 $\boldsymbol{J}_q$ 矩阵的行列式解的集合为

$$W=\{W_1\cup W_2\cup W_3\cup W_4\}$$

当 $W_1=(z_{B_1}-z_{C_1})l_4\cos\theta_1-(x_{B_1}-x_{C_1})l_4\sin\theta_1=0$，即杆 2 和平行四边形短边中点连线在 Oxz 面上的投影共线，如图 7a 所示。

当 $W_2=(z_{B_2}-z_{C_2})l_4\cos\theta_2-(y_{B_2}-y_{C_2})l_4\sin\theta_2=0$，即杆 6 和杆 7 在 Oyz 面上的投影共线，在当前的杆长条件下不会出现这种情况。

当 $W_3=(z_{B_3}-z_{C_3})l_4\cos\theta_3-(y_{B_3}-y_{C_3})l_4\sin\theta_3=0$，即杆 10 和杆 9 在 Oyz 面上的投影共线，如图 7b 所示。

当 $W_4=(z_{B_4}-z_{C_4})l_4\cos\theta_4-(y_{B_4}-y_{C_4})l_4\sin\theta_4=0$，即杆 12 和杆 11 在 Oyz 面上的投影共线，如图 7c 所示。

4.2.2　输出奇异

当 $\det(\boldsymbol{J}_p)=0$，机构发生输出奇异，此时当所有的主动件锁住时，执行构件依旧可以产生局部运动，从而使输出产生不确定性。

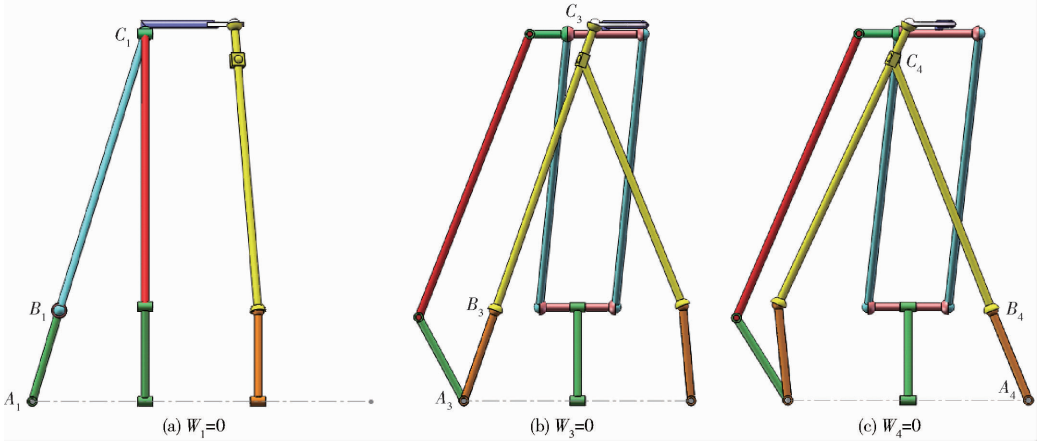


图 7　输入奇异位置

Fig. 7　Input singularity position

将矩阵 $\boldsymbol{J}_p$ 看作 4 个列向量,即

$$\boldsymbol{J}_p=[\boldsymbol{e}_1\quad \boldsymbol{e}_2\quad \boldsymbol{e}_3\quad \boldsymbol{e}_4]$$

为使 $\det(\boldsymbol{J}_p)=0$,有以下 3 种情况:

(1)两个向量线性相关

设 $k\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_3$(即 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_3$ 线性相关),此情形可导出 3 种奇异条件,由式(10)可得:

当 $k[f_{12}\quad f_{13}]=[f_{32}\quad f_{33}]$,即

$$\frac{y_{C_1}-y_{B_1}}{z_{C_1}-z_{B_1}}=\frac{y_{C_3}-y_{B_3}}{z_{C_3}-z_{B_3}}$$

平行四边形短边中点连线和杆 9 在 Oyz 平面上的投影平行,如图 8a 所示。

当 $kf_{11}=f_{31}$,即

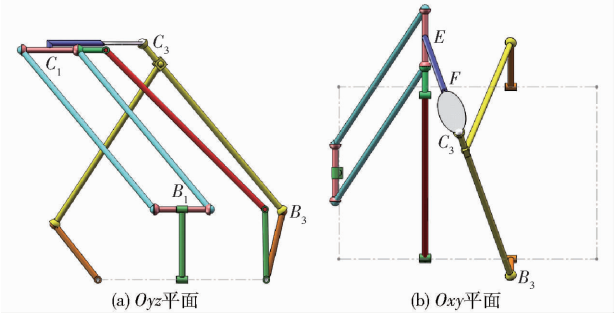
$$\frac{y_E-y_F}{z_E-z_F}=\frac{y_{C_3}-y_{B_3}}{z_{C_3}-z_{B_3}}$$

杆 9 和杆 8 在 Oxy 平面上的投影平行,如图 8b所示。

当 $kf_{14}=f_{34}$,即

$$\frac{y_{C_3}-y_{B_3}}{x_{C_3}-x_{B_3}}=\tan\alpha$$

杆 9 和 FC_3 连线在 Oxy 平面上的投影平行,如图 8b 所示。



(a) Oyz平面 (b) Oxy平面

图 8 输出奇异位置(1)

Fig. 8 Output singularity (1)

两向量线性相关的其他组合分析与此类似,不再一一赘述。

(2)3 个向量线性相关

设 $\boldsymbol{e}_3=k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2(k_1k_2\neq0)$,则有:

当$\begin{bmatrix}f_{32}\\f_{33}\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}f_{12}\\f_{13}\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}f_{22}\\f_{23}\end{bmatrix}$,即

$$\frac{y_{C_3}-y_{B_3}}{z_{C_3}-z_{B_3}}=\frac{k_1(y_{C_1}-y_{B_1})+k_2(y_{C_2}-y_{B_2})}{k_1(z_{C_1}-z_{B_1})+k_2(z_{C_2}-z_{B_2})}$$

平行四边形短边中点连线、杆 7 和杆 9 在 Oyz 平面上的投影不平行,如图 9a 所示。

当 $k_1f_{11}+k_2f_{21}=f_{31}$,即

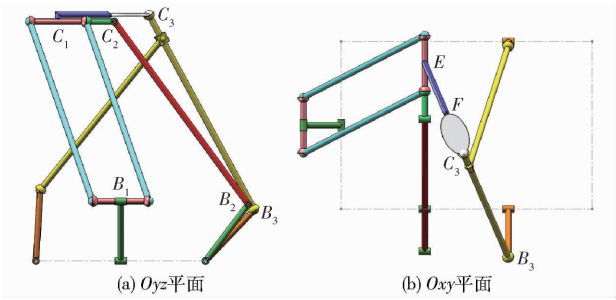
$$\frac{y_E-y_F}{x_E-x_F}=\frac{y_{C_3}-y_{B_3}}{x_{C_3}-x_{B_3}}$$

杆 9 和杆 8 在 Oxy 平面上的投影平行,如图 9b所示。

当 $k_1f_{14}+k_2f_{24}=f_{34}$,即

$$\frac{y_{C_3}-y_{B_3}}{x_{C_3}-x_{B_3}}=\tan\alpha$$

杆 9 和 FC_3 连线在 Oxy 平面上的投影平行,如图 9b 所示。



(a) Oyz平面 (b) Oxy平面

图 9 输出奇异位置(2)

Fig. 9 Output singularity (2)

其余情况分析过程类似,不再一一赘述。

(3)4 个向量线性相关

设 $\boldsymbol{e}_2=k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_3+k_3\boldsymbol{e}_4(k_1k_2k_3\neq0)$,结合前面两种情况的分析,此时,$k_1$、$k_2$、$k_3$的值无法解出,此种情况不存在。

5 速度与加速度

5.1 速度公式

由式(12)的 4 个方程,可表示成唯一形式$f(x,y,z,\alpha)=0$,全微分后可得

$$\boldsymbol{J}_p\begin{bmatrix}\mathrm{d}x\\\mathrm{d}y\\\mathrm{d}z\\\mathrm{d}\alpha\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}_q\begin{bmatrix}\mathrm{d}\theta_1\\\mathrm{d}\theta_2\\\mathrm{d}\theta_3\\\mathrm{d}\theta_4\end{bmatrix}\tag{15}$$

对式(15)两边同时除以 $\mathrm{d}t$ 得

$$\boldsymbol{J}_p\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{J}_q\dot{\boldsymbol{q}}\tag{16}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{X}}=[\dot{x}\quad\dot{y}\quad\dot{z}\quad\dot{\alpha}]$ $\dot{\boldsymbol{q}}=[\dot{\theta}_1\quad\dot{\theta}_2\quad\dot{\theta}_3\quad\dot{\theta}_4]$

当机构不存在奇异位置时,$\boldsymbol{J}_p$可逆,则

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{J}_p^{-1}\boldsymbol{J}_q\dot{\boldsymbol{q}}\tag{17}$$

式(17)即为动平台原点 p 的速度正解公式。

5.2 加速度公式

取式(15)对时间 t 求导,可得

$$\boldsymbol{J}_p\begin{bmatrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\\\ddot{z}\\\ddot{\alpha}\end{bmatrix}+\boldsymbol{J}_q\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\\ddot{\theta}_2\\\ddot{\theta}_3\\\ddot{\theta}_4\end{bmatrix}+\boldsymbol{K}_0=0\tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{K}_0=[K_1\quad K_2\quad K_3\quad K_4]^{\mathrm{T}}$,表示式(15)中 $\boldsymbol{J}_p$和 $\boldsymbol{J}_q$内各项元素对时间 t 的导数。

当机构不存在奇异位置时，$\boldsymbol{J}_p$ 可逆，则

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{J}_p^{-1}\boldsymbol{J}_q\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{J}_p^{-1}\boldsymbol{K}_0 \tag{19}$$

式(19)即为动平台原点 p 的加速度求解公式。

5.3　算例与仿真

取 4 个主动臂的输入角运动规律分别为 $\theta_1 = 10°\cos t$，$\theta_2 = -10°\cos t$，$\theta_3 = 12°\cos t$，$\theta_4 = 4.5°\cos t$。则其输入角速度、加速度的变化规律分别为 $\dot{\boldsymbol{q}} = [-10°\sin t, 10°\sin t, -12°\sin t, -4.5°\sin t]$，$\ddot{\boldsymbol{q}} = [-10°\cos t, 10°\cos t, -12°\cos t, -4.5°\cos t]$。

通过 Matlab 编程计算，得到动平台 1 的速度与加速度，分别如表 2、3 所示。

表 2　动平台速度

Tab. 2　Velocity of moving platform

时间/s	$\dot{x}$/(mm·s^{-1})	$\dot{y}$/(mm·s^{-1})	$\dot{z}$/(mm·s^{-1})	$\dot{\alpha}$/((°)·s^{-1})
1	-24.596	-25.649	-53.780	-11.992
2	-15.854	-31.977	-66.208	-24.639
3	-2.829	-2.058	-11.051	-3.317
4	14.671	19.335	55.966	19.130
5	10.547	51.439	64.249	25.650

表 3　动平台加速度

Tab. 3　Acceleration of moving platform

时间/s	$\ddot{x}$/(mm·s^{-2})	$\ddot{y}$/(mm·s^{-2})	$\ddot{z}$/(mm·s^{-2})	$\ddot{\alpha}$/((°)·s^{-2})
1	53.361	-90.840	-42.783	-43.334
2	-1.246	46.974	24.800	16.159
3	19.260	14.272	75.401	22.654
4	10.646	38.205	45.928	20.898
5	8.643	-26.340	-28.602	-23.329

同时，将该并联机构的三维模型，通过 Solid - Works 导入到 ADAMS 软件中进行仿真，得到动平台的速度与加速度曲线，分别如图 10、11 所示。

通过对比表 2 和图 10 及表 3 和图 11 可以得到，运用 Matlab 对式(15) ~ (19)进行编程计算得到的数值，与运用 ADAMS 仿真得到的曲线图基本一致，其相对误差仅为 0.1%，例：表 2 中 $t = 2$ s 时的数据与图 10 中对应的 4 个数值(-15.800，-31.890，-66.215，-24.608)基本一致，从而验证了所推导的速度与加速度公式的正确性。该机构动平台的速度、加速度曲线，变化连续平稳、无突变峰值，具有较好的运动稳定性。

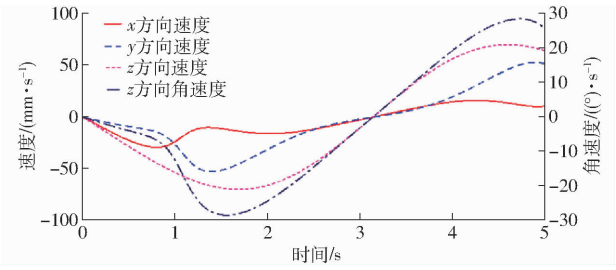


图 10　动平台的速度曲线

Fig. 10　Velocity curves of moving platform

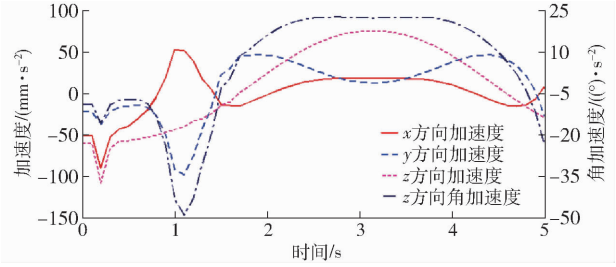


图 11　动平台的加速度曲线

Fig. 11　Acceleration curves of moving platform

6　结论

(1)揭示了该机构的 POC、自由度、耦合度、运动耦合性等重要拓扑结构特征，为简化其运动学分析奠定了基础。

(2)根据提出的基于序单开链的运动学建模原理，建立了该机构位置正解的求解模型，求解出了位置正解的解析解。

(3)基于导出的位置逆解公式，对该机构的工作空间和转动能力进行了分析，发现其工作空间连续且转动能力良好。

(4)分析了该机构可能存在的奇异位置及其出现的几何条件，并通过雅可比矩阵推导出该机构动平台的速度、加速度变化规律。

参　考　文　献

[1] PIERROT F, COMPANY O. H4: a new family of 4-DOF parallel robots[C]// Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 1999:508 - 513.

[2] KRUT S, COMPANY O, BENOIT M, et al. I4:a new parallel mechanism for SCARA motions[C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2003:1875 - 1880.

[3] NABAT V, COMPANY O, KRUT S, et al. Par4:very high speed parallel robot for pick-and-place[C]// Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems,2005:1202 - 1207.

[4] 赵铁石，黄真. 欠秩空间并联机器人输入选取的理论与应用[J]. 机械工程学报,2000,36(10):81 - 85.
ZHAO Tieshi, HUANG Zhen. Theory and application of selecting actuating components of spatial parallel mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2000,36(10):81 - 85. (in Chinese)

[5] 金琼, 杨廷力, 刘安心, 等. 基于单开链单元的三平移一转动并联机器人机构型综合及分类[J]. 中国机械工程, 2001, 12(9):1038 - 1043.
JIN Qiong, YANG Tingli, LIU Anxin, et al. Structural synthesis and classification of the 4DOF(3T - 1R) parallel robot mechanisms based on the units of single-opened-chain[J]. China Mechanical Engineering, 2001, 12(9):1038 - 1043. (in Chinese)

[6] KONG X W, GOSSELIN C M. Type synthesis of 3T1R 4-DOF parallel manipulators based on screw theory[J]. Robotics and Automation, IEEE Transactions on, 2004, 20(2):181 - 190.

[7] RICHARD P L, GOSSELIN C M, KONG Xianwen. Kinematic analysis and prototyping of a partially decoupled 4-DOF 3T1R parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 129(6):611 - 616.

[8] CORBEL D, GOUTTEFARDE M, COMPANY O, et. al. Actuation redundancy as a way to improve the acceleration capabilities of 3T and 3T1R pick-and-place parallel manipulators[J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics, 2010, 2(4): 041002 - 041002 - 13.

[9] AMINE S, MASOULEH M T, CARO S, et al. Singularity conditions of 3T1R parallel manipulators with identical limb structure [J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics, 2012, 4(1):49 - 75.

[10] 黄田, 赵学满, 梅江平, 等. 一种具有三维平动一维转动的并联机构: 202528189U[P]. 2012 - 11 - 14.

[11] 刘辛军, 谢福贵, 王立平, 等. 一种可实现 SCARA 运动的四自由度单动平台并联机构: 201210435375.1[P]. 2013 - 02 - 13.

[12] XIE Fugui, LIU Xinjun. Design and development of a high-speed and high-rotation robot with four identical arms and a single platform[J]. Journal of Mechanisms & Robotics, 2015, 7(4):041015 - 3.

[13] 石志新, 叶梅燕, 罗玉峰, 等. 3T1R 并联机构结构设计与位置分析[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(8):364 - 369.
SHI Zhixin, YE Meiyan, LUO Yufeng, et al. Structure design and displacement analysis of 3T1R parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(8):364 - 369. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20160848&journal_id = jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.08.048. (in Chinese)

[14] SHEN Huiping, XU Zhengxiao, XU Ke, et al. Design and direct position analysis of a new 3T1R parallel manipulator with low coupling degree[C]// Proceedings of European Conference on Mechanism Science-EuCoMeS2018, Germany, 2018.

[15] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京:机械工业出版社, 2004.

[16] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社, 2012.

[17] 沈惠平, 朱小蓉, 尹洪波, 等. 并联机构的结构降耦原理及其设计方法[J]. 机械工程学报, 2016, 52(23):102 - 113.
SHEN Huiping, ZHU Xiaorong, YIN Hongbo, et al. Principle and design method for structure coupling-reducing of parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(23):102 - 113. (in Chinese)

[18] 白志富, 韩先国, 陈五一. 冗余驱动消除并联机构奇异研究[J]. 航空学报, 2006, 27(4):733 - 736.
BAI Zhifu, HAN Xianguo, CHEN Wuyi. Study on elimination singularities of parallel mechanism by actuation redundancy[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(4):733 - 736. (in Chinese)

[19] 张彦斐, 宫金良, 高峰. 冗余驱动消除并联机构位形奇异原理[J]. 中国机械工程, 2006, 17(5):445 - 448.
ZHANG Yanfei, GONG Jinliang, GAO Feng. Theory of singularity elimination by redundant actuation for parallel mechanism [J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(5):445 - 448. (in Chinese)

[20] 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解 6 - SPS 并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21):70 - 80.
SHEN Huiping, YIN Hongbo, WANG Zhen, et al. Research on forward position solutions for 6 - SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21):70 - 80. (in Chinese)