doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.04.043

6 - UPS 并联机器人快速正向运动学研究

刘艳梨[1,2]　吴洪涛[1]　李　耀[1]　王若冰[1]　徐媛媛[3]　陈　柏[1]

(1. 南京航空航天大学机电学院, 南京 210016; 2. 江苏安全技术职业学院机械工程系, 徐州 221011;
3. 南通理工学院机械工程学院, 南通 226002)

摘要: 根据平面平台型 6 - UPS 并联机器人的结构特点,选取 3 个代表点的空间坐标作为参数来描述动平台的位置和姿态,结合 3 个代表点之间的约束条件,建立 9 个参数的一次与二次多项式方程组,通过对方程组进行消元处理,最终得到 6 个未知数表示的二次多项式方程。针对所获得的二次多项式方程组特点,改进传统牛顿-拉夫森数值迭代算法,并将其用于并联机器人的一般六维二次多项式方程数值求解,迭代算法收敛并可得到唯一解。数值算例表明,在同等条件下,传统旋转矩阵方法的计算时间为 1.42 ~ 2.67 ms,所提代表点算法计算时间为 0.14 ~ 0.23 ms,大大减少了计算时间,提高了收敛速度和计算效率,为并联机器人高性能闭环实时控制奠定了良好基础。

关键词: 6 - UPS 并联机器人; 快速正向运动学; 代表点; 改进牛顿-拉夫森方法

中图分类号: TP242; TH112　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2019)04-0374-08

Fast Forward Kinematics of 6 - UPS Parallel Robot with Representative Points

LIU Yanli[1,2]　WU Hongtao[1]　LI Yao[1]　WANG Ruobing[1]　XU Yuanyuan[3]　CHEN Bai[1]

(1. *College of Mechanical and Electrical Engineering*, *Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, *Nanjing* 210016, *China*
2. *Department of Mechanical Engineering*, *Jiangsu College of Safety Technology*, *Xuzhou* 221011, *China*
3. *College of Mechanical Engineering*, *Nantong Institute of Technology*, *Nantong* 226002, *China*)

Abstract: According to the structural characteristics of the planar 6 - UPS parallel robot, the position and orientation of the mobile platform were described by choosing the spatial coordinates of three representative points as parameters. Combination of the constraint conditions during three representative points, nine quadratic polynomial equations with nine parameters were obtained. Finally, six quadratic polynomial equations, including six unknown parameters were obtained by eliminating three parameters of the nine equations. Aiming at the characteristics of the obtained quadratic polynomial equations, the traditional Newton - Raphson numerical iteration algorithm was improved and used to the numerical solution of general six-dimensional quadratic polynomial equations of parallel robots. The iterative algorithm was converged and an unique solution was obtained. The numerical example demonstrated that the time consumptions of the proposed algorithm was 0.14 ~ 0.23 ms and the traditional method of rotation matrix was 1.42 ~ 2.67 ms respectively under the same conditions. The proposed algorithm of representative points greatly reduced the computational time, improved the convergence speed and computational efficiency and laid a better foundation for the closed-loop real-time control with high-performance of the six DOFs planar parallel robot.

Key words: 6 - UPS parallel robot; fast forward kinematics; representative points; modified Newton - Raphson method

收稿日期: 2018 - 09 - 30　修回日期: 2018 - 12 - 26

基金项目: 江苏省高等学校自然科学研究项目(17KJB460003)、国家重点研发计划项目(2018YFC0309100)、国家自然科学基金项目(51375230)和江苏省重点建设学科项目(苏教研〔2016〕9 号)

作者简介: 刘艳梨(1982—),女,博士生,江苏安全技术职业学院讲师,主要从事并联机器人及其控制研究,E-mail: mee_liuyanli@126.com

通信作者: 吴洪涛(1962—),男,教授,博士生导师,主要从事机器人学及智能机器和机械多体系统研究,E-mail: mehtwu@126.com

0　引言

现有的求解 6－UPS 并联机器人正向运动学方法[1]可概括为多项式、添加传感器、数值迭代 3 类方法，这些方法不具备实时反馈的能力。多项式方法可以通过采用对偶四元数方法[2]、特殊的几何性质[3]、Gröbner 基算法[4-5]、区间分析[6]和代数消元[7-8]等方法求解非线性方程组，化简得到一元 40、20、17、14 次的代数方程，最终得到所有可能解，包括无理复根和增根的所有解，运动学正解多解对应多种装配模式，且计算时间长，给实时反馈控制带来困难。文献[9]采用方位特征集方法得到了全解析算法，解决了多解容易产生增根、出现失根问题。传感器方法通过添加 4 个[10]、3 个[11]、2 个[12]甚至 1 个传感器[13-14]来辅助计算正向运动学，能够得到较好结果，但是，添加传感器不但增加了硬件成本，还引入传感器测量误差等问题。文献[13]采用传感器方法得到唯一位姿，但是推导过程繁琐，计算时间较长。数值迭代方法关键是选取一个合适的初始值，如果初值选取得当，使用牛顿-拉夫森迭代方法可以得到唯一解[15-18]，否则会影响系统的鲁棒性，同时无法得到所有的装配模式。文献[19]采用四元数得到了正向运动学的快速数值解，消除了姿态矩阵的数学奇异性，是一个较好的数值方法。文献[20]研究了冗余驱动的数值解，消除了算法中位置和姿态的数学奇异性。文献[21]采用齐次坐标变换求解反向运动学。文献[22]采用由点和方位矢量形成的自然坐标法来描述多体系统的位置，而没有使用角度坐标。文献[23]利用链路的自然坐标来描述相邻链路的相对运动，这些自然坐标仅描述机构与所选择的相对系统之间的关系，而不管机构的运动学结构。文献[24]通过选择合适的点和方位矢量形成的自然坐标描述多体系统，建立了一个合适的模型。文献[25]提出了用自然坐标表示的致动器的驱动力公式。采用自然坐标方法描述系统运动学，可有利于建立二次或线性的运动学方程组，能避免三角函数等超越函数计算。

本文将并联机器人运动参数选为若干点的坐标，选择平面平台型 6－UPS 并联机器人动平台平面中 2 个动坐标轴端点和坐标轴原点为代表点，将并联机器人运动学表示为 3 个代表点坐标的函数形式，建立 9 个一次和二次多项式方程，进行消元处理，得到 6 个二次多项式方程，在此基础上，改进牛顿-拉夫森迭代算法，最终求解得到唯一一组位置和姿态参数。

1　6－UPS 并联机器人运动学基础

1.1　结构

6－UPS 并联机器人及其坐标系如图 1 所示。该机构包括动、静上下 2 个平台和 6 条结构一致支腿组成，各个支腿和动平台之间通过球铰 S 连接，和静平台之间通过虎克铰 U 连接，支腿上有移动副 P，通过对 P 施加驱动，来保证整个平台的期望运动。该机构属于平面平台型，即动、静平台的 6 个球铰 S 和 6 个虎克铰 U 中心分别布置在两个平面之中。为了方便分析，选择绝对静坐标系 $O_b xyz$ 与静平台固连，相对动坐标系 $O_a\alpha\beta\gamma$ 与动平台固连，其中，O_a、O_b 分别是动、静平台的外接圆圆心；z、γ 轴分别垂直于各自所在平面。动、静平台 6 对顶点 A_i、B_i（$i=1,2,\cdots,6$）分别循环对称布置在一个平面圆周上，如图 2 所示。

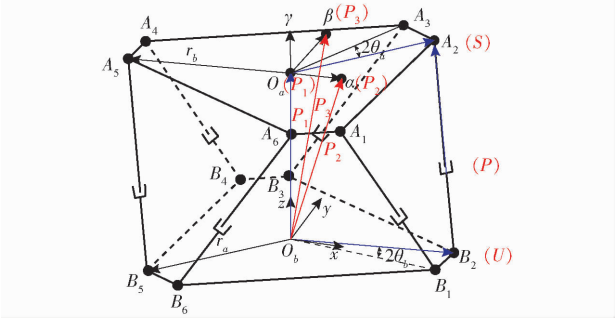

图 1　6－UPS 并联机器人简图

Fig. 1　Structure diagram of 6－UPS parallel robot

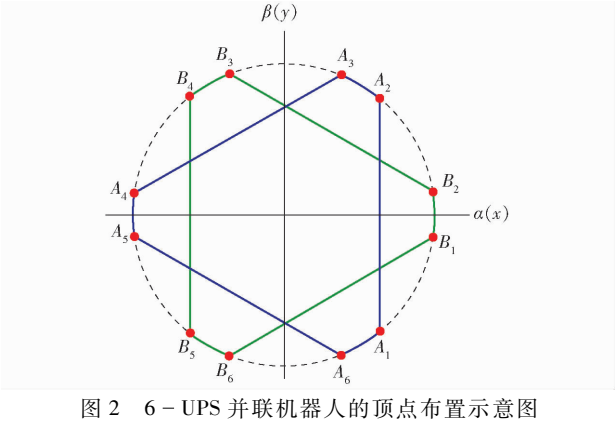

图 2　6－UPS 并联机器人的顶点布置示意图

Fig. 2　Vertices arrangement schematic of 6－UPS parallel robot

选择 3 点 P_1、P_2、P_3为代表点，分别位于动坐标系原点 O_a、α 轴端点和 β 轴的端点处，如图 1 所示。用 $\boldsymbol{P}_1=(x_1,y_1,z_1)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{P}_2=(x_2,y_2,z_2)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{P}_3=(x_3,y_3,z_3)^{\mathrm{T}}$ 分别表示 3 个代表点 P_1、P_2、P_3在静坐标系 $O_b xyz$ 中的位置坐标，于是正向运动学模型中含有 9 个待求变量。

1.2　基于代表点坐标的位置 $\boldsymbol{P}$ 和姿态 $\boldsymbol{R}$

$\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{P}_3$ 和 $\boldsymbol{P}_1$ 存在如下关系：$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{P}_3=$

$\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{y}$。动平台动坐标系 $O_a\alpha\beta\gamma$ 的 α、β、γ 轴对应的矢量记为:$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(\beta_x,\beta_y,\beta_z)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z)^{\mathrm{T}}$。则矢量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 用代表点 P_1、P_2、P_3 坐标表示后可得

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1=(x_2,y_2,z_2)^{\mathrm{T}}-(x_1,y_1,z_1)^{\mathrm{T}}=((x_2-x_1),(y_2-y_1),(z_2-z_1))^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

同理可得

$$\boldsymbol{\beta}=((x_3-x_1),(y_3-y_1),(z_3-z_1))^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

由于 $\boldsymbol{\gamma}$ 垂直于 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 所决定的平面,所以存在

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=((\alpha_y\beta_z-\alpha_z\beta_y),(\alpha_z\beta_x-\alpha_x\beta_z),(\alpha_x\beta_y-\alpha_y\beta_x))^{\mathrm{T}}=((y_1z_2-y_1z_3-y_2z_1+y_2z_3+y_3z-y_3z_2),(-x_1z_2+x_1z_3+x_2z_1-x_2z_3-x_3z_1+x_3z_2),(x_1y_2-x_1y_3-x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2))^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

静坐标系基矢量为:$\boldsymbol{x}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{y}=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{z}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$。采用代表点表示,动平台位置在静坐标系中的位置矢量为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1=(x_1,y_1,z_1)^{\mathrm{T}}$;姿态矩阵 $\boldsymbol{R}$ 表示为

$$\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{\alpha}\quad\boldsymbol{\beta}\quad\boldsymbol{\gamma}]=\begin{bmatrix}\alpha_x&\beta_x&\gamma_x\\\alpha_y&\beta_y&\gamma_y\\\alpha_z&\beta_z&\gamma_z\end{bmatrix} \tag{4}$$

根据式(1)~(3)可得 $\alpha_x=x_2-x_1$、$\alpha_y=y_2-y_1$、$\alpha_z=z_2-z_1$、$\beta_x=x_3-x_1$、$\beta_y=y_3-y_1$、$\beta_z=z_3-z_1$、$\gamma_x=y_1z_2-y_1z_3-y_2z_1+y_2z_3+y_3z_1-y_3z_2$、$\gamma_y=-x_1z_2+x_1z_3+x_2z_1-x_2z_3-x_3z_1+x_3z_2$、$\gamma_z=x_1y_2-x_1y_3-x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2$。

2 6-UPS 并联机器人位置矢量方程构建

如图 1 所示,机构中存在 6 组封闭矢量:$\overrightarrow{O_bO_a}\overrightarrow{A_1}$ $\overrightarrow{O_bB_k}\overrightarrow{A_1}$,$\overrightarrow{O_bO_a}\overrightarrow{A_2}$ $\overrightarrow{O_bB_k}\overrightarrow{A_2}$,…,$\overrightarrow{O_bO_a}\overrightarrow{A_6}$ $\overrightarrow{O_bB_k}\overrightarrow{A_6}$,根据矢量封闭关系,得到连杆矢量表达式为

$$L_k\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{b}_k\quad(k=1,2,\cdots,6) \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{a}_k=(a_{k\alpha},a_{k\beta},a_{k\gamma})^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{b}_k=(b_{kx},b_{ky},b_{kz})^{\mathrm{T}}$

式中 L_k——第 k 个连杆杆长

$\boldsymbol{e}_k$——第 k 个连杆单位矢量

$\boldsymbol{a}_k$——动坐标系 $O_a\alpha\beta\gamma$ 中动平台各个顶点 A_k 坐标值

$\boldsymbol{b}_k$——静坐标系 O_bxyz 中静平台各个顶点 B_k 坐标值

图 1 所示机构,因动、静平台均为平面布置,所以 $\boldsymbol{a}_k$、$\boldsymbol{b}_k$ 的 γ 轴和 z 轴分量均为 0,即 $a_{k\gamma}=b_{kz}=0$,也即 $\boldsymbol{a}_k=(a_{k\alpha},a_{k\beta},0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}_k=(b_{kx},b_{ky},0)^{\mathrm{T}}$,可见动、静平台的顶点坐标也可以通过 4 个变量 r_a、r_b、θ_a、θ_b 来表示,各点坐标进一步表示如下

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_k=(a_{k\alpha},a_{k\beta},a_{k\gamma})^{\mathrm{T}}=(r_a\cos\alpha_k,r_a\sin\alpha_k,0)^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}_k=(b_{kx},b_{ky},b_{kz})^{\mathrm{T}}=(r_b\cos\beta_k,r_b\sin\beta_k,0)^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{6}$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_k=\dfrac{(k-1)\pi}{3}-\theta_a\\\beta_k=\dfrac{(k-1)\pi}{3}-\theta_b\end{cases}\quad(k=1,3,5)$$

$$\begin{cases}\alpha_k=\dfrac{(k-2)\pi}{3}+\theta_a\\\beta_k=\dfrac{(k-2)\pi}{3}+\theta_b\end{cases}\quad(k=2,4,6)$$

令 $\boldsymbol{W}$ 为动平台在动坐标系中的位置矢量,$\boldsymbol{W}=(W_x,W_y,W_z)^{\mathrm{T}}$,则存在 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{W}$,结合 $\boldsymbol{R}$ 的正交性,同时成立:$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$。将 $\boldsymbol{a}_k$、$\boldsymbol{b}_k$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 代入式(5),两边与自身进行矢量点乘,得到 6 个杆长平方标量方程式如下(此处省略下标 k)

$$L^2-r_a^2-r_b^2=-2b_xP_x-2b_yP_y+2a_xW_x+2a_yW_y-2\alpha_x(a_xb_x)-2\alpha_y(a_yb_y)-2\beta_x(a_yb_x)-2\beta_y(a_xb_y)+P_p \tag{7}$$

其中 $P_x=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}$ $P_y=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{y}$ $W_x=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ $W_y=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\beta}$

$\alpha_x=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}$ $\alpha_y=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{y}$ $\beta_x=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}$ $\beta_y=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{y}$

式中 P_p——位置矢量 $\boldsymbol{P}$ 模长平方

P_x——$\boldsymbol{P}$ 在 x 方向上的投影

P_y——$\boldsymbol{P}$ 在 y 方向上的投影

W_x——$\boldsymbol{P}$ 在 α 方向上的投影

W_y——$\boldsymbol{P}$ 在 β 方向上的投影

α_x——$\boldsymbol{\alpha}$ 在 x 方向上的投影

α_y——$\boldsymbol{\alpha}$ 在 y 方向上的投影

β_x——$\boldsymbol{\beta}$ 在 x 方向上的投影

β_y——$\boldsymbol{\beta}$ 在 y 方向上的投影

式中,含 P_p、P_x、P_y、W_x、W_y、α_x、α_y、β_x、β_y 等 9 个未知数,各个未知数之间由动平台的位置和姿态各个参数联系起来,且 9 个未知数的系数由平台结构参数和杆长参数决定。

3 正向运动学模型构造并求解

正向运动学问题就是已知机构的 6 个杆长输入,求解末端运动平台的位置矢量 $\boldsymbol{P}$ 和姿态矩阵 $\boldsymbol{R}$。此处首先将正向运动学问题转换为构造和求解 6 个二次多项式方程问题。

3.1 运动学模型构造

由式(7)可得,通过对 P_p、P_x、P_y、W_x、W_y、α_x、α_y、β_x、β_y 9 个未知数进行移项、整理,可解得

$$\begin{cases}P_p-k_0(\alpha_x+\beta_y)/2=P_{p0}\\P_x-k_1(\alpha_x-\beta_y)/2=P_{x0}\\P_y+k_1(\alpha_y+\beta_x)/2=P_{y0}\\W_x-k_2(\alpha_x-\beta_y)/2=W_{x0}\\W_y+k_2(\alpha_y+\beta_x)/2=W_{y0}\\(\alpha_y-\beta_x)/2=C_0\end{cases} \tag{8}$$

其中

$$\begin{cases} k_0 = 2r_a r_b \cos(\theta_b - \theta_a) \\ k_1 = r_a \sin(\theta_b + 2\theta_a)\csc(\theta_b - \theta_a) \\ k_2 = r_b \sin(2\theta_b + \theta_a)\csc(\theta_b - \theta_a) \\ P_{p0} = \dfrac{1}{6}(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 + L_5^2 + L_6^2 - 6r_b^2 - 6r_a^2) \\ P_{x0} = \dfrac{-1}{12r_b}\csc(\theta_b - \theta_a)[\sqrt{3}(L_3^2 - L_4^2 - L_5^2 + L_6^2)\cos\theta_a + \\ \quad (-2L_1^2 - 2L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 + L_5^2 + L_6^2)\sin\theta_a] \\ P_{y0} = \dfrac{1}{12r_b}\csc(\theta_b - \theta_a)[(2L_1^2 - 2L_2^2 - L_3^2 + L_4^2 - L_5^2 + \\ \quad L_6^2)\cos\theta_a + \sqrt{3}(L_3^2 + L_4^2 - L_5^2 - L_6^2)\sin\theta_a] \\ W_{x0} = \dfrac{-1}{12r_a}\csc(\theta_b - \theta_a)[\sqrt{3}(L_3^2 - L_4^2 - L_5^2 + L_6^2)\cos\theta_b + \\ \quad (-2L_1^2 - 2L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 + L_5^2 + L_6^2)\sin\theta_b] \\ W_{y0} = \dfrac{1}{12r_a}\csc(\theta_b - \theta_a)[(2L_1^2 - 2L_2^2 - L_3^2 + L_4^2 - L_5^2 + \\ \quad L_6^2)\cos\theta_b + \sqrt{3}(L_3^2 + L_4^2 - L_5^2 - L_6^2)\sin\theta_b] \\ C_0 = \dfrac{1}{12r_a r_b}\csc(\theta_b - \theta_a)(L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 - L_4^2 + L_5^2 - L_6^2) \end{cases} \tag{9}$$

将 9 个未知数的代表点表达式代入式(8)后可得 6 个一次或二次多项式方程组

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \frac{1}{2}k_0(-x_1 + x_2 - y_1 + y_3) = P_{p0} \tag{10}$$

$$x_1 - \frac{1}{2}k_1(-x_1 + x_2 + y_1 - y_3) = P_{x0} \tag{11}$$

$$y_1 + \frac{1}{2}k_1(-x_1 + x_3 - y_1 + y_2) = P_{y0} \tag{12}$$

$$x_1(-x_1 + x_2) + y_1(-y_1 + y_2) + z_1(-z_1 + z_2) - \frac{1}{2}k_2(-x_1 + x_2 + y_1 - y_3) = W_{x0} \tag{13}$$

$$x_1(-x_1 + x_3) + y_1(-y_1 + y_3) + z_1(-z_1 + z_3) + \frac{1}{2}k_2(-x_1 + x_3 - y_1 + y_2) = W_{y0} \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_3 - y_1 + y_2) = C_0 \tag{15}$$

又由 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的正交性和归一性

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = 0 \quad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha} = 1 \quad \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta} = 1$$

可得 9 个未知数的代表点约束方程

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1) = 0 \tag{16}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 1 \tag{17}$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 1 \tag{18}$$

观察式(11)、(12)、(15)最高次为一次多项式，本文先求出 x_3、y_2、y_3 对 x_1、y_1、z_1、x_2、z_2、z_3 的线性表示，再代回剩余的 6 个方程，可得到式(10)、(13)、(14)、(16) ~ (18)的 6 个二次多项式方程，将其记为

$$f_i(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{X} + \boldsymbol{M}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{C}_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,6) \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 为待求未知数，$\boldsymbol{X} = (x_1, y_1, z_1, x_2, z_2, z_3)$，$\boldsymbol{C}_i$ 是由 6－UPS 并联机器人结构参数和 6 条支腿长决定；$\boldsymbol{M}_i$ 由 6－UPS 并联机器人结构参数所决定；$\boldsymbol{Q}_i(i = 1,2,\cdots,6)$ 是二次项系数矩阵，是由系统结构参数中 3 个参数 r_a、θ_a、θ_b 所决定的 6×6 维对称矩阵，$\boldsymbol{Q}_i$ 的具体形式为

$$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-3-k_1}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{-3-k_1}{k_1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_4 = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2+2k_1}{k_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{2+2k_1}{k_1^2} & 0 & 0 & -\dfrac{2}{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\dfrac{2}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{k_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_6=$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{2(-2-k_1)^2}{k_1^2} & 0 & 0 & \dfrac{2(-2-k_1)}{k_1} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{2}{k_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2\\ \dfrac{2(-2-k_1)}{k_1} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

将式(19)代表的6个方程统一表示为向量形式

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=\frac{1}{2}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{C}=0 \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=(f_1(\boldsymbol{X}),f_2(\boldsymbol{X}),\cdots,f_6(\boldsymbol{X}))^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_6)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2,\cdots,\boldsymbol{M}_6)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\cdots,\boldsymbol{C}_6)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}=\left(-P_{p0}-\frac{k_0P_{x0}}{k_1},\frac{k_2P_{x0}}{k_1}-W_{x0},\frac{k_2P_{y0}}{k_1}-W_{y0},\frac{2C_0k_1P_{x0}+2P_{x0}P_{y0}}{k_1^2},\frac{(C_0k_1+P_{y0})^2}{k_1^2}-1,\frac{4P_{x0}^2}{k_1^2}+\frac{(C_0k_1-P_{y0})^2}{k_1^2}-1\right)^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\dfrac{k_0(1+k_1)}{k_1} & 0 & 0 & -k_0 & 0 & 0\\ -\dfrac{k_2}{k_1} & \dfrac{C_0k_1+P_{y0}}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{-C_0k_1+P_{y0}}{k_1} & \dfrac{-k_2+2P_{x0}}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{-2C_0k_1-2P_{y0}-2k_1P_{y0}}{k_1^2} & -\dfrac{2P_{x0}}{k_1^2} & 0 & \dfrac{2P_{y0}}{k_1} & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{2(C_0k_1+P_{y0})}{k_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{4(-2-k_1)P_{x0}}{k_1^2} & \dfrac{2(C_0k_1-P_{y0})}{k_1^2} & 0 & \dfrac{4P_{x0}}{k_1} & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

3.2 正解运动学方程数值迭代求解

对二次多项式方程组(20)求导,可得

$$\boldsymbol{J}=\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})}{\partial\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$$

现在考虑牛顿-拉夫森数值迭代算法,当待求未知变量 $\boldsymbol{X}$ 取第 k 步数值,即:$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}_k$ 时,可得

$$\boldsymbol{J}_k=\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial\boldsymbol{x}_k}=\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$$

因此可得

$$\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{J}_k-\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{23}$$

根据一般牛顿-拉夫森数值迭代算法

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k-\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial\boldsymbol{x}_k}\right)^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{24}$$

将式(23)代入 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}_k$ 时的方程组(20)可得

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{C}=\frac{1}{2}\boldsymbol{J}_k\boldsymbol{x}_k+\frac{1}{2}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{C}\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{25}$$

将式(25)代回式(24)一般牛顿-拉夫森数值迭代算法可得

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{J}_k^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{J}_k^{-1}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{C}\right)\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{26}$$

至此可见,将牛顿-拉夫森数值迭代算法用于6-UPS并联机器人的代表点运动方程时,不再需要不断更新计算 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)$ 的函数值,由此可大幅度提高计算效率。由于式(26)中含有雅可比逆矩阵 $\boldsymbol{J}_k^{-1}$,直接进行逆矩阵计算也很耗时,为了进一步提高算法的计算效率,对式(26)中迭代次序简化为线性方程组来求解(例如高斯-赛德尔迭代)。为此定义式(26)中 $\boldsymbol{J}_k^{-1}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{C}\right)\triangleq\Delta\boldsymbol{x}_k$,则可得

$$\boldsymbol{J}_k\Delta\boldsymbol{x}_k=\frac{1}{2}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{C}\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{27}$$

由式(26)和式(27)联合可得一类代表点表示的6-UPS并联机器人的快速正向运动学迭代算法

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_{k+1}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}_k-\Delta\boldsymbol{x}_k\\ \boldsymbol{J}_k\Delta\boldsymbol{x}_k=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{C}\end{cases}\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{28}$$

据此,可解出唯一一组变量 x_1、y_1、z_1、x_2、z_2、z_3 的解,根据 $\boldsymbol{P}=(x_1,y_1,z_1)^{\mathrm{T}}$ 和姿态矩阵 $\boldsymbol{R}$(式(4))可以求解出唯一的位置和姿态。

4 数值算例验证

采用数值算例来说明和验证前文方法的正确性、高效性。

(1)正确性

通过给定一组反解,即给定平台位置姿态,计算对应的代表点坐标值。将给定的一组初始代表点坐标值代入式(28)进行运动学正解计算,如果能够收敛、且收敛到反解对应的代表点坐标值,即可验证所提算法的正确性。

① 给定反解条件。6－UPS 并联机器人结构参数 $\theta_a = 0.286\,18\pi$、$\theta_b = 0.046\,988\pi$、$r_a = 0.849\,864$、$r_b = 0.849\,864$，由此可以确定 6－UPS 并联机器人动、静平台的顶点坐标 $\boldsymbol{a}_i$、$\boldsymbol{b}_i$（$i = 1,2,\cdots,6$）。角度单位为 rad，长度单位为 m。设定 6－UPS 并联机器人预设状态下位置矢量为 $\boldsymbol{P}_t = (-0.2, -0.03, 1.1)^{\mathrm{T}}$，姿态矩阵 $\boldsymbol{R}_t$ 为

$$\boldsymbol{R}_t = \begin{bmatrix} 0.969\,017 & 0.171\,908 & -0.177\,35 \\ -0.164\,971 & 0.984\,859 & 0.053\,258\,9 \\ 0.183\,82 & -0.022\,351\,2 & 0.982\,706 \end{bmatrix}$$

可得到 $\boldsymbol{P}_1 = (-0.2, -0.03, 1.1)^{\mathrm{T}}$，通过 $\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{R}_t(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{R}_t(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 计算可得另外两个代表点坐标分别为：$\boldsymbol{P}_2 = (0.769\,017, -0.194\,971, 1.283\,82)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}_3 = (-0.028\,091\,9, 0.954\,859, 1.077\,65)^{\mathrm{T}}$，通过反解计算得到 6 条支腿长为：$L_1 = 1.516\,92$ m、$L_2 = 1.318\,95$ m、$L_3 = 1.268\,81$ m、$L_4 = 1.136\,69$ m、$L_5 = 1.257\,04$ m、$L_6 = 1.209\,43$ m。

根据课题组研制的物理样机，其构型选择的电缸行程为 0.5 m，6 条支腿的平衡位置均在 1.36 m 处，即 6 条支腿的运动范围均在（1.36 ±0.25）m 范围内，即：关节空间范围为 $L_i \in [1.11, 1.61]$，$i = 1,2,\cdots,6$，进而可以验证 $\boldsymbol{P}_t$、$\boldsymbol{R}_t$ 选取正确。

② 求解正解。首先，将 6－UPS 并联机器人结构参数和腿长参数代入前述的 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{Q}$，可得

$$\boldsymbol{C} = (-0.410\,315, -0.213\,225, 0.058\,532\,2, -0.050\,226\,3, -0.980\,659, -0.830\,443)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0.144\,321 & 0 & 0 & -1.055\,53 & 0 & 0 \\ -0.999\,385 & -0.139\,073 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.197\,806 & -0.638\,235 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.298\,849 & 0.311\,771 & 0 & 0.058\,733\,3 & 0 & 0 \\ 0 & -0.240\,116 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.524\,783 & 0.341\,521 & 0 & 0.722\,31 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.726\,54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1.589\,81 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.589\,81 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_4 = \begin{bmatrix} 0 & -0.236\,068 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.236\,068 & 0 & 0 & 1.726\,54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1.726\,54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.490\,476 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_6 = \begin{bmatrix} 1.055\,73 & 0 & 0 & 1.453\,09 & 0 & 0 \\ 0 & 1.490\,48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1.453\,09 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

假设 6－UPS 并联机器人动平台从初始位姿：$\boldsymbol{P}_0 = (0.5, 0.5, 2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{I}_{3\times3}$ 出发，运动到反解给定的位姿：$\boldsymbol{P}_t$、$\boldsymbol{R}_t$。那么，对应的始末位姿代表点坐标值分别为：$\boldsymbol{X}_0 = (0.5, 0.5, 2, 1.5, 2, 2)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{X}_t = (-0.2, -0.03, 1.1, 0.769\,017, 1.283\,82, 1.077\,65)^{\mathrm{T}}$。

迭代过程如表 1 所示，经过 5 次迭代计算后得到的 $\boldsymbol{X}_5 = (-0.2, -0.03, 1.1, 0.769\,017, 1.283\,82, 1.077\,65)^{\mathrm{T}}$ 与反解给定的 $\boldsymbol{X}_t = (-0.2, -0.03, 1.1, 0.769\,017, 1.283\,82, 1.077\,65)^{\mathrm{T}}$ 完全一致，验证了所提算法是正确的，机构位姿示意如图 3 所示。

本次计算中，所提方法迭代时间为 0.20 ms，对比计算表明，采用传统欧拉角方法描述的牛顿-拉夫森方法，则迭代次数 8 次、需要耗时 2.67 ms，由此可见本文所提出的二次形方程组数值迭代方法的迭代次数少，用时少，收敛速度快，效率提高 92.51%，至此，初步显示出算法的高效性。

（2）高效性

与旋转矩阵方法的计算进行对比，即可验证所提算法的高效性。所提算法和旋转矩阵方法均在以下条件下进行计算，计算机硬件为：Win 8.1/Intel Core i5 2.4 GHz/8 GB RAM/MatlabR2016b，代表点初始值取 $\boldsymbol{X}_0 = (0.5, 0.5, 2, 1.5, 2, 2)^{\mathrm{T}}$，最大迭代次数均为 20 次，算法终止条件允许误差 $\| \Delta x \| < 10^{-8}$。

表 1 迭代过程及其结果

Tab. 1 Iterative process and results

迭代次序	迭代过程 $\boldsymbol{X}_i=(x_{1i},y_{1i},z_{1i},x_{2i},z_{2i},z_{3i})^{\mathrm{T}}$
0	$\boldsymbol{X}_0=(0.5,0.5,2,1.5,2,2)^{\mathrm{T}}$
1	$\boldsymbol{X}_1=(-0.042\,605\,8,0.121\,011,1.476\,12,1.010\,32,1.633\,61,1.688\,91)^{\mathrm{T}}$
2	$\boldsymbol{X}_2=(-0.173\,391,-0.013\,113\,8,1.175\,68,0.806\,941,1.365\,56,1.238\,99)^{\mathrm{T}}$
3	$\boldsymbol{X}_3=(-0.197\,379,-0.029\,421\,4,1.104\,36,0.771\,848,1.288\,49,1.088\,13)^{\mathrm{T}}$
4	$\boldsymbol{X}_4=(-0.199\,983,-0.029\,997\,5,1.100\,02,0.769\,035,1.283\,84,1.077\,7)^{\mathrm{T}}$
5	$\boldsymbol{X}_5=(-0.2,-0.03,1.1,0.769\,017,1.283\,82,1.077\,65)^{\mathrm{T}}$

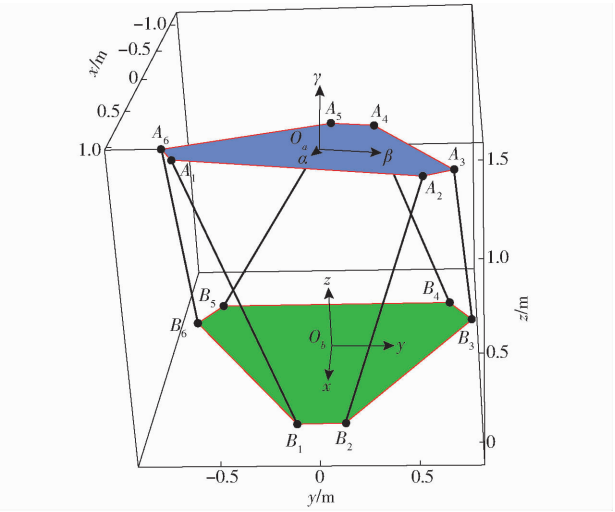

图 3 位置和姿态示意图

Fig. 3 Schematic of position and orientation for 6 - UPS parallel robot

为了进一步验证所提算法的高计算效率,根据课题组研制的物理样机,在其可达无奇异工作空间内任意选取 25 组数据。首先,25 组初始位置姿态 $\boldsymbol{P}_{0i}$、$\boldsymbol{R}_{0i}$ 均取为 $\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{R}_0$,其具体数值为:$\boldsymbol{P}_0=(0.5,0.5,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{I}_{3\times3}$,转换成代表点表示为:$\boldsymbol{X}_0=(0.5,0.5,2,1.5,2,2)^{\mathrm{T}}$。其次,针对表 2 中给定的 25 组数据,其每一组数据均是从初始位姿:$\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{R}_0$ 开始,分别代入所提算法,重复(1)的反解、正解过程并进行计算,动平台最终分别运动到表 2 中给定的 25 组终止位置姿态,即 25 组 $\boldsymbol{P}_{ti}$、$\boldsymbol{R}_{ti}$ 处。经过计算可知,25 组数据计算结果均正确且收敛,同时也得到每一组数据计算所需时间,并将其与旋转矩阵方法计算反解、正解过程所需时间进行对比。每一组位姿在 Matlab 中计算 100 次并取平均数值即为本次计算时间,结果如表 2 所示。

表 2 两种算法计算时间对比

Tab. 2 Consumption time comparison of two algorithms

位姿次序	x_{1i}/m	y_{1i}/m	z_{1i}/m	x_{2i}/m	z_{2i}/m	z_{3i}/m	所提算法计算时间 t_1/ms	旋转矩阵法计算时间 t_2/ms
1	-0.08	-0.08	1.12	0.900 326	1.243 90	1.001 07	0.23	2.67
2	-0.09	-0.07	1.16	0.905 058	1.223 08	1.101 10	0.18	1.58
3	-0.10	-0.06	1.20	0.900 000	1.200 00	1.200 00	0.22	1.63
4	-0.11	0.01	1.24	0.885 058	1.178 95	1.300 93	0.16	1.71
5	-0.12	0.05	1.28	0.860 326	1.158 13	1.400 96	0.16	1.50
6	-0.13	-0.05	1.16	0.855 846	1.098 95	1.160 00	0.19	1.80
7	-0.14	-0.04	1.20	0.840 326	1.078 13	1.260 59	0.15	1.83
8	-0.15	-0.03	1.23	0.839 486	1.351 87	1.350 96	0.17	1.49
9	-0.16	0.06	1.25	0.838 135	1.311 05	1.128 36	0.15	1.46
10	-0.07	0.09	1.26	0.926 917	1.260 00	1.198 95	0.15	1.47
11	-0.06	-0.07	1.27	0.935 058	1.331 05	1.391 64	0.15	1.81
12	-0.05	-0.06	1.12	0.937 688	1.120 00	0.998 13	0.21	2.30
13	-0.04	0	1.14	0.945 846	1.078 95	1.079 07	0.16	2.30
14	-0.03	0.05	1.15	0.959 486	1.028 13	1.150 00	0.15	1.48
15	-0.02	0.12	1.16	0.972 546	1.281 87	1.220 59	0.16	1.48
16	-0.01	-0.13	1.17	0.982 546	1.048 13	1.109 41	0.15	1.87
17	0	-0.06	1.18	0.989 486	1.301 87	1.180 00	0.23	1.42
18	0.06	0	1.19	1.045 850	1.251 05	1.250 93	0.15	1.48
19	0.07	0.14	1.20	1.057 690	1.200 00	1.321 87	0.15	1.43
20	0.08	0.15	1.21	1.075 060	1.148 95	1.088 36	0.16	1.58
21	0.09	-0.05	1.22	1.086 920	1.220 00	1.281 05	0.18	1.46
22	0.10	-0.06	1.23	1.098 130	1.168 95	1.351 64	0.14	1.51
23	0.11	0	1.16	1.099 490	1.038 13	1.039 04	0.17	1.47
24	0.12	0.11	1.20	1.100 330	1.321 87	1.139 41	0.16	1.52
25	0.13	0.09	1.24	1.115 850	1.301 05	1.240 00	0.14	1.52

5　结论

（1）采用代表点描述可将并联机器人正向运动学模型表达为一组二次方程组。该模型含有二次项、一次项和常数项，最高次项为二次，求导后得到的雅可比矩阵仅含有一次项和常数项，最高次项为一次，建立了简单非线性的并联机器人正向运动学模型。

（2）结合正运动学模型的特点，对一般的牛顿-拉夫森方法进行改进，改进后的牛顿-拉夫森迭代方法不需要求解雅可比的逆矩阵；而且，在每一次迭代计算过程中，部分变量还原到原始二次形，计算过程中直接抵消了大部分计算，方程组与雅可比矩阵的更新仅需消耗极少的计算量，由此确保所提算法收敛速度快、计算效率高，并可得到唯一解，便于实时控制所需。

（3）通过对比传统的旋转矩阵方法，本文提出的二次方程组数值迭代方法的迭代次数少、用时少、收敛速度快，效率高。

参　考　文　献

[1] VERTECHY R, PARENTI-CASTELLI V. Robust, fast and accurate solution of the direct position analysis of parallel manipulators by using extra-sensors[M]//Parallel manipulators, towards new applications. InTech, 2008.

[2] WAMPLER C W. Forward displacement analysis of general six-in-parallel SPS (Stewart) platform manipulators using soma coordinates[J]. Mechanism & Machine Theory, 1996, 31(3):331－337.

[3] HUSTY M L. An algorithm for solving the direct kinematics of general Stewart－Gough platforms[J]. Mechanism & Machine Theory, 1996, 31(4):365－379.

[4] 程世利, 吴洪涛, 王超群,等. 一般 6－SPS 并联机构运动学正解的解析化方法[J]. 中国机械工程, 2010, 21(11):1261－1264.
CHENG Shili, WU Hongtao, WANG Chaoqun, et al. Analytical method for the forward kinematics analysis of the general 6－SPS parallel mechanisms[J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(11): 1261－1264. (in Chinese)

[5] GAN D, LIAO Q, DAI J S, et al. Forward displacement analysis of the general 6－6 Stewart mechanism using Gröbner bases [J]. Mechanism & Machine Theory, 2009, 44(9):1640－1647.

[6] MERLET J P. Solving the forward kinematics of Gough-type parallel manipulator with interval analysis[J]. International Journal of Robotics Research, 2004, 23(3):221－236.

[7] 程世利, 吴洪涛, 姚裕,等. 6－SPS 并联机构运动学正解的一种解析化方法[J]. 机械工程学报, 2010, 46(9):26－31.
CHENG Shili, WU Hongtao, YAO Yu, et al, An analytical method for the forward kinematics analysis of 6－SPS parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(9): 26－31. (in Chinese)

[8] HUANG X G, LIAO Q Z, WEI S M. Closed-form forward kinematics for a symmetrical 6－6 Stewart platform using algebraic elimination[J]. Mechanism and Machine Theory,2010, 45(2): 327－334.

[9] 尤晶晶, 符周舟, 吴洪涛,等. 12－6 台体型 Stewart 冗余并联机构正向运动学研究[J/OL]. 农业机械学报, 2017, 48(12):395－402.
YOU Jingjing, FU Zhouzhou, WU Hongtao, et al. Forward kinematics of general 12－6 Stewart redundant parallel mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017,48(12):395－402. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no=20171249&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.12.049. (in Chinese)

[10] MERLET J P. Closed-form resolution of the direct kinematics of parallel manipulators using extra sensors data[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1993: 200－204.

[11] BARON L, ANGELES J. The decoupling of the direct kinematics of parallel manipulators using redundant sensors[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1994:974－979.

[12] HAN K, CHUNG W K, YOUM Y. Local structurization for the forward kinematics of parallel manipulators using extra sensor data[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1995:514－520.

[13] 刘艳梨, 程世利, 蒋素荣,等. 带位移传感器的 6－UPS 并联机构运动学正解[J]. 机械工程学报, 2018, 54(5):1－7.
LIU Yanli, CHENG Shili, JIANG Surong, et al. Forward kinematics of 6－UPS parallel manipulators with one displacement sensor[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(5): 1－7. (in Chinese)

[14] CHENG Shili, LIU Yanli, WU Hongtao. A new approach for the forward kinematics of nearly general Stewart platform with an extra sensor[J]. Journal of Advanced Mechanical Design Systems & Manufacturing, 2017, 11(2):JAMDSM0032.

[15] YANG Chifu, ZHENG Shutao, JIN Jun, et al. Forward kinematics analysis of parallel manipulator using modified global Newton－Raphson method[J]. Journal of Central South University, 2010, 17(6):1264－1270.

[16] LIU K, LEWIS F L, FITZGERALD M. Solution of nonlinear kinematics of a parallel-link constrained Stewart platform manipulator[J]. Circuits Systems & Signal Processing, 1994, 13(2－3):167－183.

[17] MERLET J P. Direct kinematics of parallel manipulators[J]. Robotics & Automation IEEE Transactions on, 1993, 9(6): 842－846.

（下转第 400 页）

2017.12.049. (in Chinese)
[18] 刘芳华,张星,魏玉平,等. 基于牛顿迭代的 6-UPS 并联机构运动学正解的研究[J]. 机械设计与制造,2013(5):173-176.
LIU Fanghua, ZHANG Xing, WEI Yuping, et al. The forward kinematics analysis of 6-UPS parallel mechanism based on Newton iteration[J]. Machinery Design & Manufacture,2013(5):173-176. (in Chinese)
[19] 耿明超,赵铁石,王唱,等. 基于拟 Newton 法的并联机构位置正解[J]. 机械工程学报,2015,51(9): 28-36.
GENG Mingchao, ZHAO Tieshi, WANG Chang, et al. Direct position analysis of parallel mechanism based on quasi-Newton method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(9):28-36. (in Chinese)
[20] 韩方元,赵丁选,李天宇. 3-RPS 并联机构正解快速数值算法[J]. 农业机械学报,2011,42(4):229-233.
HAN Fangyuan, ZHAO Dingxuan, LI Tianyu. A fast forward algorithm for 3-RPS parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(4):229-233. (in Chinese)
[21] ZHOU Wanyong, CHEN Wuyi, LIU Huadong, et al. A new forward kinematics algorithm for a general Stewart platform[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015,87:177-190.
[22] YANG Xiaolong, WU Hongtao, LI Yao, et al. A dual quaternion solution to the forward kinematics of a class of six-DOF parallel robots with full or reductant actuation [J]. Mechanism and Machine Theory, 2017,107:27-36.
[23] 李明磊, 贾育秦. 6-SPS 并联机构位置正解的改进粒子群算法[J]. 现代制造工程, 2009(5):106-110.
LI Minglei, JIA Yuqin. Improved particle swarm optimization algorithm for forward positional analysis of 6-SPS parallel manipulators[J]. Modern Manufacturing Engineering, 2009(5):106-110. (in Chinese)
[24] 程世利,吴洪涛,姚裕. 6-SPS 并联机构运动学正解的一种解析化方法[J]. 机械工程学报,2010,46(9):26-31.
CHENG Shili, WU Hongtao, YAO Yu. An analytical method for the forward kinematics analysis of 6-SPS parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(9):26-31. (in Chinese)
[25] HUANG Tian, WANG Manxin, YANG Shuofei, et al. Force/motion transmissibility analysis of six degree of freedom parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2014,6(3):1-5.
[26] 黄昔光, 廖启征, 魏世民,等. 一般 6-6 型平台并联机构位置正解代数消元法[J]. 机械工程学报, 2009, 45(1):56-61.
HUANG Xiguang, LIAO Qizheng, WEI Shimin, et al. Forward kinematics analysis of the general 6-6 platform parallel mechanism based on algebraic elimination[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009,45(1):56-61. (in Chinese)
[27] 尤晶晶, 李成刚, 吴洪涛. 基于四面体构型的冗余并联机构的运动学分析[J]. 中国机械工程, 2013, 24(8):1097-1101.
YOU Jingjing, LI Chenggang, WU Hongtao. Kinematics analysis of redundant parallel mechanism based on tetrahedral configuration[J]. China Mechanical Engineering,2013,24(8):1097-1101. (in Chinese)
[28] 沈惠平, 尹洪波, 王振,等. 基于拓扑结构分析的求解 6-SPS 并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21):70-80.
SHEN Huiping, YIN Hongbo, WANG Zhen, et al. Research on forward position solutions for 6-SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013,49(21):70-80. (in Chinese)

(上接第 381 页)

[18] 王启明, 苏建, 张兰, 等. 基于 L-M 算法的正交 Stewart 平台位姿正解的初值补偿[J]. 吉林大学学报(工学版), 2017,47(1): 97-104.
[19] YANG Xiaolong, WU Hongtao, CHEN Bai, et al. Fast numerical solution to forward kinematics of general Stewart mechanism using quaternion[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2014, 31(4):377-385.
[20] YANG Xiaolong, WU Hongtao, LI Yao, et al. A dual quaternion solution to the forward kinematics of a class of six-DOF parallel robots with full or reductant actuation[J]. Mechanism & Machine Theory, 2017, 107:27-36.
[21] WANG Wei, ZHANG Xin, HAN Lili, et al. Inverse kinematics analysis of 6-DOF Stewart platform based on homogeneous coordinate transformation[J]. Ferroelectrics, 2018, 522(1): 108-121.
[22] LIO M D, COSSALTER V, LOT R. On the use of natural coordinates in optimal synthesis of mechanisms[J]. Mechanism & Machine Theory, 2000, 35(10):1367-1389.
[23] SZKODNY T. Forward and inverse kinematics of IRb-6 manipulator[J]. Mechanism & Machine Theory, 1995, 30(7): 1039-1056.
[24] CECCARELLI M, FINO P M D, JIMENEZ J M. Dynamic performance of CaPaMan by numerical simulations[J]. Mechanism & Machine Theory, 2002, 37(3):241-266.
[25] SZKODNY T. Dynamics of industrial robot manipulators[J]. Mechanism & Machine Theory, 1995, 30(7):1057-1072.