

低耦合度半对称三平移并联机构拓扑设计与运动学分析

沈惠平 赵一楠 许正骁 李菊 杨廷力

(常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

摘要: 根据基于方位特征(POC)方程的并联机构拓扑设计理论与方法,提出一种三自由度 $3Pa + 2RSS$ 并联机构,并对该机构的方位特征集、自由度、耦合度等主要拓扑特征进行分析计算,证明分析了其耦合度 $\kappa = 1$;建立了基于序单开链法运动学建模原理的位置正解求解模型,并应用一维搜索方法求解了该并联机构的位置正解;导出机构位置逆解的公式,并据此分析计算了该机构奇异发生的条件;在自由度、输出和运动学分析不变的前提下,为了增大工作空间,将两条RSS支链替换为RUU支链,分析求解了机构工作空间和工作空间内部的奇异性特征。结果表明:该机构工作空间形状规则,且内部的无奇异工作空间较大。

关键词: 并联机构; 耦合度; 运动学分析; 工作空间; 奇异位形

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2019)03-0404-08

Topological Design and Kinematics Analysis of Novel Asymmetric 3-Translation Parallel Manipulator with Low Coupling Degree

SHEN Huiping ZHAO Yi'nan XU Zhengxiao LI Ju YANG Tingli

(Research Center of Advanced Mechanism, Changzhou University, Changzhou 213016, China)

Abstract: According to the topological design theory of parallel mechanism (PM) based on position and orientation characteristic (POC) equations, a three degrees-of-freedom (DOF) $3Pa + 2RSS$ PM was designed. The main topological characteristics such as the POC set, DOF and coupling degree (κ) were calculated. It was proved that the coupling degree of the PM equaled to 1 ($\kappa = 1$) by using the formula of coupling degree. Afterward, a forward solution model for the kinematics modeling principle based on ordered single open chain (SOC) units method was established. Then the forward kinematics was solved by using one-dimensional search method. The inverse kinematic formulas were derived by establishing the relationship between the input variables and output variables. Meanwhile, the Jacobian matrices were derived by inverse kinematic formulas which were used to analyze the geometric conditions of three kinds of singular positions for the PM. In order to enlarge the workspace of the mechanism, two RSS chains were replaced by using RUU chains under the premise of constant degrees-of-freedom, output characteristic and kinematics analysis. The workspace boundary and singularities inside the workspace of the mechanism were analyzed by using the discretization method and calculated in Matlab. The result turned out that the shape of workspace boundary of the mechanism was regular and large. Also the free singularities area inside the workspace was large. The research laid a theoretical foundation for the stiffness, dynamics investigation and prototype design of the PM in the future.

Key words: parallel mechanism; coupling degree; kinematics analysis; workspace; singular configuration

0 引言

三自由度三平移(3T)机构为国内外学者研究

较多的一类机构,这类机构具有结构简单、有效工作空间大、动态性能好等优点,在工程中有较好的应用价值。CLAVEL^[1]发明了著名的三维平移 Delta 机

收稿日期: 2018-09-23 修回日期: 2018-11-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(51475050)、江苏省科技成果转化专项资金项目(BA2015098)和江苏省绿色过程装备重点实验室项目

作者简介: 沈惠平(1965—),男,教授,博士生导师,主要从事机器人机构学研究, E-mail: shp65@126.com

构,之后一些学者研究了 Delta 机构的衍生操作手^[2-4]; TSAI 等^[5-6]提出了一种移动副驱动、支链含 4R 平行四边形机构的三自由度移动并联机构;文献[7-8]对 3-RRC 三平移机构进行了运动学和工作空间分析;KONG 等^[9]提出了一种三自由度 3-CRR 机构,该机构具有良好的运动性能,且没有明显的奇异位置;LI 等^[10-11]提出了 3-UPU 型三平移机构,并对该机构的瞬时运动性能进行了分析;李仕华等^[12]提出了一种新型 3-RRUR 三平移并联平台机构;陆晶等^[13]提出了一种 3-RRRP(4R)三平移机构,并对机构进行了运动学和工作空间的分析;谢俊等^[14]提出一种以三平移全解耦并联机构为主体的茶叶筛分机,并对机构的运动学和解耦性进行了分析;ZENG 等^[15-16]设计了一种三平移 tri-pyramid 并联机构,并对其位置方程的正反解、雅可比矩阵和各向同性等运动学特性进行了分析;PRAUSE 等^[17]对多种三平移并联机构分别进行了数综合、边界状况和工作空间等特征的比较,选出了性能较好的机构;MAHMOOD 等^[18]提出了一种三自由度 3-[P2(US)]机构,并对机构进行了运动学和灵巧度分析;杨启志等^[19]设计了一种三平移并联移栽机器人,并对其进行了运动误差分析。

本文根据基于方位特征(Position and orientation characteristics, POC)方程的并联机构拓扑设计理论^[20-21],设计一种低耦合度三平移并联机构 3Pa+2RSS,并对其位置正逆解、奇异位形、工作空间及其内部奇异区域等进行分析。

1 机构设计与拓扑分析

1.1 机构设计

根据基于方位特征(POC)方程的并联机构拓扑设计理论^[15],设计的机构简图如图 1 所示。

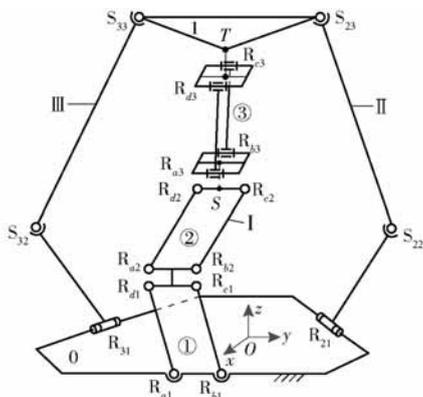


图 1 3TOR 并联机构

Fig. 1 3TOR parallel mechanism

机构动、静平台由 3 条支链连接,其中,混合支

链 I 由 3 个 4R 平行四边形机构串联而成,从静平台 0 到动平台 1 相连的平行四边形 $R_{ai}R_{bi}R_{ci}R_{di}$ ($i = 1, 2, 3$) 分别记为①、②、③;其中,平行四边形①、②共面连接后,与平行四边形③垂直连接。显然,此时平行四边形②的输出杆上 S 点的 POC 集为两平移(2T),而平行四边形③末端输出杆上 T 点的 POC 集为三平移(3T),混合支链 I 的拓扑等效结构可表示为 $HSOC_1 \{P^{(4R)} - P^{(4R)} - P^{(4R)}\}$ 。

而支链 II、III 为无约束支链 R-S-S,其中, R_{21} 、 R_{31} 转动副与静平台 0 相连,球副 S_{23} 、 S_{33} 与动平台 1 相连。

1.2 并联机构的拓扑分析

1.2.1 机构的 POC 计算

并联机构的 POC 方程^[15]为

$$M_{bi} = \bigcup_{i=1}^m M_{ji} \quad (1)$$

$$M_{Pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \quad (2)$$

式中 M_{ji} ——第 i 个运动副的 POC 集

M_{bi} ——第 i 条支链末端的 POC 集

M_{Pa} ——机构动平台的 POC 集

选定动平台 1 上任一点为基点 o' , 确定支路末端构件的 POC 集,混合支链 I 的 POC 集为

$$M_{bI} = \bigcup_{i=1}^3 \left[\begin{array}{c} (t^1 \parallel \diamond (R_{ai}R_{bi}R_{ci}R_{di})) \\ r^0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right]$$

无约束支链 II 和支链 III 的 POC 集相同,分别为

$$M_{bII} = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right] \quad M_{bIII} = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right]$$

确定动平台的 POC 集为

$$M_{Pa} = M_{bI} \cap M_{bII} \cap M_{bIII} =$$

$$\left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right] \cap \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right] \cap \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right]$$

即动平台上任一点的 POC 集为三平移零转动(3TOR)。由此可知,机构只需一条混合支链就可实现三平移的设计要求,考虑到机构自由度为 3,因此,还需要另两条各含一个驱动副的支链连接动定平台,因此,两条支链可采用 R-S-S 无约束支链或 R-T-T 支链。

1.2.2 机构的自由度计算

并联机构的全周 DOF 公式^[15]为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{Lj} \quad (3)$$

其中 $\xi_{Lj} = \dim. \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^j M_{bi} \right) \cup M_{b(j+1)} \right\}$ (4)

$$v = m - n + 1$$

式中 F ——机构自由度

f_i ——第 i 个运动副的自由度

m ——运动副数

v ——独立回路数 n ——构件数

ξ_{L_j} ——第 j 个独立回路的独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}$ ——前 j 条支链组成的子并联机构的 POC 集

$M_{b(j+1)}$ ——前 $j+1$ 条支链末端构件 POC 集

确定由第 I、II 支链构成的第 1 个回路的独立位移方程数为

$$\xi_{L1} = \dim. \{M_{bI} \cup M_{bII}\} = \dim. \left\{ \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^0 \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^3 \end{matrix} \right] \right\} = 6$$

确定由第 I、II 支链构成的子并联机构 (Sub-PM) 的自由度和 POC 集分别为

$$F_{(1-2)} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^1 \xi_{L_j} = 9 - 6 = 3$$

$$M_{Pa(1-2)} = M_{bI} \cap M_{bII} = \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^0 \end{matrix} \right] \cap \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^3 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^0 \end{matrix} \right]$$

确定由上述 (Sub-PM) 和支链 III 构成的回路的独立位移方程数为

$$\xi_{L2} = \dim. \{M_{Pa(1-2)} \cup M_{bIII}\} = \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^3 \end{matrix} \right] = 6$$

确定机构的自由度为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{L_j} = 9 + 6 - (6 + 6) = 3$$

因此,该机构自由度为 3,当取静平台 0 上的转动副 R_{a1} 、 R_{21} 、 R_{31} 为驱动副时,动平台 1 可实现 3 个平移的运动输出。

1.2.3 机构耦合度 κ 的计算

由基于序单开链 (SOC) 的机构组成原理^[15]知,任一机构可分解为约束度为正、零、负的 3 种有序单开链 (SOC),第 j 个 SOC _{j} 的约束度定义为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{L_j} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = +1, +2, +3 \end{cases} \quad (5)$$

式中 m_j ——第 j 个 SOC _{j} 的运动副数

I_j ——第 j 个 SOC _{j} 的驱动副数

进一步,一组有序的 v 个 SOC 可组成一个零自由度的独立回路数为 v 的基本运动链 BKC (Basic kinematics chain),对一个 BKC 而言,须满足

$$\sum_{j=1}^v \Delta_j = 0$$

因此,BKC 的耦合度为

$$\kappa = \Delta_j^+ = |\Delta_j^-| = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \quad (6)$$

式中 $\min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\}$ ——BKC 分解为 v 个 SOC (Δ_j),有多种分配方案,取 $(\sum |\Delta_j|)$ 最小者

在 1.2.2 节中,已计算出机构两个回路的独立位移方程数,即 $\xi_{L1} = \xi_{L2} = 6$,因此,它们的约束度分别为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = 9 - 2 - 6 = 1$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = 6 - 1 - 6 = -1$$

耦合度为

$$\kappa = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^v |\Delta_j| = \frac{1}{2} (|+1| + |-1|) = 1$$

因此,该并联机构仅包含一个 BKC,其耦合度 $\kappa = 1$,这样,机构位置正解求解时仅需建立含一个虚拟变量的非线性位置方程,并可通过一维搜索法求解该机构的位置正解。

2 机构位置分析

2.1 基于有序单开链的机构位置正解求解原理

由基于有序单开链的机构组成原理^[15]可知,机构可分解为若干个 BKC,而每个 BKC 可分解为一列约束度分别为正值、零、负值的单开链回路,因此,机构位置正解的求解,可转换为该 BKC 内 3 种单开链回路的位置求解,而 3 种单开链回路的约束特性及其建模方法分别为:

(1) 约束度为正值的 SOC (Δ_j^+) 回路,会使机构自由度增加 Δ_j^+ ;为确定其运动,需设定 Δ_j^+ 个虚拟变量 ($\Delta_j^+ = k$)。

(2) 约束度为零的 SOC (Δ_j^0) 回路,不影响机构自由度,其运动具有确定性,即其位置正解能独立求解。

(3) 约束度为负值的 SOC (Δ_j^-) 回路,使机构自由度减少 $|\Delta_j^-|$,即可对机构建立 $|\Delta_j^-|$ 个约束方程 ($|\Delta_j^-| = k$)。

(4) 因 SOC (Δ_j^+) 中的虚拟变量数目 Δ_j^+ 恰等于约束方程数目 $|\Delta_j^-|$,因此, Δ_j^+ 个变量的位置易于用非线性方程的一般求解方法 (例:迭代法、二分法等) 或直接应用符号计算软件求出。

2.2 位置正解求解

已知:输入角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 ,求:动平台上 o' 的坐标 (x, y, z) 。

2.2.1 坐标系的建立和参数标注

机构的运动学建模如图2所示,设机构的静平台0为等边三角形,3个转动副分别位于等边三角形的内切圆的3个切点 A_1 、 A_2 、 A_3 上;以静平台0的几何中心 o 为原点,建立笛卡尔静坐标系, x 轴垂直于平行四边形①所在的平面并通过点 A_1 , y 轴平行于平行四边形①平面且指向右侧, z 轴由右手法则确定。

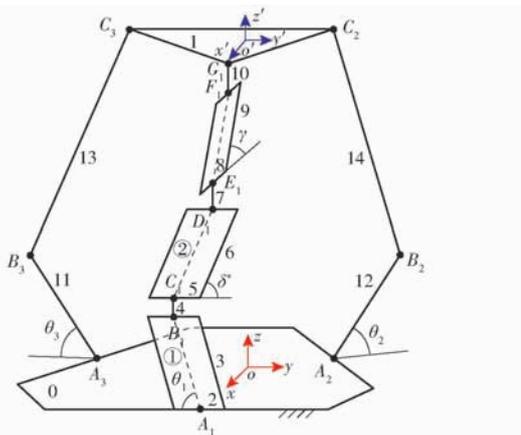


图2 3T机构的运动学建模

Fig.2 Kinematic modeling of 3T parallel mechanism

动平台1也为等边三角形,动坐标系原点 o' 位于动平台1的中心, x' 轴垂直于 C_2C_3 ,且通过 G_1 点, y' 轴与 C_2C_3 平行,指向点 C_2 侧, z' 轴根据右手法则确定。

设等边三角形静平台0的内切圆半径为 a ,等边三角形动平台的边长为 l_2 ;平行四边形短杆2、5、8的长度为 l_3 ,长杆3、6、9的长度为 l_4 ;平行四边形之间的连接杆4、7的长度均为 l_5 ,连接杆10的长度为 l_6 ;两条简单支链上的驱动杆11、12的长度为 l_7 ,连杆13、14的长度为 l_8 。

A_1B_1 与 y 轴负方向的夹角为 θ_1 ; A_2B_2 与 oA_2 延长线的夹角为 θ_2 ; A_3B_3 与 oA_3 延长线的夹角为 θ_3 ; D_1C_1 与 y 轴正方向的夹角为 δ^* ; F_1E_1 与 x 轴负方向的夹角为 γ 。

易知,在静坐标系 $oxyz$ 下,各点的坐标为

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (a, 0, 0)^T & A_2 &= (-a/2, \sqrt{3}a/2, 0)^T \\
 A_3 &= (-a/2, -\sqrt{3}a/2, 0)^T \\
 B_1 &= (a, -l_4 \cos\theta_1, l_4 \sin\theta_1)^T \\
 B_2 &= \begin{bmatrix} -a/2 - l_7 \cos\theta_2/2 \\ \sqrt{3}a/2 + \sqrt{3}l_7 \cos\theta_2/2 \\ l_7 \sin\theta_2 \end{bmatrix} \\
 B_3 &= \begin{bmatrix} -a/2 - l_7 \cos\theta_3/2 \\ -\sqrt{3}a/2 - \sqrt{3}l_7 \cos\theta_3/2 \\ l_7 \sin\theta_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.2.2 $\Delta_1 > 0$ 的第一单开链回路的位置求解

在 $\Delta_1 > 0$ 的回路上,设定虚拟变量 δ^* ,而中间变量 γ 可通过方程求出为关于 δ^* 的函数。

由2.2.1节知,由第I、II支链构成的第1回路为

$$\{A_1 - B_1 - C_1 - D_1 - E_1 - F_1 - G_1 - C_2 - B_2 - A_2\}$$

易求出点 C_1 、 D_1 、 E_1 、 F_1 、 G_1 的坐标为

$$\begin{cases}
 C_1 = (a, -l_4 \cos\theta_1, l_4 \sin\theta_1 + l_5)^T \\
 D_1 = \begin{bmatrix} a \\ -l_4 \cos\theta_1 + l_4 \cos\delta^* \\ l_4 \sin\theta_1 + l_5 + l_4 \sin\delta^* \end{bmatrix} \\
 E_1 = \begin{bmatrix} a \\ -l_4 \cos\theta_1 + l_4 \cos\delta^* \\ l_4 \sin\theta_1 + l_5 + l_4 \sin\delta^* + l_5 \end{bmatrix} \\
 F_1 = \begin{bmatrix} a - l_4 \cos\gamma \\ -l_4 \cos\theta_1 + l_4 \cos\delta^* \\ l_4 \sin\theta_1 + l_5 + l_4 \sin\delta^* + l_5 + l_4 \sin\gamma \end{bmatrix} \\
 G_1 = \begin{bmatrix} a - l_4 \cos\gamma \\ -l_4 \cos\theta_1 + l_4 \cos\delta^* \\ l_4 \sin\theta_1 + l_5 + l_4 \sin\delta^* + l_5 + l_4 \sin\gamma + l_6 \end{bmatrix}
 \end{cases} \quad (7)$$

同时,可计算得点 o' 的坐标

$$o' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - l_4 \cos\gamma - \sqrt{3}l_2/3 \\ -l_4 \cos\theta_1 + l_4 \cos\delta^* \\ l_4 \sin\theta_1 + l_4 \sin\delta^* + 2l_5 + l_4 \sin\gamma + l_6 \end{bmatrix} \quad (8)$$

进一步,点 C_2 、 C_3 的坐标,用 o' 点的坐标表示为

$$C_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}l_2/6 + x \\ l_2/2 + y \\ z \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}l_2/6 + x \\ -l_2/2 + y \\ z \end{bmatrix} \quad (10)$$

由几何约束 $B_2C_2 = l_8$ 有

$$(x_{C_2} - x_{B_2})^2 + (y_{C_2} - y_{B_2})^2 + (z_{C_2} - z_{B_2})^2 = l_8^2$$

整理并简化得

$$A \sin\gamma + B \cos\gamma + C = 0$$

令 $\tan\gamma/2 = u$,则有

$$\gamma = 2 \arctan \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A &= 2El_4 - 2l_4 z_{B_2} \\
 B &= -2Dl_4 + 2l_4 x_{B_2}
 \end{aligned}$$

$$C = D^2 + E^2 + F^2 - l_9^2 + l_4^2 -$$

$$2Dx_{B_2} - 2Fy_{B_2} - 2Ez_{B_2} + x_{B_2}^2 + y_{B_2}^2 + z_{B_2}^2$$

$$D = a - \sqrt{3}l_2/2$$

$$E = l_4 \sin\theta_1 + l_4 \sin\delta^* + 2l_5 + l_6$$

$$F = -l_4 \cos\theta_1 + l_4 \cos\delta^* + l_2/2$$

显然, γ 为虚拟变量 δ^* 的函数。

2.2.3 $\Delta_2 < 0$ 的第二单开链回路的位置求解

第二单开链回路 $\{A_3 - B_3 - C_3\}$ 中: A_3 、 B_3 、 C_3 的坐标已求得, 由几何约束 $C_3B_3 = l_8$, 建立位置约束方程

$$F(\delta^*) = (x_{C_3} - x_{B_3})^2 + (y_{C_3} - y_{B_3})^2 +$$

$$(z_{C_3} - z_{B_3})^2 - l_8^2 = 0 \quad (11)$$

该方程中仅包含一个虚拟变量 δ^* , 因此, 可通过一维搜索, 不断改变 δ^* 的赋值, 直至满足式 (11) 成立, 获得真实的 δ ; 再代回式 (7) ~ (10), 即可求得各个运动副位置的真实值, 从而得到该机构的位置正解。计算过程如图 3 所示。

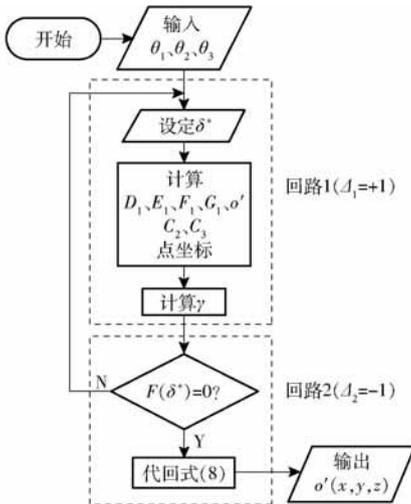


图3 本机构运动学正解求解流程图

Fig.3 Flow chart of forward kinematics of proposed PM

2.3 位置逆解求解

已知: 动平台 1 上 o' 的坐标 (x, y, z) , 求输入角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 。

由 o' 坐标 (x, y, z) , 可求 F_1 、 E_1 、 D_1 点的坐标为

$$F_1 = \begin{bmatrix} x + \sqrt{3}l_2/3 \\ y \\ z - l_6 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} x + \sqrt{3}l_2/3 + l_4 \cos\gamma \\ y \\ z - l_6 - l_4 \sin\gamma \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} x + \sqrt{3}l_2/3 + l_4 \cos\gamma \\ y \\ z - l_6 - l_4 \sin\gamma - l_5 \end{bmatrix}$$

由式 (7)、(12), 可求出 γ 为

$$\gamma = \arccos \frac{a - x - \sqrt{3}l_2/3}{l_4}$$

另外, C_2 、 C_3 的坐标已由式 (9)、(10) 给出, 因此, 由杆长条件建立位置约束方程

$$(x_{D_1} - x_{C_1})^2 + (y_{D_1} - y_{C_1})^2 + (z_{D_1} - z_{C_1})^2 = l_4^2 \quad (13)$$

$$(x_{C_2} - x_{B_2})^2 + (y_{C_2} - y_{B_2})^2 + (z_{C_2} - z_{B_2})^2 = l_8^2 \quad (14)$$

$$(x_{C_3} - x_{B_3})^2 + (y_{C_3} - y_{B_3})^2 + (z_{C_3} - z_{B_3})^2 = l_8^2 \quad (15)$$

即可求解输入角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 为

$$\theta_i = 2\arctan \frac{2t_i \pm \sqrt{4t_i^2 + M_i N_i}}{N_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (16)$$

其中 $t_1 = l_4 l_5 - l_4 z_{D_1}$ $t_2 = -l_7 z_{C_2}$ $t_3 = -l_7 z_{C_3}$

$$M_1 = a^2 + l_5^2 - 2ax_{D_1} + 2l_4 y_{D_1} - 2l_5 z_{D_1} + x_{D_1}^2 + y_{D_1}^2 + z_{D_1}^2$$

$$N_1 = -a^2 - l_5^2 + 2ax_{D_1} + 2l_4 y_{D_1} + 2l_5 z_{D_1} - x_{D_1}^2 - y_{D_1}^2 - z_{D_1}^2$$

$$M_2 = a^2 - l_8^2 + l_7^2 + 2al_7 + l_7 x_{C_2} + ax_{C_2} -$$

$$\sqrt{3}l_7 y_{C_2} - \sqrt{3}ay_{C_2} + x_{C_2}^2 + y_{C_2}^2 + z_{C_2}^2$$

$$N_2 = -a^2 + l_8^2 - l_7^2 + 2al_7 + l_7 x_{C_2} - ax_{C_2} -$$

$$\sqrt{3}l_7 y_{C_2} + \sqrt{3}ay_{C_2} - x_{C_2}^2 - y_{C_2}^2 - z_{C_2}^2$$

$$M_3 = a^2 - l_8^2 + l_7^2 + 2al_7 + l_7 x_{C_3} + ax_{C_3} +$$

$$\sqrt{3}l_7 y_{C_3} + \sqrt{3}ay_{C_3} + x_{C_3}^2 + y_{C_3}^2 + z_{C_3}^2$$

$$N_3 = -a^2 + l_8^2 - l_7^2 + 2al_7 + l_7 x_{C_3} - ax_{C_3} +$$

$$\sqrt{3}l_7 y_{C_3} - \sqrt{3}ay_{C_3} - x_{C_3}^2 - y_{C_3}^2 - z_{C_3}^2$$

综上所述, 当给定动平台 1 上 o' 的坐标 (x, y, z) 时, 输入角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 各有两组解, 故逆解的数目为 $2 \times 2 \times 2 = 8$, 因此, 机构有 8 种构型。

2.4 正逆解验证

设 $a = 150\sqrt{3}$ mm, $l_2 = 300$ mm, $l_3 = 70$ mm, $l_4 = 170$ mm, $l_5 = 45$ mm, $l_6 = 31$ mm, $l_7 = 217$ mm, $l_8 = 432$ mm。取 3 个输入角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 为 150° 、 41° 、 41° 。

由 Matlab 计算该机构位置正解, 如表 1 所示。

表 1 位置正解数值

Tab.1 Numerical values of direct kinematics mm

序号	x	y	z
1	241.276 1	0.261 9	216.642 9
2	232.282 2	0.138 2	33.131 7
3	76.897 7	0.373 1	457.104 5
4	247.140 5	4.237 0	176.501 2

取表 1 中第 3 组正解数值, 代入逆解式 (16) 中, 得到 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 的 8 组逆解数值, 如表 2 所示。

表2 位置逆解数值

Tab.2 Numerical values of inverse kinematics (°)

序号	θ_1	θ_2	θ_3
1	29.427 0	41.040 0	41.140 0
2	29.427 0	41.040 0	169.535 7
3	150.830 0	41.040 0	41.140 0
4	150.830 0	41.040 0	169.535 7
5	29.427 0	169.485 0	41.140 0
6	29.427 0	169.485 0	169.535 7
7	150.830 0	169.485 0	41.140 0
8	150.830 0	169.485 0	169.535 7

可见,表2中第3组的逆解数据和正解求解时给定的3个输入角一致,其最大相对误差为0.55%;同样,用表1中的其他正解数据,也验证了正、逆解公式的正确性。

3 机构奇异性分析

3.1 雅可比矩阵

将式(13)~(15)两边同时对时间 t 求导,得该机构动平台末端执行器的输出速度 $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T$ 和主动关节的输入角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3]^T$ 的关系为

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad (17)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \text{diag}(u_{11}, u_{22}, u_{33})$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= x_{D_1} - x_{C_1} & f_{12} &= y_{D_1} - y_{C_1} & f_{13} &= z_{D_1} - z_{C_1} \\ f_{21} &= x_{C_2} - x_{B_2} & f_{22} &= y_{C_2} - y_{B_2} & f_{23} &= z_{C_2} - z_{B_2} \\ f_{31} &= x_{C_3} - x_{B_3} & f_{32} &= y_{C_3} - y_{B_3} & f_{33} &= z_{C_3} - z_{B_3} \\ u_{11} &= -(y_{D_1} - y_{C_1})l_4 \sin\theta_1 - (z_{D_1} - z_{C_1})l_4 \cos\theta_1 \\ u_{22} &= -(x_{C_2} - x_{B_2})l_7 \sin\theta_2/2 + (y_{C_2} - y_{B_2})\sqrt{3}l_7 \sin\theta_2/2 - l_7(z_{C_2} - z_{B_2})\cos\theta_2 \\ u_{33} &= -(x_{C_3} - x_{B_3})l_7 \sin\theta_3/2 - (y_{C_3} - y_{B_3})\sqrt{3}l_7 \sin\theta_3/2 - l_7(z_{C_3} - z_{B_3})\cos\theta_3 \end{aligned}$$

3.2 奇异性分析

依据矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 是否奇异,将机构奇异位形分为如下3类^[22]:

(1)第I类奇异,即

$$\det \mathbf{B} = 0 \quad (18)$$

这种类型的奇异位形发生在并联机构的工作空间边界或者位置逆解数目发生变化时的位形,称为串联奇异(边界奇异)。当机构发生第I类奇异时,机构的执行构件将失去某个方向的运动能力,此时,至少有一个运动链达到了工作空间的边界。

根据式(18)有, $u_{11}u_{12}u_{13} = 0$,所以 u_{11} 、 u_{12} 、 u_{13} 中至少有一个为零,当 $u_{11} = 0$,即 $\tan\theta_1 = -(z_{D_1} - z_{C_1})/(y_{D_1} - y_{C_1})$,即点 C_1 、 D_1 所在直线斜率和角 θ_1 的斜率相等,即当 $R_{d2}R_{a2}$ 和 $R_{d1}R_{a1}$ 平行时如图4a所示。

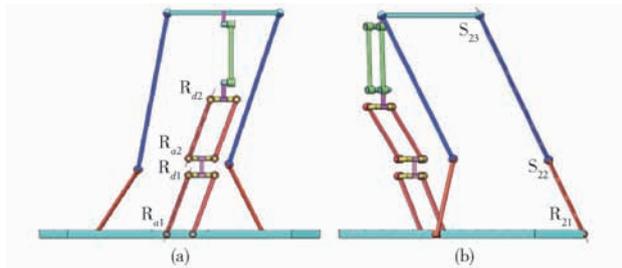


图4 第I类奇异位置

Fig.4 The first kind of singularity

同理 u_{22} 、 u_{33} 为零的条件分别为

$$\begin{aligned} \tan\theta_2 &= -(z_{C_2} - z_{B_2})/(x_{C_2} - x_{B_2}) \cos 60^\circ + (y_{C_2} - y_{B_2}) \cos 30^\circ \\ \tan\theta_3 &= -(z_{C_3} - z_{B_3})/(x_{C_3} - x_{B_3}) \cos 60^\circ - (y_{C_3} - y_{B_3}) \cos 30^\circ \end{aligned}$$

对应的条件分别为点 C_2 、 B_2 、 A_2 和点 C_3 、 B_3 、 A_3 分别在 A_2oz 和 A_3oz 平面共线,两个条件中,其中一个发生即为串联奇异的第2种情况。机构的2条RSS支链是对称的,因此,图4b为其中一种情况,即一条支链达到工作空间边界的情况。

当机构处于以上任一位置时,均会发生奇异。

(2)第II类奇异,即

$$\det \mathbf{A} = 0 \quad (19)$$

这种类型的奇异位形发生在并联机构的工作空间内部,称为并联奇异(内部奇异)。此时固定并联机构的输入驱动关节,末端执行器仍存在瞬时运动,表明机构至少获得一个瞬时自由度,这时并联机构失去刚度,无法承受任何承载。

由式(19)可知,将矩阵 \mathbf{A} 看作3个行向量,即:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3]^T, \det \mathbf{A} = 0 \text{ 存在两种情况:}$$

①2个向量线性相关

设 $k\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ (即 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 线性相关)

$$k(f_{11}, f_{12}, f_{13})^T = (f_{21}, f_{22}, f_{23})^T$$

即杆 $R_{c2}R_{b2}$ 和杆 $S_{23}S_{22}$ 在空间内平行,如图5a所示。

设 $k\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ (即 \mathbf{e}_2 、 \mathbf{e}_3 线性相关)

$$k(f_{21}, f_{22}, f_{23})^T = (f_{31}, f_{32}, f_{33})^T$$

即杆 $S_{33}S_{32}$ 和杆 $S_{23}S_{22}$ 在空间内平行,如图5b所示。

②3个向量线性相关

设 $\mathbf{e}_2 = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_3$ ($k_1k_2 \neq 0$),则有

$$k(f_{21}, f_{22}, f_{23})^T = k_1(f_{11}, f_{12}, f_{13})^T + k_2(f_{31}, f_{32}, f_{33})^T$$

通过 Matlab 计算表明,该种情况下 k_1 、 k_2 的解无法解出,因此,此种情况不存在。

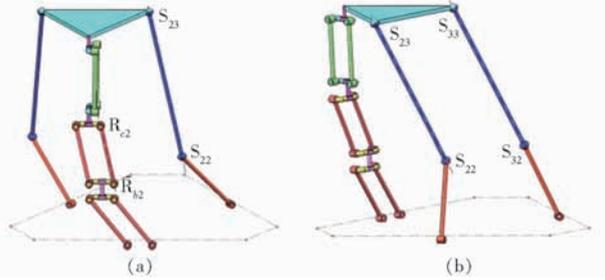


图5 第II类奇异位置

Fig.5 The second kind of singularity

(3)第III类奇异,即

$$\det A = 0 \text{ 且 } \det B = 0$$

此时机构的驱动关节和末端执行器都存在着瞬时互不影响的非零输入和输出,对应的位姿就是第III类奇异,处于该类奇异时,机构将失去自由度,在机构设计阶段应予以避免。

4 机构的工作空间以及内部奇异分析

U副在实际中应用广泛,相比于S副有着更大的转动范围,且结构更简单。因此,两条RSS无约束支链,实际制作时采用RUU支链,自由度、输出和运动学分析不变,但被动副的运动范围增加了很多,因此,工作空间大大增加。根据实验室已经制作的使用RUU支链替代RSS支链的样机的尺寸比例,在SolidWorks中设计虚拟样机如图6所示,在每一个U副上建立空间直角坐标系 u_i, v_i, w_i ($i = 1, 2, 3, 4$),向量 a_i ($i = 2, 3$) 表示平行于驱动副转动轴线并指向静坐标系 x 轴正方向的向量;向量 b_i ($i = 2, 3$) 表示与驱动臂平行,并指向被动U副的向量。

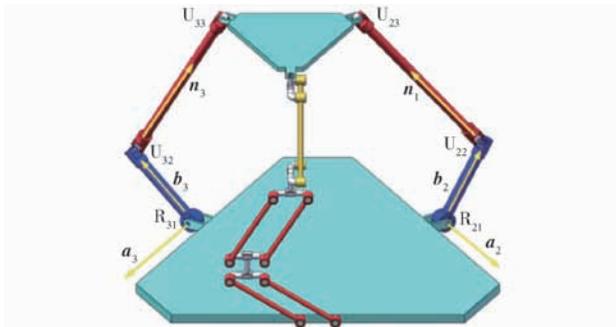


图6 虚拟样机设计

Fig.6 Virtual prototyping design

图7为支链II中连接主动臂和从动臂的U副 U_{22} 的建模图, α_{u1} 为向量 n_1 绕着向量 u_1 轴转动,距向量 w_1 轴产生的偏角; α_{v1} 为向量 n_1 绕着向量 v_1 轴转动,距向量 w_1 轴产生的偏角;在虚拟样机中调试动平台运动,得到向量 u_1 和向量 n_1 的夹角范围为 $30^\circ \leq \arccos(u_1 n_1) \leq 120^\circ$, 向量 v_1 和向量 n_1 的夹角

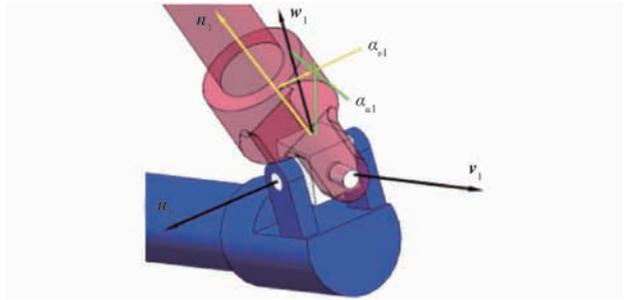


图7 被动副 U_{22} 建模

Fig.7 Modeling of passive joint U_{22}

范围为 $0^\circ \leq \arccos(v_1 n_1) \leq 180^\circ$ 。

图8为支链II中连接从动臂和动平台的U副的 U_{23} 建模图, α_{u2} 为向量 n_2 绕着向量 u_2 轴转动,距向量 w_2 轴产生的偏角; α_{v2} 为向量 n_2 绕着向量 v_2 轴转动,距向量 w_2 轴产生的偏角;在虚拟样机中调试动平台运动,得到向量 u_2 和向量 n_2 的夹角范围为 $50^\circ \leq \arccos(u_2 n_2) \leq 150^\circ$, 向量 v_2 和向量 n_2 的夹角范围为 $90^\circ \leq \arccos(v_2 n_2) \leq 180^\circ$ 。

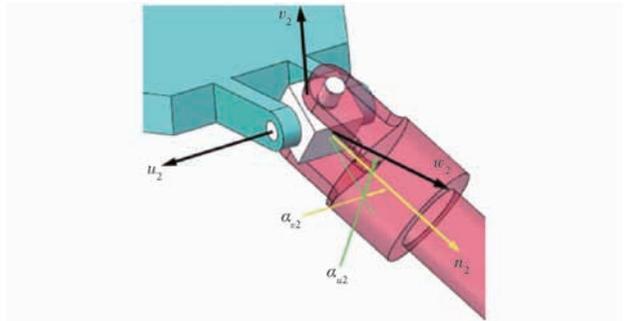


图8 被动副 U_{23} 建模

Fig.8 Modeling of passive joint U_{23}

另一条RUU支链建模同理。

机构的工作空间分析,采用离散化空间三维搜索法,将搜索范围设定为: $-100 \text{ mm} \leq x \leq 300 \text{ mm}$, $-400 \text{ mm} \leq y \leq 400 \text{ mm}$, $-450 \text{ mm} \leq z \leq 650 \text{ mm}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 。

通过 Matlab 求得工作空间,如图9所示。

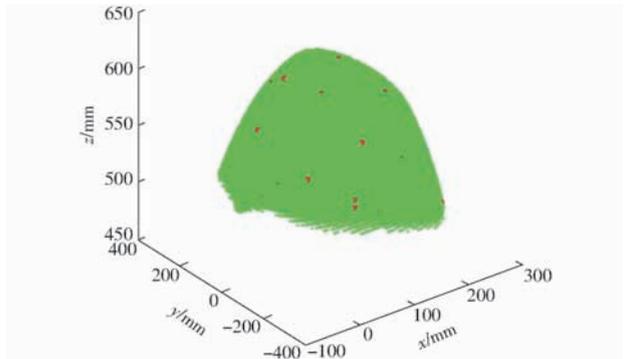


图9 工作空间及其奇异情况

Fig.9 Workspace and singularities

串联奇异可以通过实际控制手段避开,因此,本文主要讨论并联奇异,即第II类奇异。根据第II类

奇异判别式(19),利用 Matlab 软件编程求解,得到如图 9 所示的机构工作空间的三维立体图,其中,红色的点为发生第 II 类奇异时在工作空间内的位置,

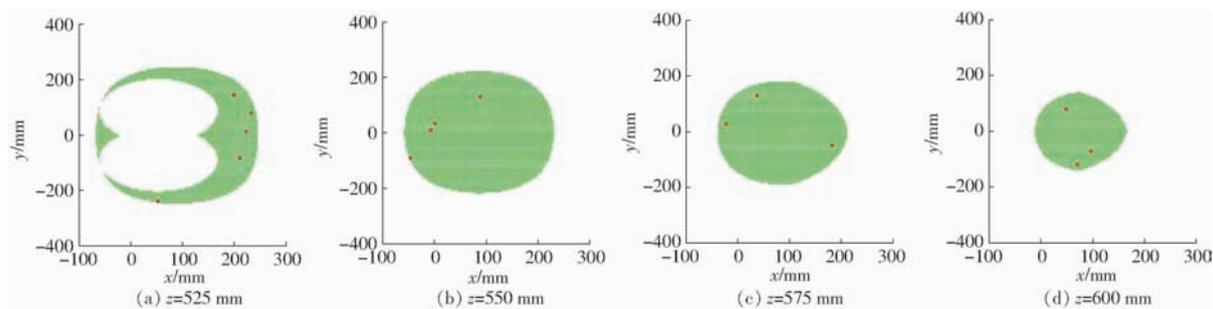


图 10 工作空间内不同 $x-y$ 截面内奇异情况

Fig. 10 Singularities in workspace from different $x-y$ sections

5 结论

(1) 提出了一种低耦合度三平移并联机构,其结构简单,具有单一动平台,可实现较大范围的三维移动。

(2) 机构耦合度 $\kappa = 1$, 因此,其位置正解求解仅

绿色部分为无奇异区域。图 10 为 4 个 $x-y$ 截面随着 z 值的改变奇异与非奇异工作空间情况,表明该工作空间内部的无奇异工作空间较大。

需建立含一个虚拟变量的非线性约束方程,并用一维搜索法即可求得。

(3) 给出了该机构发生奇异位置的几何条件和工作空间内奇异产生的位置,表明机构的有效工作空间较大。

参 考 文 献

- [1] CLAVEL R. A fast robot with parallel geometry[C]//Proceedings of the 18th Int. Symposium on Industrial Robots, 1988;91-100.
- [2] STOCK M, MILLER K. Optimal kinematic design of spatial parallel manipulators: application to linear delta robot[J]. Journal of Mechanical Design, 2003, 125(2):292-301.
- [3] BOURI M, CLAVEL R. The linear delta: developments and applications[C]//Robotics, VDE, 2010;1-8.
- [4] KELAIAlA R, COMPANY O, ZAATRI A. Multiobjective optimization of a linear delta parallel robot[J]. Mechanism & Machine Theory, 2012, 50(2):159-178.
- [5] TSAI L W, WALSH G C, STAMPER R E. Kinematics of a novel three dof translational platform[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, MN 3446-3451 (1996).
- [6] TSAI L W, JOSHI S. Kinematics and optimization of a spatial 3-UPU parallel manipulator ASME[J]. Mech. Des., 2000, 122:439-446.
- [7] 赵铁石, 黄真. 一种三维移动并联平台机构的运动学分析[J]. 中国机械工程, 2001, 12(6):612-616.
ZHAO Tieshi, HUANG Zhen. Kinematics of a three-dimension translational parallel platform mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2001, 12(6):612-616. (in Chinese)
- [8] 尹小琴, 马履中. 三平移并联机构 3-RRR 的工作空间分析[J]. 中国机械工程, 2003, 14(18):1531-1533.
YIN Xiaoqin, MA Lüzhong. Workspace analysis of a 3-DOF translational parallel mechanism 3-RRR[J]. China Mechanical Engineering, 2003, 14(18):1531-1533. (in Chinese)
- [9] KONG X, GOSSELIN C M. Kinematics and singularity analysis of a novel type of 3-CRR 3-DOF translational parallel manipulator[J]. Int. J. Robot. Res., 2002, 21:791-798.
- [10] LI S. Kinematics of a special 3-DOF 3-UPU parallel manipulator[C]//ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers & Information in Engineering Conference, 2002.
- [11] LI S, HUANG Z. Kinematic characteristics of a special 3-UPU parallel platform manipulator[J]. China Mechanical Engineering, 2005, 18(3):376-381.
- [12] 李仕华, 黄真. 新型三维移动 3-RRUR 并联平台机构及其位置分析[J]. 机械设计, 2005, 22(8):39-42.
LI Shihua, HUANG Zhen. New typed 3D transformational 3-RRUR parallel platform mechanism and its positional analysis [J]. Journal of Machine Design, 2005, 22(8):39-42. (in Chinese)
- [13] 陆晶, 高国琴, 朱彩红, 等. 新型三平移并联机构的运动分析和工作空间分析[J]. 机械设计与制造, 2007, 11(11):163-165.
LU Jing, GAO Guoqin, ZHU Caihong, et al. Analysis of the workspace of a novel 3-DOF translational parallel robot[J]. Machinery Design & Manufacture, 2007, 11(11):163-165. (in Chinese)
- [14] 谢俊, 张晓庆, 王成军. 基于三平移并联机构的茶叶筛分试验[J/OL]. 农业机械学报, 2012, 43(10):101-104.
XIE Jun, ZHANG Xiaoqing, WANG Chengjun. Tea sieving based on three translation parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(10):101-104. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20121018&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2012.10.018. (in Chinese)

University of Engineering Science, 2015. (in Chinese)

- [10] 陈艳, 张漫, 马文强, 等. 基于 GPS 和机器视觉的组合导航定位方法[J]. 农业工程学报, 2011, 27(3): 126-130.
CHEN Yan, ZHANG Man, MA Wenqiang, et al. Positioning method of integrated navigation based on GPS and machine vision [J]. Transactions of the CSAE, 2011, 27(3): 126-130. (in Chinese)
- [11] 贾全. 拖拉机自动导航系统关键技术研究[D]. 北京: 中国农业机械化科学研究院, 2013.
JIA Quan. Study on key technology of tractor auto-navigation system [D]. Beijing: Chinese Academy of Agricultural Mechanization Sciences, 2013. (in Chinese)
- [12] GROVES P D. Navigation using inertial sensors [J]. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 2015, 30(2): 42-69.
- [13] 张亚娇. 农机自动驾驶监控终端关键技术研究及系统开发[D]. 广州: 华南农业大学, 2016.
ZHANG Yajiao. Key technology research and system development on automatic navigation of monitoring terminal for agricultural machinery [D]. Guangzhou: South China Agricultural University, 2016. (in Chinese)
- [14] 李军, 马蓉. 拖拉机自动转向系统设计研究[J]. 拖拉机与农用运输车, 2012, 39(5): 47-50.
LI Jun, MA Rong. Design and study of tractor automatic steering system [J]. Tractor & Farm Transporter, 2012, 39(5): 47-50. (in Chinese)
- [15] 胡书鹏, 尚业华, 刘卉, 等. 拖拉机转向轮转角位移式和四连杆式间接测量方法对比试验[J]. 农业工程学报, 2017, 33(4): 76-82.
HU Shupeng, SHANG Yehua, LIU Hui, et al. Comparative test between displacement and four-bar indirect measurement methods for tractor guide wheel angle [J]. Transactions of the CSAE, 2017, 33(4): 76-82. (in Chinese)
- [16] 缪存孝, 楚焕鑫, 孙志辉, 等. 基于双 GNSS 天线及单陀螺的车轮转角测量系统[J/OL]. 农业机械学报, 2017, 48(9): 17-23.
MIAO Cunxiao, CHU Huanxin, SUN Zhihui, et al. Wheel turning angle measurement system based on double GNSS antennas and single gyro [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(9): 17-23. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20170902&flag=1. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2017.09.002. (in Chinese)
- [17] 张宝富, 穆希辉, 杜峰坡, 等. 基于光电编码器和 PLC 的车轮转角检测显示系统[J]. 机械与电子, 2009, 27(7): 62-63, 77.
ZHANG Baofu, MU Xihui, DU Fengpo, et al. A wheel angle measuring and displaying system based on photoelectric encoder and PLC [J]. Machinery & Electronics, 2009, 27(7): 62-63, 77. (in Chinese)
- [18] 周全申, 乔永钦, 朱琳. 车辆转向机构设计与分析[J]. 河南工业大学学报(自然科学版), 2006, 27(2): 60-62.
ZHOU Quanshen, QIAO Yongqin, ZHU Lin. Design and analyze of mechanism of vehicle change direction [J]. Journal of Henan University of Technology (Natural Science Edition), 2006, 27(2): 60-62. (in Chinese)
- [19] JEFFREY D W. Sensor fusion for field robot localization [D]. Urbana: University of Illinois, 2001.

(上接第 411 页)

- [15] ZENG Q, EHMANN K F, CAO J. Tri-pyramid robot: design and kinematic analysis of a 3-DOF translational parallel manipulator [M]. Pergamon Press, Inc. 2014.
- [16] LEE S, ZENG Q, EHMANN K F. Error modeling for sensitivity analysis and calibration of the tri-pyramid parallel robot [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017(5): 1-14.
- [17] PRAUSE I, CHARAF E. Comparison of parallel kinematic machines with three translational degrees of freedom and linear actuation [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(4): 841-850.
- [18] MAHMOOD M, MOSTAFA T. Kinematic analysis and design of a 3-DOF translational parallel robot [J]. International Journal of Automation and Computing, 2017, 14(4): 432-441.
- [19] 杨启志, 孙梦涛, 蔡静, 等. 温室穴盘苗并联合高速移栽机器人运动误差分析与试验[J/OL]. 农业机械学报, 2018, 49(3): 18-27.
YANG Qizhi, SUN Mengtao, CAI Jing, et al. Kinematic error analysis and test of high-speed plug seeding transplanting machine for greenhouse based on parallel mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(3): 18-27. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20180302&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2018.03.002. (in Chinese)
- [20] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [21] YANG T L, LIU A, SHEN H, et al. Topology design of robot mechanisms [M]. Singapore: Springer, 2018.
- [22] 周结华, 彭侠夫. 三自由度冗余驱动并联机构的奇异性和工作空间分析[J]. 中国机械工程, 2014, 65(12): 751-756.
ZHOU Jiehua, PENG Xiafu. Singularity and workspace analysis of a 3-DOF parallel manipulator with redundant actuation [J]. China Mechanical Engineering, 2014, 65(12): 751-756. (in Chinese)