

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.12.047

# 3T1R 并联机构降耦设计与分析

朱小蓉 胡 旻 沈惠平 杨廷力 朱 伟

(常州大学机械工程学院, 常州 213164)

**摘要:** 根据基于方位特征集的并联机构拓扑结构设计理论和机构结构降耦原理,设计了一种低耦合度的 3T1R 运动解耦并联机构。首先,对一种耦合度  $\kappa$  为 2 的 3T1R 并联机构进行了结构降耦设计,得到了耦合度较低 ( $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 0$ ),但自由度和末端执行件输出运动类型均保持不变的新机型;又对其进行了运动解耦性分析,表明机构具有部分运动解耦;然后,导出了机构位置正、逆解方程和雅可比矩阵;最后,基于雅可比矩阵分析了机构奇异性,并进一步对该并联机构可达工作空间和转动能力进行了分析,得到了机构无奇异工作空间区域。结果表明,降耦机构具有结构简单、无奇异工作空间形状规则、体积大,且全工作空间所有位置的转动能力一致等特点,克服了一般并联机构耦合性强、控制复杂的弱点,具有较好的工业应用前景。

**关键词:** 并联机构; 耦合度; 拓扑结构降耦; 运动解耦; 无奇异工作空间; 转动能力

**中图分类号:** TH112    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1000-1298(2018)12-0393-09

## Design and Analysis of Structure Coupling Reduction on Novel 3T1R Parallel Mechanism

ZHU Xiaorong HU Yang SHEN Huiping YANG Tingli ZHU Wei

(School of Mechanical Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

**Abstract:** According to the design theory for parallel mechanisms (PMs) based on position and orientation characteristic (POC) equation and the principle for coupling degree reduction, a novel 3T1R PM with lower coupling degree was proposed. Firstly, the structure coupling-reducing optimization design for a kind of 3T1R PM was performed, whose POC and degree of freedom were unchanged with lower coupling degree ( $\kappa_1 = 1$  and  $\kappa_2 = 0$ ). Moreover, the topological structure and the decoupling characteristic were analyzed and the results showed the motion of the mechanism was partially decoupled. Secondly, the positive and inverse analytic solutions were analyzed, and the singularity analysis was also performed based on Jacobian matrix, from which two singularity-free workspace regions were obtained. Finally, the workspace and rotation capability were also analyzed, which showed that workspace and rotation capability of the coupling reduction PM were enhanced compared with that of the original PM under the same structural parameters. The results showed that the coupling reduction mechanism had good motion-decoupling property, simple mechanical structure, large workspace and remarkable consistent rotational capacity in full workspace, and avoided the shortcomings of bad rotational capacity and strong coupling, which made it a promising prospect in the application of industry.

**Key words:** parallel mechanism; coupling degree; topological structure coupling-reducing; motion decoupling; singularity-free workspace; rotation capacity

## 0 引言

3T1R 并联机构由于能实现沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的平动和绕固定轴(通常为  $z$  轴)的转动,可用于分拣、包装、码垛、装配等操作,在工业中得到大量应用。最

初的 3T1R 并联机构是在 3-DOF Delta 机器人<sup>[1]</sup>的基础上加装中间 UPU 支链以实现绕  $z$  轴的独立转动。在此之后,提出了一系列由 4 支链和铰接双动平台组成的 3T1R 并联机构<sup>[2-8]</sup>,如 H4、I4、Par4、Heli4、CrossIV 等;文献[9-14]提出了一类结构对

收稿日期: 2018-07-14 修回日期: 2018-08-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(51475050)和江苏省自然科学基金项目(BK20161192)

作者简介: 朱小蓉(1972—),女,副教授,博士,主要从事机构学和并联机构研究,E-mail: zxr@cczu.edu.cn

称、具有4支链和刚性单动平台的3T1R并联机构。上述能实现3T1R运动的并联机构中,含铰接双动平台的机构,通过2个子动平台的相对运动和特定设计的传动装置能实现较大旋转角,最大转动范围可达 $[-90^\circ, 90^\circ]$ ,但该类机构的结构和运动学都较为复杂;而刚性单动平台3T1R机构,由于支链耦合、机构奇异性的影响,这些机构的工作空间特别是转动范围受限,且这些机构的耦合度较大( $\kappa = 2$ ),其运动学正解、动力学分析求解复杂。因此,为满足工程实际应用需要,还需要对解耦及大转动能力的3T1R并联机构进行更多的研究。

根据基于方位特征(Position and orientation characteristic, POC)方程的并联机构拓扑结构设计理论,文献[15]提出了3种拓扑结构降耦设计原理和方法,其中,基于运动副复合的设计方法,在降低机构耦合度的同时,使机构的结构设计、制造变得更简单,已成为并联机构拓扑结构降耦设计的一种主要方法<sup>[16-18]</sup>。

文献[19-21]提出了一种具有较好应用前景的四自由度Quadrupterion并联机构,能实现三平移和绕动平台法线的一个转动输出,但机构的耦合度较高( $\kappa = 2$ ),且机构的转动能力受限。本文采用基于运动副复合的设计方法,对其进行结构降耦,以得到一种自由度和末端件输出运动类型保持不变,但机构耦合度降低,且具有运动解耦的新机型。

## 1 降耦并联机构

### 1.1 机构降耦设计

#### 1.1.1 Quadrupterion 并联机构

Quadrupterion 并联机构如图1所示<sup>[22]</sup>,由1条CRR支链(Leg 1)和3条CRRR支链(Leg 2、Leg 3、Leg 4)连接定平台和动平台;与动平台相连的4个R副的轴线与动平台的法线相互平行;每条支链上其余的C副和R副轴线互相平行。

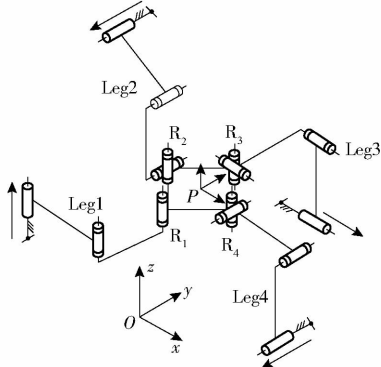


图1 Quadrupterion 并联机构

Fig. 1 Kinematic diagram of Quadrupterion

易知,当定平台上4个C副的移动作为驱动时,动平台可实现三平移和绕动平台法线的转动输出;同时,该机构由1个基本运动链(BKC)组成,且耦合度 $\kappa = 2$ ,其运动学正解及动力学正反解求解复杂。

#### 1.1.2 降耦设计

文献[15]提出的基于运动副复合的结构降耦设计方法,已对多种耦合度较高的并联机构进行了拓扑降耦优化设计<sup>[15-18]</sup>。由于Quadrupterion机构动平台上的4个R副轴线平行,可以通过合并的方法达到机构结构降耦的目的。

保持CRR支链(Leg 1)不变,首先将图1所示Quadrupterion并联机构的2条CRRR支链(Leg 2和Leg 3)上与动平台连接的2个转动副重合,合并成 $R_D$ 副,移至动平台的中心;再拆开另1条CRRR支链(Leg 4)与动平台相连的R副,并通过末端执行件与 $R_D$ 副相连,则构成图2所示的新型降耦机构,记为(3CRR/R)&CRRR并联机构。

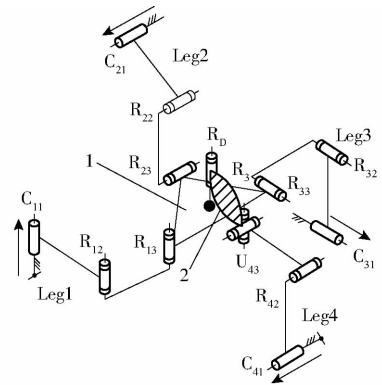


图2 (3CRR/R)&CRRR 降耦并联机构

Fig. 2 (3CRR/R)&CRRR decoupled PM

这样,降耦机构由静平台0、中间平台1和末端执行件2组成。其中,静平台0和中间平台1之间由转动副 $R_{12}$ 、 $R_{13}$ 、 $R_{22}$ 、 $R_{23}$ 、 $R_{32}$ 、 $R_{33}$ 和圆柱副 $C_{11}$ 、 $C_{21}$ 、 $C_{31}$ 及相应构件组成,且满足 $C_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13}$ 、 $C_{21} \parallel R_{22} \parallel R_{23}$ 、 $C_{31} \parallel R_{32} \parallel R_{33}$ ,装配时 $C_{11}$ 、 $C_{21}$ 、 $C_{31}$ 互相正交;另一支链由 $C_{41}$ 、 $R_{42}$ 、 $R_{43}$ 和 $R_{44}$ (正交的两转动副 $R_{43}$ 、 $R_{44}$ 可采用万向节代替,记为 $U_{43}$ )组成;旋转轴 $R_D$ 固定在中间平台1上,且垂直于中间平台1;主动输入为 $C_{11}$ 、 $C_{21}$ 、 $C_{31}$ 、 $C_{41}$ 的移动。

### 1.2 拓扑结构特征分析

#### 1.2.1 机构的POC计算

并联机构的POC方程<sup>[22]</sup>为

$$M_{bi} = \bigcup_{i=1}^m M_{Ji} \quad (1)$$

$$M_{Pa} = \bigcap_{i=1}^{v+1} M_{bi} \quad (2)$$

式中  $M_{Ji}$ ——第*i*个运动副的POC集

$M_{bi}$ ——第  $i$  条支链末端的 POC 集

$M_{Pa}$ ——机构动平台的 POC 集

$m$ ——运动副数

$v$ ——独立回路数

静平台 0 与中间平台 1 及 3 条  $C_{i1}R_{i2}R_{i3}$  ( $i=1, 2, 3$ ) 支链可看成一子并联机构。

确定中间平台 1 的 POC 集为

$$M_{Pa1} = M_{b1} \cap M_{b2} \cap M_{b3} =$$

$$\left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^1(\parallel R_{11}) \end{array} \right] \cap \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^1(\parallel R_{21}) \end{array} \right] \cap \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^1(\parallel R_{31}) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right]$$

即子并联机构可看成是 1 条三平移输出的等效支链 SOC $\{-P-P-P\}$ 。

末端执行件的 POC 集为

$$M_{Pa} = (M_{Pa1} \cup M_{R_D}) \cap M_{b4} =$$

$$\left( \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right] \cup \left[ \begin{array}{c} t^0 \\ r^1(\parallel R_D) \end{array} \right] \right) \cap \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{41}, R_D)) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^1(\parallel R_D) \end{array} \right]$$

因此,机构自由度为 4,具有空间任意方向的移动和绕垂直于中间平台 1 法线方向的转动,与 Quadrupterion 机构输出特性相同。

### 1.2.2 机构的自由度计算

并联机构 DOF 公式<sup>[22]</sup>为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \quad (3)$$

$$\text{其中 } \xi_{L_j} = \dim. \left\{ \left( \bigcap_{i=1}^j M_{b_i} \right) \cup M_{b_{(j+1)}} \right\} \quad (4)$$

$$v = m - n + 1$$

式中  $F$ ——机构自由度

$f_i$ ——第  $i$  个运动副的自由度

$n$ ——构件数

$\xi_{L_j}$ ——第  $j$  个独立回路的独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}$ ——前  $j$  条支链组成子并联机构 POC 集

$M_{b_{(j+1)}}$ ——前  $j+1$  条支链末端构件 POC 集

机构所含的独立回路数为

$$v = m - n + 1 = 14 - 12 + 1 = 3$$

机构的拓扑结构路线可以分解为

$$\text{SOC}_1 \{-C_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13} - R_{23} \parallel R_{22} \parallel C_{21}-\}$$

$$\text{SOC}_2 \{-C_{31} \parallel R_{32} \parallel R_{33}-\}$$

$$\text{SOC}_3 \{-R_D \parallel R_{44} \perp R_{43} \parallel R_{42} \parallel C_{41}-\}$$

由式(4)得

$$\xi_{L1} = \dim. \{M_{b1} \cup M_{b2}\} =$$

$$\dim. \left\{ \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^1(\parallel R_{11}) \end{array} \right] \cup \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^1(\parallel R_{21}) \end{array} \right] \right\} = 5$$

其构成子并联机构  $\text{PM}_{(1-2)}$  的自由度和 POC 集为

$$F_{(1-2)} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^1 \xi_{L_j} = 8 - 5 = 3$$

由式(2)得

$$M_{Pa(1-2)} = M_{b1} \cap M_{b2} = \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right]$$

$$\xi_{L2} = \dim. \{M_{Pa(1-2)} \cup M_{b3}\} =$$

$$\dim. \left\{ \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right] \cup \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^1(\parallel R_{31}) \end{array} \right] \right\} = 4$$

其子并联机构  $\text{PM}_{(1-3)}$  的自由度和 POC 集为

$$F_{(1-3)} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{L_j} = 12 - 5 - 4 = 3$$

由式(2)得

$$M_{Pa(1-3)} = M_{b1} \cap M_{b2} \cap M_{b3} = \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right]$$

$$\xi_{L3} = \dim. \{M_{Pa(1-3)} \cup M_{b4}\} =$$

$$\dim. \left\{ \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right] \cup \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{41}, R_D)) \end{array} \right] \right\} = 5$$

由式(3)得

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{L_j} = 12 + 6 - (5 + 4 + 5) = 4$$

因此,该降耦机构的自由度仍为 4,当取静平台 0 上 C 副的移动作为驱动副时,末端输出件 2 可实现 3 个平移及 1 个转动的运动输出。

### 1.2.3 机构耦合度 $\kappa$ 计算

由基于序单开链(Single open chain, SOC)的机构组成原理<sup>[22]</sup>可知,任一机构可分解为约束度为正、零、负的 3 种有序单开链(SOC),第  $j$  个  $\text{SOC}_j$  的约束度定义为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{L_j} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = +1, +2, +3, +4, +5 \end{cases} \quad (5)$$

式中  $m_j$ ——第  $j$  个  $\text{SOC}_j$  的运动副数

$I_j$ ——第  $j$  个  $\text{SOC}_j$  的驱动副数

进一步,一组有序的  $v$  个 SOC 可组成一个零自由度的独立回路数为  $v$  的基本运动链(Basic kinematics chain, BKC),对一个 BKC 而言,须满足

$$\sum_{j=1}^v \Delta_j = 0 \quad (6)$$

因此,BKC 的耦合度为

$$\kappa = \frac{1}{2} \min. \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \quad (7)$$

已计算出机构 3 个回路的独立位移方程数,分别为  $\xi_{L1} = 5$ ,  $\xi_{L2} = 4$ ,  $\xi_{L3} = 5$ ,因此,由式(5)可得:

$\text{SOC}_1$  的约束度为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = 8 - 2 - 5 = +1$$

SOC<sub>2</sub>的约束度为

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = 4 - 1 - 4 = -1$$

由式(6),有  $\sum_{j=1}^2 \Delta_j = 0$ , 则 SOC<sub>1</sub>、SOC<sub>2</sub> 构成一基本运动链, 记为 BKC<sub>1</sub>, 其耦合度为

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^2 |\Delta_j| \right\} = \frac{1}{2} \{ | +1 | + | -1 | \} = 1$$

SOC<sub>3</sub>的约束度为

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{m_3} f_i - I_3 - \xi_{L3} = 6 - 1 - 5 = 0$$

则 SOC<sub>3</sub> 构成另一基本运动链 BKC<sub>2</sub>, 耦合度  $\kappa_2 = 0$ 。

### 1.2.4 降耦机构运动解耦性分析

对图2所示的降耦机构进行解耦性分析如下:

(1) 降耦机构可分解为2个BKC, 如图3所示。其中, BKC<sub>1</sub> 由 SOC<sub>1</sub> 和 SOC<sub>2</sub> 构成, 即由静平台0、中间平台1及其间的3条 C<sub>11</sub>R<sub>12</sub>R<sub>13</sub>(i=1,2,3) 支链组成; 另一个 BKC<sub>2</sub> 由 C<sub>41</sub>、R<sub>42</sub>、U<sub>43</sub>、R<sub>D</sub> 组成。

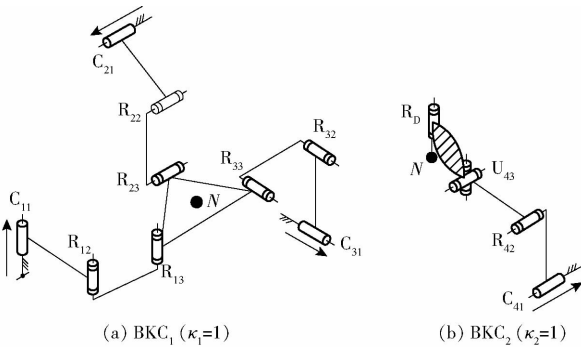


图3 降耦机构的拓扑结构组成

Fig. 3 Topological structure of decoupled PM

(2) 由于机构的4个驱动位于不同的BKC, 满足文献[22]的并联机构解耦性准则条件, 则降耦机构具有部分自由度, 即机构输出具有运动解耦。

(3) 末端输出件2的位姿取决于所有主驱动输入, 与其相邻的中间平台1(包括转动副R<sub>D</sub>)的位姿取决于部分输入; 末端输出件2与中间平台1的平移运动重合, 同时, 末端件2绕转动副R<sub>D</sub>相对于中间平台1以角φ旋转。

用同样的方法, 对 Quadrupteron 机构进行了上述的拓扑结构特征分析, 分析结果如表1所示。

结果表明, 降耦机构的自由度、POC集与 Quadrupteron 相同, 均为 3T1R; 但运动副数和构件数均有所减小, 故降耦机构的设计、制造更为简单; 从拓扑结构组成来看, Quadrupteron 由一个 BKC 组成, 耦合度  $\kappa = 2$ ; 而降耦机构由两个 BKC 组成, 耦合度分别为 1 和 0, 且降耦机构的输出具有部分

解耦性, 表明降耦机构的运动学正解及动力学分析的难度将会大大降低。

表1 两种并联机构的拓扑结构特征

Tab. 1 Topological structure characteristics of two PM

拓扑结构特征	Quadrupteron	降耦机构
构件数	13	12
运动副数	15	14
自由度 $F$	4	4
POC 集 $M_{Pa}$	$\begin{bmatrix} l^3 \\ r^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} l^3 \\ r^1 \end{bmatrix}$
独立回路数 $v$	3	3
独立位移方程数 $\xi$	15	14
基本运动链 BKC 个数	1	2
耦合度	2	1, 0
运动解耦性	部分解耦	部分解耦

## 2 运动学分析

静平台采用框架形式, 建立如图4所示定坐标系  $Oxyz$ ,  $z$  轴与 C<sub>11</sub> 轴线平行,  $x$  轴平行于 C<sub>31</sub> 轴线;  $\theta_{i1}$  (i=1,2,3) 分别为构件 A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> 与  $x$  轴、构件 A<sub>2</sub>B<sub>2</sub> 与  $x$  轴、构件 A<sub>3</sub>B<sub>3</sub> 与  $z$  轴的夹角; 4 个移动驱动滑块分别安装在间距为  $L$  的 4 个轨道上; 驱动副行程为  $\rho$ , 安装中心分别记为 G<sub>*i*</sub> (i=1,2,3,4); 每个分支的定长杆 A<sub>*i*</sub>B<sub>*i*</sub> 及 B<sub>*i*</sub>C<sub>*i*</sub> 长度设为  $l_{ij}$  (i=1,2,3; j=1,2)。

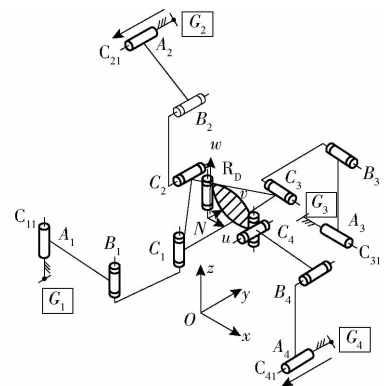


图4 并联机构运动示意图

Fig. 4 Kinematic diagram

在中间平台1的N点建立动坐标系  $Nuvw$ ,  $v$  轴平行于转动副 R<sub>23</sub> 轴线方向,  $w$  轴平行于中间平台1的法线; 点 C<sub>*i*</sub> (i=1,2,3) 是转动副 R<sub>*i3*</sub> (i=1,2,3) 在中间平台1上的安装基点, 其特征参数是  $r$ , 且有  $|NC_i| = r$  (i=1,2,3), 并设 C<sub>*i*</sub> 在  $Nuvw$  坐标系下的位置矢量为  $r_i$ ,  $\beta_i$  (i=1,2,3) 为 NC<sub>*i*</sub> 与  $u$  轴的夹角, 如图5所示。

基本运动链 BKC<sub>2</sub> 的结构如图6所示,  $\theta_{41}$  为构件 A<sub>4</sub>B<sub>4</sub> 与  $x$  轴的夹角; 定长杆 A<sub>4</sub>B<sub>4</sub> 及 B<sub>4</sub>C<sub>4</sub> 杆长分别为  $l_{41}$ 、 $l_{42}$ ; 末端输出件 C<sub>4</sub>D 长度为  $l$ 。

设驱动副的输入变量为  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ , 末

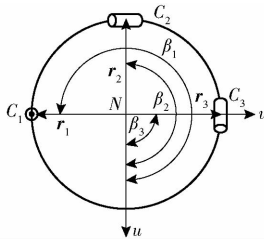
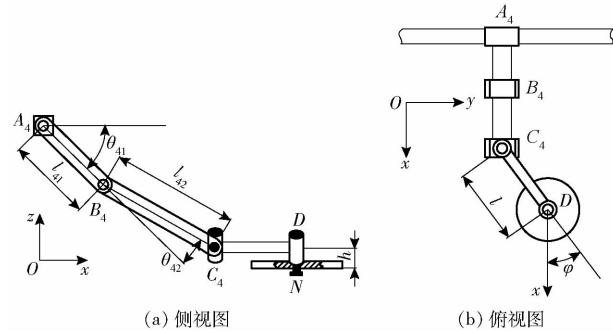


图 5 中间平台 1 上运动副的分布

Fig. 5 Distribution of pairs on moving platform - 1

图 6 基本运动链 BKC<sub>2</sub> 示意图Fig. 6 Sketch of BKC<sub>2</sub>

端输出件基点  $D$  位姿为  $\mathbf{x} = (x_D, y_D, z_D, \varphi)$ , 则 4 条支链存在以下关系:

支链 1

$$\begin{cases} x_N = l_{11} \cos \theta_{11} + l_{12} \cos(\theta_{11} + \theta_{12}) - r \cos \beta_1 \\ y_N = l_{11} \sin \theta_{11} + l_{12} \sin(\theta_{11} + \theta_{12}) - r \sin \beta_1 \\ z_N = \rho_1 \end{cases} \quad (8)$$

支链 2

$$\begin{cases} x_N = l_{21} \cos \theta_{21} + l_{22} \cos(\theta_{21} + \theta_{22}) + r \cos \beta_2 \\ y_N = \rho_2 - r \sin \beta_2 \\ z_N = -l_{21} \sin \theta_{21} - l_{22} \sin(\theta_{21} + \theta_{22}) \end{cases} \quad (9)$$

支链 3

$$\begin{cases} x_N = \rho_3 - r \cos \beta_3 \\ y_N = L - l_{31} \cos \theta_{31} - l_{32} \cos(\theta_{31} + \theta_{32}) - r \sin \beta_3 \\ z_N = l_{31} \sin \theta_{31} + l_{32} \sin(\theta_{31} + \theta_{32}) \end{cases} \quad (10)$$

$C_4$  坐标满足如下关系

$$\begin{cases} x_{C4} = L - (l_{41} \cos \theta_{41} + l_{42} \cos(\theta_{41} + \theta_{42})) = x_N + l \cos \varphi \\ y_{C4} = \rho_4 = y_N + l \sin \varphi \\ z_{C4} = -l_{41} \sin \theta_{41} - l_{42} \sin(\theta_{41} + \theta_{42}) = z_N + h \end{cases} \quad (11)$$

式中  $h$ ——转动副安装基点  $D$  与点  $N$  距离, 见图 6 则由式(8)~(11), 可得

$$\rho_2 - r \sin \beta_2 = \rho_4 - l \sin \varphi \quad (12)$$

## 2.1 机构位置正解

已知机构的输入位移  $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ , 求末端输出点  $D$  的位姿  $(x_D, y_D, z_D, \varphi)$ , 即为位置正解。

由式(8)~(12), 有

$$\begin{cases} x_D = \rho_3 - r \cos \beta_3 \\ y_D = \rho_2 - r \sin \beta_2 \\ z_D = \rho_1 + h \end{cases} \quad (13)$$

$$\sin \varphi = (\rho_4 - \rho_2 + r \sin \beta_2) / l \quad (14)$$

解式(14), 可得:

(1) 当  $|\rho_4 - \rho_2 + r \sin \beta_2| / l < 1$  时,  $\varphi$  有两组解

$$\varphi_1 = \arcsin(|\rho_4 - \rho_2 + r \sin \beta_2| / l) \quad (15)$$

$$\varphi_2 = \arcsin(|\rho_4 - \rho_2 + r \sin \beta_2| / l) + \pi \quad (16)$$

(2) 当  $|\rho_4 - \rho_2 + r \sin \beta_2| / l = 1$  时,  $\varphi$  有一组解。

(3) 当  $|\rho_4 - \rho_2 + r \sin \beta_2| / l > 1$  时,  $\varphi$  无解。

分析表明, 对于给定的、非奇异输入, 末端执行件有两组姿态; 而当初始装配情形确定后, 机构的运动学正解具有唯一性。

## 2.2 机构位置反解

已知末端输出基点  $D$  的位姿  $(x_D, y_D, z_D, \varphi)$ , 求机构的输入位移  $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ , 即为位置反解。

由式(13)、(14)可直接得出机构反解方程为

$$\begin{cases} \rho_1 = z_D - h \\ \rho_2 = y_D + r \sin \beta_2 \\ \rho_3 = x_D + r \cos \beta_3 \\ \rho_4 = \rho_2 - r \sin \beta_2 + l \sin \varphi \end{cases} \quad (17)$$

对式(13)、(14)整理, 可得末端基点的输出矩阵形式为

$$\mathbf{U}_D = \begin{bmatrix} x & y & z \\ \cdot & \cdot & \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\rho_3) & f_2(\rho_2) & f_3(\rho_1) \\ \cdot & \cdot & f_4(\rho_2, \rho_4) \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中  $\cdot$ ——输出常数

$f_i(\cdot)$ ——结构参数构成的函数

由式(18)可知, 该机构的解耦性具有两层含义: ①末端输出件的位置与姿态具有拓扑解耦特性。②末端输出的移动本身具有解耦特性, 且具有各向同性, 这为控制带来了方便。

## 3 机构雅可比矩阵及奇异性分析

### 3.1 机构雅可比矩阵

设机构 4 个驱动副的移动速度为  $\dot{\boldsymbol{\rho}} = (\dot{\rho}_1, \dot{\rho}_2, \dot{\rho}_3, \dot{\rho}_4)$ , 末端执行件的输出速度为  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_D, \dot{y}_D, \dot{z}_D, \dot{\varphi})$ 。

将式(17)对时间  $t$  求导, 整理得

$$\mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{B} \mathbf{V} \quad (19)$$

$$\text{其中 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

用矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  来分析机构奇异特性,并记  $\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  为机构的雅可比矩阵。

### 3.2 奇异性分析

并联机构接近或到达奇异位形时,动平台将变得不可控。基于机构的雅可比矩阵,GOSELIN等<sup>[23]</sup>将并联机构的奇异位形分为3类:正解奇异、反解奇异及混合奇异。发生正解奇异的条件是:  $|\mathbf{B}| = 0$ 、 $|\mathbf{A}| \neq 0$ ,此时即使驱动副固定,机构末端仍能运动;当  $|\mathbf{A}| = 0$ 、 $|\mathbf{B}| \neq 0$  时,机构出现反解奇异,在发生反解奇异时,末端执行元件会失去一个或多个自由度;当正解奇异和反解奇异同时发生时,发生混合奇异。

对于(3CRR/R)&CRRR降耦并联机构来说,奇异分析包括两部分:①BKC<sub>1</sub>奇异,即静平台0、中间平台1及3条C<sub>i1</sub>R<sub>2</sub>R<sub>3</sub>( $i=1,2,3$ )支链组成子并联机构部分的奇异。②BKC<sub>1</sub>和BKC<sub>2</sub>组成的3回路(记为:BKC<sub>1</sub>+BKC<sub>2</sub>)机构的奇异。

#### 3.2.1 BKC<sub>1</sub>奇异分析

由式(19)前3项可知,三平移输出子并联机构的雅可比矩阵为正交单位矩阵,不存在正解奇异;对反解奇异,当每条C<sub>i1</sub>R<sub>2</sub>R<sub>3</sub>( $i=1,2,3$ )支链的3个运动副轴线共面时发生,属于工作空间的边界奇异。因此,解耦3CRR子并联机构在全工作空间内部不存在奇异位形。

#### 3.2.2 BKC<sub>1</sub>+BKC<sub>2</sub>奇异分析

##### (1)反解奇异

由式(19)可知, $\mathbf{A}$ 是单常数阵,  $|\mathbf{A}|$ 恒不等于0,故不存在反解奇异。

##### (2)正解奇异

由  $|\mathbf{B}| = 0$  可得

$$\cos\varphi = 0 \quad (20)$$

式(20)有两组解,即  $\varphi = \pi/2$ 、 $\varphi = -\pi/2$ 。这2个奇异姿态将降耦机构的工作空间分为2个无奇异工作空间区域:①无奇异区域I ( $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ ),此时  $\cos\varphi > 0$ 。②无奇异区域II ( $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ ),此时  $\cos\varphi < 0$ 。

只要机构远离这2个姿态( $\varphi = \pi/2$ 和 $\varphi = -\pi/2$ ),则机构不会发生反解奇异。

##### (3)混合奇异

由于  $|\mathbf{A}| = 0$  及  $|\mathbf{B}| = 0$  不可能同时成立,故机构不存在混合奇异位形。

### 3.2.3 无奇异工作空间内运动学正解的分布

以上分析可知,机构无奇异工作空间包括:无奇异区域I和无奇异区域II;而运动学正解分析表明,机构存在两组运动学正解。根据式(15)、(16)、(20)可知,机构运动学正解的2个公式分别对应机构的无奇异工作空间区域I和II,如表2所示。

表2 机构无奇异工作空间区域内运动学正解

Tab.2 Forward kinematics among singularity-free workspace

无奇异区域	运动学正解公式
I	式(15)、(13)
II	式(16)、(13)

一旦机构装配形式给定,则确定了机构的无奇异工作区域,根据表2的计算公式可直接计算出机构的唯一运动学正解。

图4所示构型处于无奇异工作区域I,则可采用式(13)、(15)进行运动学正解求解,这进一步简化了机构的运动学正解分析过程。

## 4 工作空间分析

对于3T1R并联机构,通常研究定姿态工作空间和可达工作空间。定姿态工作空间为机构动平台姿态保持一定时,动平台上参考点所能到达的区域;可达工作空间,是动平台上参考点以至少任一姿态能够到达的点的集合。

对大多数3T1R并联机构而言,动平台不同的姿态对应的工作空间大小不同,且相差较大。

由式(13)可知,本文提出的降耦并联机构,末端执行件3个方向的平移运动只与机构3个方向的驱动输入参数分别相关,与姿态角 $\varphi$ 无关,故下文直接讨论机构的可达工作空间。



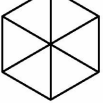
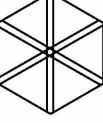
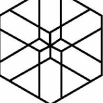



### 4.1 可达工作空间

式(13)表明,机构可达工作空间是3个方向圆柱体相贯形成的一个空间几何体<sup>[20]</sup>,每个圆柱体的外径等于对应支链的两定长杆杆长之和 $|l_{i1} + l_{i2}|$ ,而内径等于两杆杆长之差 $|l_{i1} - l_{i2}|$ 。假设,保持支链定长杆长度不变,且 $l_{i1} = l_{i2} = 1$ (无量纲),驱动副行程范围为 $\rho$ ,令 $\lambda = \rho / |l_{i1} + l_{i2}|$ ;并合理定位基座上移动副的驱动位置,以保证空间3个圆柱体相交体积最大化,则工作空间形状及大小随驱动副行程的变化情况如表3所示。

由表3可知,工作空间随 $\lambda$ 的增大先增加后保持不变,整个工作空间形状规则,且无内部空洞;当 $\lambda \leq 1$ 时,工作空间是边长为 $\rho$ 的立方体;当 $\lambda > 1$ 时,工作空间形状为一多面体;当 $\lambda > 1.675$ 时,工作空

表 3 驱动副行程对工作空间体积的影响

Tab.3 Influence of driving stroke on workspace

序号	$\lambda$	驱动副行程	工作空间体积	工作空间形状
1	0.25	0.5	0.125	
2	0.5	1	1	
3	1	2	8	
4	1.5	3	26.490	
5	1.675	3.35	37.490	
6	2	4	37.490	
7	2.5	5	37.490	
8	3	6	37.490	

间形状和体积均保持不变。因此,为使机构结构紧凑、且获得规则形状的较大工作空间,驱动副行程不超过支链两定长杆长度之和。

4.2 转动能力分析

由式(14)可知,末端机构的转动姿态仅仅决定于 2 个输入参数  $\rho_2$  和  $\rho_4$ ,如保持  $\rho_2, \rho_4$  的驱动关系不变,可达工作空间内每一位置转动能力均相同;且每一位置的无奇异转动范围均为:  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$  或  $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ 。

目前研究的文献中,除采用特殊的放大机构外,大多数 3T1R 并联机构的转动范围均在  $[-90^\circ, 90^\circ]$  之内,且工作空间内点的转动能力差异较大。

5 算例

为便于性能比较,参照 Quadrupterion 样机结构参数,机构主要尺寸参数如表 4 所示<sup>[20]</sup>。增加的末端执行件  $C_4D$  的长度为 40 mm,移动副驱动行程为 220 mm,机构三维虚拟装配如图 7 所示。

5.1 运动学正反解算例

由图7可知,该装配形式使得机构总工作在无

表 4 机构的几何参数

Tab.4 Geometric parameters of mechanism mm

$i$	$G_i$	$C_i$	$l_{i1}$	$l_{i2}$
1	$(-180, -225, 0)^T$	$(0, -40, 0)^T$	203	223
2	$(-180, 0, 135)^T$	$(-40, 0, 0)^T$	154	161
3	$(0, 140, -135)^T$	$(0, 40, 0)^T$	167	167
4	$(180, 0, 135)^T$		154	161

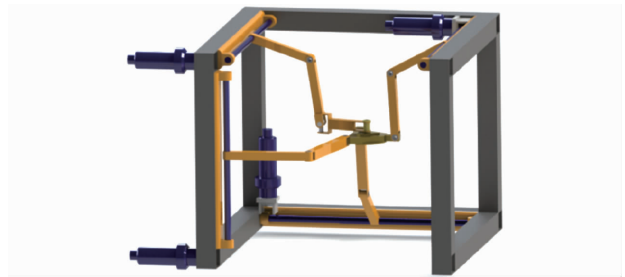


图 7 降耦并联机构的 CAD 模型

Fig.7 CAD model of decoupled parallel mechanism

奇异区域 I, 给定两组主动输入参数: ①  $\rho_1 = 0, \rho_2 = 0, \rho_3 = 0, \rho_4 = 0$ ; ②  $\rho_1 = 10, \rho_2 = 40, \rho_3 = 30, \rho_4 = 20$ 。运用式(15)、(13), 求得对应的实数正解, 如表 5 中序号①和②所示。

将表 5 中①、②正解数据, 代入反解式(17)中, 可得实数反解(序号③和④)。它与上述给定的输入参数一致, 故认为正反解求解正确。

表 5 (3CRR/R)&CRRR 机构位姿正反解算例

Tab.5 Positive and inverse solution example of (3CRR/R)&CRRR

序号	$x/mm, y/mm, z/mm, \varphi/(^\circ)$
①	0, -40, 50, 90
②	30, -20, 60, 30
序号	$\rho_1/mm, \rho_2/mm, \rho_3/mm, \rho_4/mm$
③	0, 0, 0, 0
④	10, 40, 30, 20

5.2 工作空间及转动能力分析

由 4.1 节和 4.2 节分析可知, 不考虑机构约束时, 机构可达工作空间是一规则立方体, 边长为驱动副行程, 即机构工作空间是边长为 220 mm 的立方体, 且工作空间内每一位置的转动能力均一致, 为  $(-90^\circ, 90^\circ)$ , 且无内部奇异。

由于各被动关节转角限制以及杆件可能发生干涉, 实际工作空间小很多。本文基于位置反解式(17), 采用搜索法求解出满足约束条件的所有点, 再利用所有满足约束条件的“点集”近似求解出工作空间体积。求解步骤如下:

(1) 根据经验初步估算出工作空间的搜索范围为:  $35 \text{ mm} \leq X_D \leq 315 \text{ mm}, 31 \text{ mm} \leq Y_D \leq 365 \text{ mm}, 0 \leq Z_D \leq 270 \text{ mm}$ 。

(2) 基于位置反解式(17)求解并联机构的输入参数( $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ ),同时满足如下约束条件:①支链各被动关节的转角必须限制一定范围: $-75^\circ \leq \theta_{i1} \leq 75^\circ, 15^\circ \leq \theta_{i2} \leq 165^\circ (i=1,2,3)$ 。②驱动副行程为220 mm。③根据奇异条件,末端输出件2的转动姿态必须满足( $-90^\circ, 90^\circ$ )。

(3) 给定末端输出件姿态角 $\varphi$ ,并将步骤(1)中的初始化输出参数代入反解式(17)中。

(4) 选取搜索步长因子 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 10 \text{ mm}$ ,若通过步骤(1)~(3)计算的结果满足所有约束条件,则为工作空间内有效点,否则返回步骤(1),并按步长依次改变末端件的输出位置参数。

根据表4给定的机构参数,在Matlab中编程计算,求解给定姿态 $\varphi$ 下的“点数” $n_\varphi$ ,而每个点可视作边长为 $\Delta x$ 的小正方体。因此,可求得定姿态下工作空间体积为(单位: $\text{mm}^3$ )

$$V_\varphi = n_\varphi (\Delta x)^3 = 10^3 n_\varphi \quad (21)$$

采用同样的步骤,对Quadrupterion机构的定姿态工作空间体积进行计算。图8是不考虑转动关节角度限制时,(3CRR/R)&CRRR降耦机构和Quadrupterion<sup>[20]</sup>的 $V_\varphi$ 与 $\varphi$ 的关系曲线。

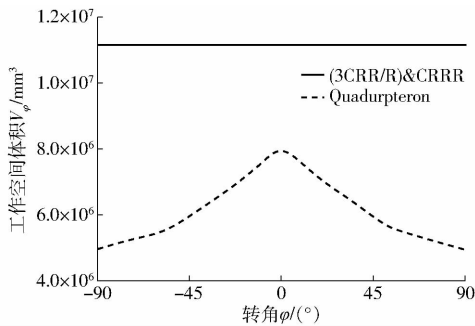


图8 定姿态工作空间体积随 $\varphi$ 的变化(不考虑约束)

Fig. 8 Changes of  $V_\varphi$  with  $\varphi$  (without constraints)

由图8可知:①对(3CRR/R)&CRRR降耦机构,全工作空间转动能力保持不变,即工作空间内所有位置点的转动能力一致,工作空间体积达 $1.11 \times 10^7 \text{ mm}^3$ 。②对于Quadrupterion机构,在姿态角为 $0^\circ$ 时,定姿态工作空间体积达最大, $V_{\varphi_{\max}} = 8.33 \times 10^6 \text{ mm}^3$ ;当姿态角接近 $\pm 90^\circ$ 时,定姿态工作空间体积最小, $V_{\varphi_{\min}} = 4.95 \times 10^6 \text{ mm}^3$ ;其最小、最大工作空间体积降幅达40%以上,与文献[21]的结论一致。因此,降耦机构的定姿态工作空间体积及转动能力较Quadrupterion并联机构都有显著提升。

### 5.3 降耦机构的实际定姿态工作空间

图9是考虑转动副角度范围限制时,降耦机构(3CRR/R)&CRRR定姿态工作空间体积随末端输出姿态 $\varphi$ 的变化情况。由图9可知:①考虑运动副转角范围限制后,降耦机构实际定姿态工作空间体积有所减小,可见,合理设计被动关节的安装角,可提高并联机构的工作空间。②降耦机构在初始姿态,即 $\varphi = 0$ 时,定姿态工作空间体积达最大,约为 $9.398 \times 10^6 \text{ mm}^3$ ;随着姿态角的增加,定姿态工作空间体积减小;当转角接近 $\pm 90^\circ$ 时,定姿态工作空间体积最小,为 $6.519 \times 10^6 \text{ mm}^3$ 。故在考虑转动约束的情况下,降耦机构定姿态工作空间体积的最大降幅达30%,小于Quadrupterion在理想状态下最小、最大工作空间的降幅(大于40%)。这进一步表明,考虑转动副角度范围限制时,降耦机构的实际定姿态工作空间比Quadrupterion机构有较大改善。

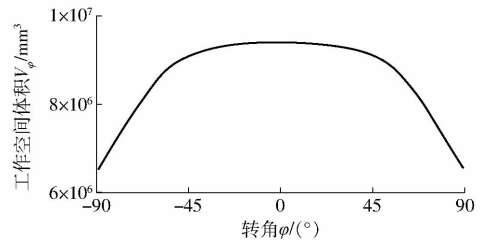


图9 (3CRR/R)&CRRR机构的 $V_\varphi$ 与 $\varphi$ 关系曲线(考虑约束)

Fig. 9 Relationship curve between  $V_\varphi$  with  $\varphi$  (with constraints)

## 6 结论

(1) 通过运动副复合的方法,对Quadrupterion并联机构进行降耦设计,提出了一种耦合度较低的3T1R新机型。

(2) 该降耦机构具有输出运动解耦特性,机构3个方向的移动输出与3个输入参数一一对应,而转动姿态与其中2个输入参数相关。

(3) 机构结构简单、运动学正反解方程更简单,方便制造、控制。

(4) 在( $-90^\circ, 90^\circ$ )输出转角范围内,机构无内部奇异存在;且机构具有较大体积的规则工作空间,全工作空间内所有位置的转动能力一致。

(5) 该降耦机构克服了一般并联机构耦合性强、控制复杂的弱点,转动能力大幅度提高,具有较好的工业应用前景。

## 参 考 文 献

- 1 CLAVEL R. Device for the movement and positioning of an element in space; US 4976582[P]. 1989-01-01.
- 2 PIERROT F, COMPANY O. H4: a new family of 4-DOF parallel robots[C]//IEEE/ASME International Conference on Advanced



- Intelligent Mechatronics, 1999; 508 – 513.
- 3 KRUT S, COMPANY O, BENOIT M, et al. I4: a new parallel mechanism for Scara motions[J]. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2003, 2(2):1875 – 1880.
- 4 NABAT V, RODRIGUEZ M, COMPANY O, et al. Par4: very high speed parallel robot for pick-and-place[C] // Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005:553 – 558.
- 5 ROLLAND L H. The Manta and the Kanuk; novel 4-DOF parallel mechanisms for industrial handling [C] // IMECE' 99 Conference, ASME, 1999;831 – 844.
- 6 BRIOT S, BONEV I A. Pantopteron-4: a new 3T1R decoupled parallel manipulator for pick-and-place applications [J]. Mechanism & Machine Theory, 2010, 45(5):707 – 721.
- 7 KRUT S, COMPANY O, NABAT V, et al. Heli4: a parallel robot for scara motions with a very compact traveling plate and a symmetrical design[C] // IEEE RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2006:1656 – 1661.
- 8 黄田, 赵学满, 梅江平, 等. 一种具有三维平动一维转动的并联机构: 201220007884. X[P]. 2012 – 11 – 14.
- 9 LI Zhibin, LOU Yunjiang, LI Zexiang, et al. Type synthesis, kinematic analysis, and optimal design of a novel class of Schönflies-motion parallel manipulators[J]. IEEE Transactions on Automation Science & Engineering, 2013, 10(3):674 – 686.
- 10 SALGADO O, ALTUZARRA O, PETUYA V, et al. Synthesis and design of a novel 3T1R fully-parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(4):137 – 139.
- 11 KIM S M, KIM W, YI B J. Kinematic analysis and optimal design of a 3T1R type parallel mechanism[C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2009:3737 – 3742.
- 12 BAI S, CECCARELLI M. Recent advances in mechanism design for robotics[M]. Berlin: Springer, 2015.
- 13 XIE Fugui, LIU Xinjun. Design and development of a high-speed and high-rotation robot with four identical arms and a single platform[J]. Journal of Mechanisms & Robotics, 2015, 7(4):041015 – 3.
- 14 朱小蓉, 宋月月, 孙晨, 等. 2RRUR – 2RSS 并联机构结构特性与运动学分析[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(12):408 – 415. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?flag=1&file\\_no=20161252&journal\\_id=jcsam](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20161252&journal_id=jcsam). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.12.052
- ZHU Xiaorong, SONG Yueyue, SUN Chen, et al. Structural characteristics and kinematic analysis for novel 2RRUR – 2RSS parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(12):408 – 415. (in Chinese)
- 15 沈惠平, 朱小蓉, 尹洪波, 等. 并联机构的结构降耦原理及其设计方法[J]. 机械工程学报, 2016, 52(23):102 – 113.
- SHEN Huiping, ZHU Xiaorong, YIN Hongbo, et al. Principle and design method for structure coupling-reducing of parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(23):102 – 113. (in Chinese)
- 16 沈惠平, 李菊, 王振, 等. 基于结构降耦和运动解耦的并联机构拓扑结构优化及其性能改善[J]. 机械工程学报, 2017, 53(19):176 – 186.
- SHEN Huiping, LI Ju, WANG Zhen, et al. Topology structure optimization and performance improvement for parallel mechanisms based on structure coupling-reducing and motion decoupling[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(19):176 – 186. (in Chinese)
- 17 沈惠平, 强恒存, 曾氢菲, 等. 基于结构降耦的一类低耦合度新型 3T1R 并联机构的拓扑设计[J]. 中国机械工程, 2017, 28(10):1163 – 1171.
- SHEN Huiping, QIANG Hengcun, ZENG Qingfei, et al. Topological design for a class of novel 3T1R parallel mechanisms with low coupling degree based on coupling-reducing[J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28(10):1163 – 1171. (in Chinese)
- 18 沈惠平, 张震, 杨廷力, 等. 3T1R 并联机构结构降耦设计与运动学分析[J/OL]. 农业机械学报, 2017, 48(10):380 – 389. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?file\\_no=20171049&flag=1&journal\\_id=jcsam](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20171049&flag=1&journal_id=jcsam). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.10.049.
- SHEN Huiping, ZHANG Zhen, YANG Tingli, et al. Structure coupling-reducing design and kinematics analysis of 3T1R parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(10):380 – 389. (in Chinese)
- 19 KONG Xianwen, GOSSELIN C M. Parallel manipulators with four degrees of freedom; US 6997669[P]. 2006 – 02 – 14.
- 20 RICHARD P L, GOSSELIN C M, KONG Xianwen. Kinematic analysis and prototyping of a partially decoupled 4-DOF 3T1R parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2007, 129(6):611 – 616.
- 21 GOSSELIN C M, MASOULEH M T, DUCHAINE V, et al. Parallel mechanisms of the multipteron family; kinematic architectures and benchmarking[C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation, Roma, Italy, 10 – 14 April 2007.
- 22 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- 23 GOSSELIN C M, ANGELES J. A global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1991, 113(3):220 – 226.