doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.12.018

低比转数离心泵叶轮内流场重构与模态分析

张人会[1,2]　陈学炳[1]　郭广强[1]　李仁年[1,2]

(1. 兰州理工大学能源与动力工程学院, 兰州 730050; 2. 甘肃省流体机械及系统重点实验室, 兰州 730050)

摘要: 针对传统离心泵水力性能优化设计的复杂性,提出采用本征正交分解-径向基函数(POD-RBF)混合代理模型方法对离心泵叶轮内流场进行重构分析。由三次 Bezier 曲线对低比转数离心泵二维叶片型线进行参数化控制,通过对叶片包角、进出口安放角等控制参数进行适量的扰动得到叶片型线的样本集。由叶片型线参数及叶轮 CFD 内流场数据构成样本的快照矢量集,根据几何相似及网格变形方法插值得到各相似节点的流场参数,依据本征正交分解法(POD)将快照集分解为一系列正交基的线性组合。由径向基函数(RBF)拟合目标叶型所对应的正交基系数,实现了对目标叶轮内流场的重构。采用 POD-RBF 方法对 MH48-12.5 型低比转数离心泵叶轮内流场进行了重构,其压力预测均方根误差为 0.84%,速度预测误差基本在 0.5 m/s 以内,流场预测所需时间约为 CFD 计算的 1/240。对样本集进行 POD 基模态分析,得到了各阶基模态流场特征及能量分布特性。

关键词: 离心泵; 叶轮; 本征正交分解法; 径向基函数; 优化设计; 模态分析

中图分类号: TH311　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2018)12-0143-07

Reconstruction and Modal Analysis for Flow Field of Low Specific Speed Centrifugal Pump Impeller

ZHANG Renhui[1,2]　CHEN Xuebing[1]　GUO Guangqiang[1]　LI Rennian[1,2]

(1. *School of Energy and Power Engineering*, *Lanzhou University of Technology*, *Lanzhou* 730050, *China*
2. *Key Laboratory of Fluid Machinery and Systems*, *Gansu Province*, *Lanzhou* 730050, *China*)

Abstract: According to the complexity of traditional hydraulic performance optimization design of centrifugal pump, the hybrid surrogate model method which is the combination of proper orthogonal decomposition and radial basis function was proposed for the flow reconstitution of centrifugal pump impeller. The blade of low specific speed centrifugal pump was parameterized by cubic Bezier curve, and the experiment samples can be designed by introducing small perturbation of control parameters which included wrap angle, inlet and outlet blade angles. The snapshot set consisted of the control parameter for blade shape and the flow field data. According to the geometric similarity of the impeller flow passage and the mesh deformation technology, the flow field data of the similar position were interpolated. The snapshot set can be decomposed as linear combination of orthogonal basis by using proper orthogonal decomposition. The orthogonal basis coefficients for the objective blade were fitted by using radial basis function. The flow field data of the objective impeller were reconstructed. In the calculation case for the type of MH48-12.5 centrifugal pump, the flow field in impeller was reconstructed. The root-mean-square error for pressure prediction was 0.84%, and the velocity prediction error was within 0.5m/s. The computation time for the flow field prediction was less than 1/240 of the CFD. POD base modal analysis was carried out on the sample set. The base modal characteristic of flow field and its energy distribution were analyzed.

Key words: centrifugal pump; impeller; proper orthogonal decomposition; radial basis function; optimization design; modal analysis

收稿日期: 2018-05-07　修回日期: 2018-07-22

基金项目: 国家重点研发计划项目(2016YFB0200901)、国家自然科学基金项目(51469014)和甘肃省陇原创新人才计划项目

作者简介: 张人会(1977—),男,教授,博士生导师,主要从事流体机械内部流动及性能优化研究,E-mail: zhangrh@lut.cn

0 引言

离心泵水力性能的优化实质是对其内流动的优化控制,由于离心泵内部流动的复杂性及内部流动与其水力性能之间的复杂隐式关系,离心泵水力性能的优化设计研究进展缓慢[1-5]。目前叶轮机械优化设计方法主要有响应面法、遗传算法、伴随方法、不完全敏感性法等[6-9]。响应面法与遗传算法属于非梯度方法,全局最优,但随设计参数的增多,计算量剧增;伴随方法求解精度高、计算量小,但是伴随方程的推导及求解较为复杂。采用代理模型能够快速确定设计参数对流场的扰动响应,精确地进行流场的预估,有效避免大规模的流场计算,便于实现流场的快速优化。

本征正交分解(Proper orthogonal decomposition, POD)法是一种功能强大的数据分析方法[10],其通过对数据系统的奇异值分解确定系统的 POD 基,在给定系统空间内具有最佳的表达能力。段焰辉等[11]在无粘跨音速情况下,使用本征正交分解法对机翼翼型流场进行了分析。文献[12-15]在 Gappy POD 翼型反设计方法的基础上提出校正迭代法,以此提高反设计精度,并将其与代理模型应用于流场的预测,得出基模态数与预测精度的关系。罗佳奇等[16]基于 POD 方法对跨音速叶片的流场进行分析,提出 POD-RBF(本征正交分解-径向基函数)混合代理模型,并成功应用于跨音速流场的分析。文献[17-18]将本征正交分解法应用于离心泵的反设计研究,同时将其应用于液环泵单流道流场重构研究。

本文提出基于 POD-RBF 混合代理模型方法的离心泵叶轮内流场重构研究,并对离心泵叶轮内流场结构及模态特征进行流场基模态分析。

1 POD 内流场重构及模态分析理论

1.1 Gappy POD 本征正交分解法

SIROVICH[19]最早提出了 Snapshot POD 方法,该方法将自相关矩阵的阶数降低至与快照个数相等,大大改善了求解特征值的效率和稳定性问题,为 POD 方法在流体力学中的应用提供了便利。Gappy POD 是 Snapshot POD 方法的一种变形,常被用于缺失数据的填补。

样本快照集表示为

$$\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{U}_1 \quad \boldsymbol{u}_2]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

在矢量集 $\boldsymbol{U}_1$ 中,所有元素都是已知的,矢量 $\boldsymbol{u}_2$ 的表达式为

$$\boldsymbol{u}_2=[\boldsymbol{u}_{21} \quad \boldsymbol{u}_{22}] \tag{2}$$

$\boldsymbol{u}_{21}$ 为已知数据,$\boldsymbol{u}_{22}$ 为缺失数据,需要完成对缺失元素的填补。

矢量集 $\boldsymbol{U}_1$ 可表示为

$$\boldsymbol{U}_1=\sum_{j=1}^{n} a_j\boldsymbol{\Phi}^j \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}=[\boldsymbol{\Phi}_1 \quad \boldsymbol{\Phi}_2] \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{\Phi}$——POD 基 n——样本数

a_j——基系数

其可通过快照集 $\boldsymbol{U}$ 的奇异值分解计算得到

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} U_{11} & \cdots & U_{1m} & U_{1,m+1} & \cdots & U_{1,m+z} \\ U_{21} & \cdots & U_{2m} & U_{2,m+1} & \cdots & U_{2,m+z} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline \multicolumn{3}{c:}{\boldsymbol{u}_{21}} & \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{u}_{22}} \end{array}\right]= \left[\begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \end{array}\right]\cdot \left[\begin{array}{ccc:ccc} \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1m} & \Phi_{1,m+1} & \cdots & \Phi_{1,m+z} \\ \Phi_{21} & \cdots & \Phi_{2m} & \Phi_{2,m+1} & \cdots & \Phi_{2,m+z} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline \Phi_{n1} & \cdots & \Phi_{nm} & \Phi_{n,m+1} & \cdots & \Phi_{n,m+z} \end{array}\right] \tag{5}$$

式中,$\boldsymbol{\Phi}_1$、$\boldsymbol{\Phi}_2$ 是对应于 $\boldsymbol{u}_{21}$、$\boldsymbol{u}_{22}$ 两部分的 POD 基,b_{ij} 与 β_j 为 POD 基系数,下角标 m 为叶型参数的个数,下角标 z 为重构截面网格节点个数。对矢量 $\boldsymbol{u}_{22}$ 可进行填补,即

$$\boldsymbol{u}_{22}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\boldsymbol{\Phi}_2^j \tag{6}$$

系数 β_j 可通过最小二乘法得到,即

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{f} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{M}_{ij}=(\boldsymbol{\Phi}_1^i,\boldsymbol{\Phi}_1^j)$,$\boldsymbol{f}_i=(\boldsymbol{u}_{21},\boldsymbol{\Phi}_1^i)$,求解式(7)得到系数 β_j,进而通过式(6)就可对不完整矢量 $\boldsymbol{u}_2$ 进行补充。由于最小二乘法拟合样本正交基系数时,得到的样本集的正交基线性组合模型并不通过其各样本点,本研究提出 POD-RBF 混合代理模型流场重构方法。

1.2 POD-RBF 混合代理模型

在早期的 Gappy POD 的应用中,经常采用最小二乘法来确定 POD 基系数,这是一种线性回归方法,在非线性系统响应问题中精度较低。为了提高 POD 基系数的响应精度,采用非线性且响应精度高的径向基函数(Radial basis function, RBF)[20]来预测目标样本的正交基系数。

由样本快照集的奇异值分解可得

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Phi} \tag{8}$$

式中 $\boldsymbol{Q}$——各样本对应的基系数

$\boldsymbol{\Sigma}$——对角矩阵

$\boldsymbol{V}$——右奇异矩阵

不同的样本叶型参数分别对应不同的正交基系数，可建立样本矢量与其基系数的径向基神经网络模型(Radial basis function neural network, RBFNN)

$$q_{kj} = \sum_{i=1}^{n} W_{ij}\varphi(x_k, x_i) \tag{9}$$

其中 q_{kj}为第 k 个 POD 基系数向量的第 j 个分量，W_{ij} 为 RBFNN 模型系数，x_i 为各样本叶型控制参数。$\varphi(x_i, x_j)$为径向基函数，采用高斯型径向基函数，其表达式为

$$\varphi(x_i, x_j) = \mathrm{e}^{-\sigma \| x_i - x_j \|^2} \tag{10}$$

式中 σ 为正实数，$0 \leqslant \sigma \leqslant 1$。

由式(8)可得样本集的正交基矢量，由径向基网络的输入参数 x_i 及其输出 q_{kj}可反解其 RBFNN 模型系数 W_{ij}，然后依据该 RBFNN 模型可预测目标叶型 x_o 所对应的 POD 基系数 q_o，并由式(8)重构目标叶型所对应的叶轮内流场。

1.3　叶轮内流场的基模态分析

采用 POD 方法进行样本流场模态的提取，每个快照均由叶轮中间截面网格节点坐标和相应的流场信息构成，第 i 个样本矢量可表示为$(x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots, x_{i,M\times N} | y_{i,1}, y_{i,2}, \cdots, y_{i,M\times N} | v_{i,1}, v_{i,2}, \cdots, v_{i,M\times N})$。其中$(x, y)$为网格节点坐标，$v$ 为流场参数，$M \times N$ 为网格节点数。

令　　$\overline{\boldsymbol{U}}_j = \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{U}_j^i \right) \Big/ n \quad \overline{\boldsymbol{U}}_j^i = \boldsymbol{U}_j^i - \overline{\boldsymbol{U}}_j$

则　　$$\overline{\boldsymbol{U}}_j^i = \widetilde{\boldsymbol{Q}}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}} = \widetilde{\boldsymbol{Q}}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}} \tag{11}$$

2　离心泵叶轮内流场重构及其模态分析

以 MH48－12.5 型低比转数离心泵叶轮(流量 Q = 12.5 $\mathrm{m^3/h}$，扬程 H = 30.7 m，转速 n = 2 900 r/min，效率 η = 53%)为研究对象，其叶轮叶片包角 θ 为 143°，进口安放角为 30°，出口安放角为 17°。采用三次 Bezier 曲线对叶片型线进行参数化控制(图 1)，在叶轮轴面不变的条件下，由 Bezier 曲线控制多边形的边$\overline{AB}$及$\overline{CD}$的斜率分别控制叶型进口安放角 β_1 及出口安放角 β_2，$\overline{AB}$及$\overline{CD}$线段长度由原始叶片型线确定，通过 D 点在其外径圆上的移动来控制叶片包角。对控制参数叶片包角 θ、进口安放角 β_1、出口安放角 β_2 进行样本均匀试验设计，由 β_1、β_2、θ 3 个控制参数分别在其初始设计叶型的基础上给定 10°扰动量的均匀试验设计得到 8 个初始样本。采用 SST $k-\omega$ 湍流模型、SIMPLEC 耦合算法分别对 8 个初始样本进行内流场的 CFD 分析。

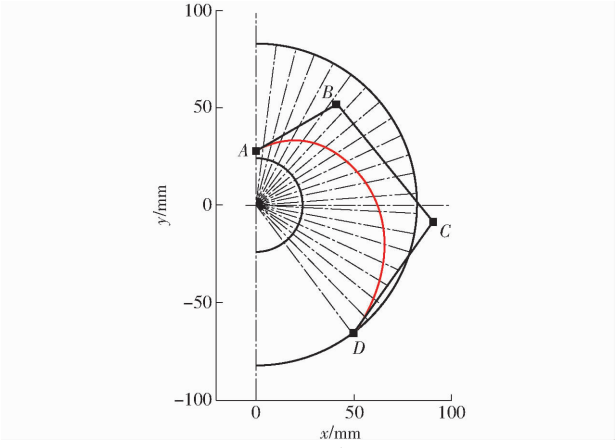

图 1　叶片型线参数化控制

Fig. 1　Parametric control of blade shape

2.1　内流场重构及其误差分析

依据初始叶片型线基础上扰动所得各样本叶轮内流场的 CFD 计算结果，对初始叶型的叶轮内流场进行 POD 重构分析，并将流场的 POD 重构结果与其 CFD 结果进行误差分析。样本矢量由叶片型线的控制参数和叶轮内流场参数构成，第 i 个样本矢量可以表示为$(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \cdots, \alpha_{i,m} | v_{i,1}, v_{i,2}, \cdots, v_{i,53\times41})$，其中 α 是叶型参数，单个流道取 53 × 41 的网格节点数，由此可得样本集为

$$\boldsymbol{U} = \left[\begin{array}{cccc:cccc} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,m} & v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,53\times41} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,m} & v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,53\times41} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,m} & v_{n,1} & v_{n,2} & \cdots & v_{n,53\times41} \\ \hdashline \alpha_{o,1} & \alpha_{o,2} & \cdots & \alpha_{o,m} & v_{o,1} & v_{o,2} & \cdots & v_{o,53\times41} \end{array}\right] \tag{12}$$

其中 $v_{o,i}$是目标叶型 $\alpha_{o,i}$所对应的流场参数。

8 个叶轮叶片型线各不相同，无法实现同一网格下的流场重构，由于各叶轮内流道几何相似，进行流场的重构时需要根据对应的相似节点进行流场样本集的构建，并进行流场预测。采用网格变形技术重构其结构化网格，将其单个流道网格统一为 53 × 41 的结构化网格，按照相似的网格节点进行流场的插值，得到各相似坐标点的样本矢量集。

定义沿着圆周角 γ 及半径 r 方向的无量纲坐标 $\delta_{i,j}$和 $\eta_{i,j}$，其中 $\delta_{i,j}$满足公式

$$\gamma_{i,j} = \gamma_{i,1} + \delta_{i,j}(\gamma_{i,41} - \gamma_{i,1}) \tag{13}$$

式中，$\gamma_{i,j}$为节点(i, j)所对应的圆周角坐标，类似地可定义 r 方向的无量纲坐标 $\eta_{i,j}$。由均匀分布的无量纲坐标及叶片边界上的节点分布即可求解叶轮内任意相似节点的坐标。

通过 POD－RBF 混合代理模型对目标叶型对应的内流场进行重构,并将预测流场与 CFD 计算结果进行对比,如图 2～6 所示。

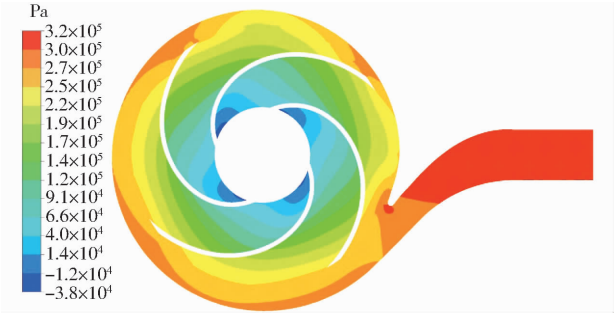

图 2 CFD 计算全流道压力分布

Fig. 2 Pressure distributions of whole channel of CFD

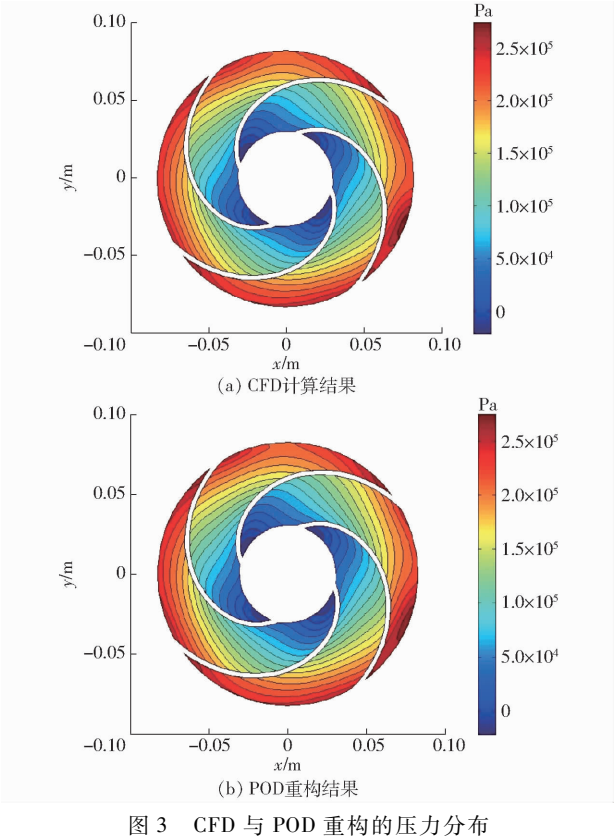

图 3 CFD 与 POD 重构的压力分布

Fig. 3 Pressure distributions of CFD and POD

POD 拟合的均方根误差 $\overline{\varepsilon}_i$ 的计算公式为

$$\overline{\varepsilon}_i = \sqrt{\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{f_{i,\mathrm{POD}} - f_{i,\mathrm{CFD}}}{f_{i,\mathrm{CFD}}}\right)^2} \times 100\% \quad (14)$$

其中 $f_{i,\mathrm{POD}}$、$f_{i,\mathrm{CFD}}$ 分别为各网格节点的 POD 及 CFD 流场参数,K 为叶轮中间截面网格节点总数。

图 2 是 CFD 计算全流道中间截面压力分布情况,可以看出由于隔舌动静干涉的影响,隔舌附近叶轮内压力较高。图 3 是叶轮中间截面压力场的 POD 预测结果与 CFD 计算情况的对比,由图可以看出 POD 预测结果与 CFD 计算基本一致,从叶轮进口到叶轮出口压力逐渐增大。图 4 是压力预测误差分布情况,是由 POD 预测压力场减去 CFD 计

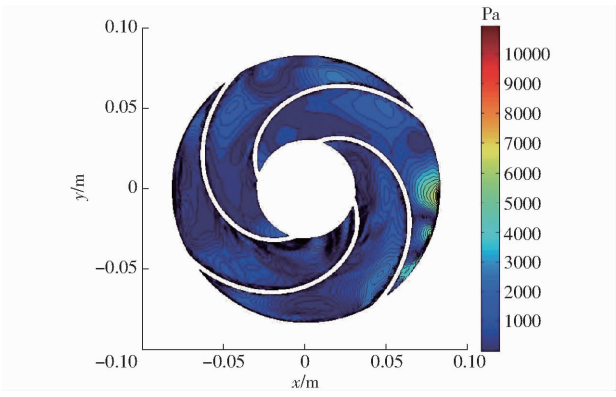

图 4 压力误差分布

Fig. 4 Distributions of pressure errors

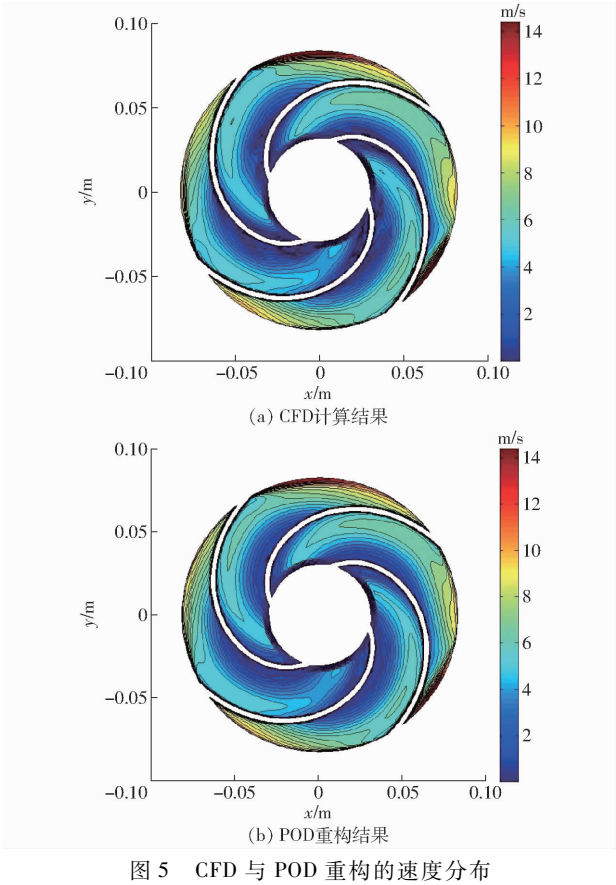

图 5 CFD 与 POD 重构的速度分布

Fig. 5 Velocity distributions of CFD and POD

算流场得到。从图中可以看出,叶轮靠近蜗壳隔舌部位有较高的局部误差,约 10 000 Pa,整体来看叶轮内流场压力预测误差基本在 1 000～3 000 Pa,误差较小。根据式(14)计算可得均方根误差为 0.84%。

图 5 为叶轮中间截面相对速度的 POD 预测与 CFD 计算结果的对比,由图可以看出,POD－RBF 混合代理模型法可以精确预测目标叶轮相对速度场的分布情况。图 6 为预测速度场与 CFD 计算速度场间的对比误差分布,可以看出预测误差基本在 0.5 m/s以内。同样在 DELL T620、24 核、64 GB 内存的工作站上进行运算, CFD 计算泵内流场需要

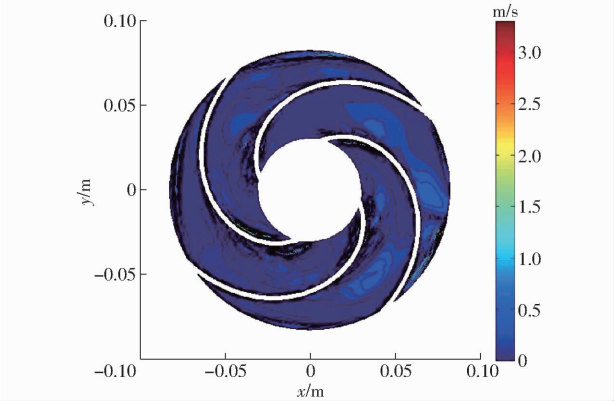

图 6　速度误差分布

Fig. 6　Distributions of velocity errors

2 h 才能完成，而由 POD－RBF 方法重构叶轮内流场所需要的预测时间大约为 30 s，仅为 CFD 计算所需时间的 1/240，可以实现离心泵内流场的快速精确预估。

2.2　内流场模态分析

依据 1.3 节流场基模态分析方法，将由网格节点坐标及流场参数构成的快照集减去平均快照集，并进行奇异值分解，最后叠加平均快照集，得到基模态流场，如图 7～10 所示。

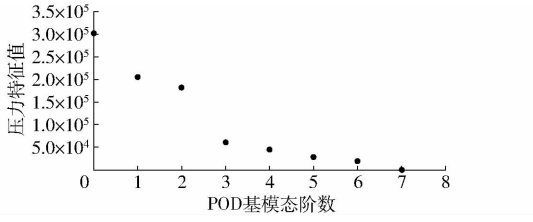

图 7　各阶 POD 模态对应的压力特征值

Fig. 7　Pressure eigenvalue of POD modal

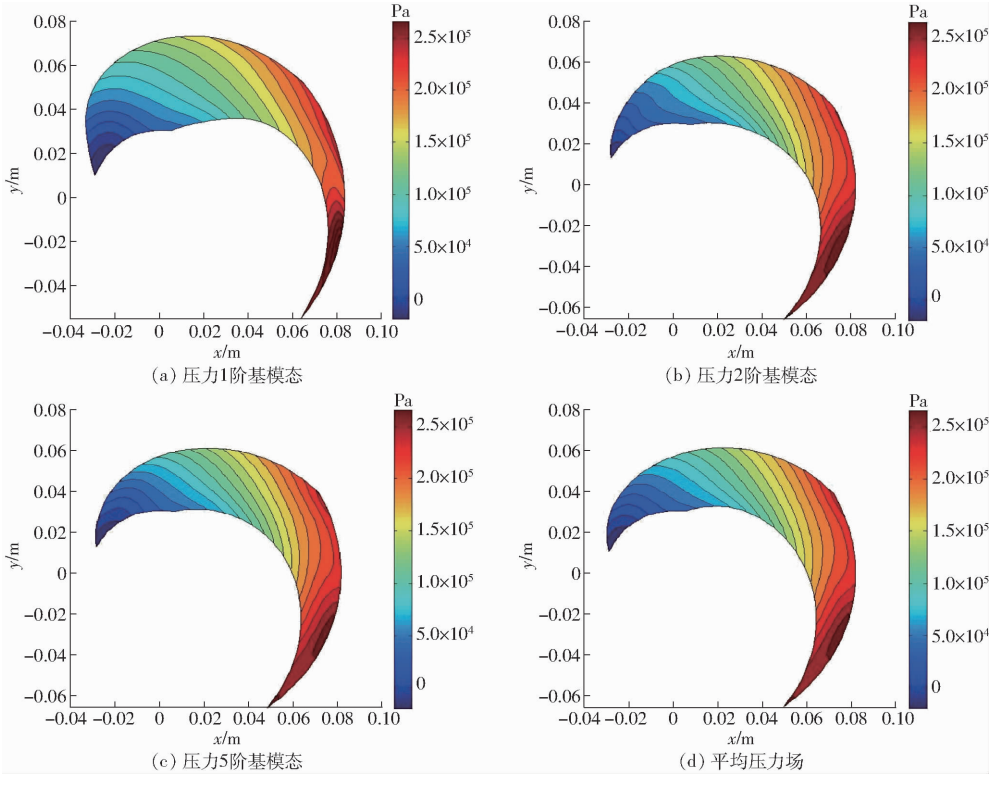

图 8　基模态压力流场

Fig. 8　Pressure field of base modal

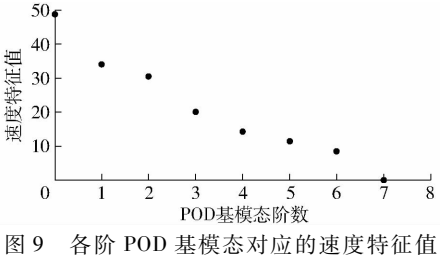

图 9　各阶 POD 基模态对应的速度特征值

Fig. 9　Velocity eigenvalue of POD modal

图 7、9 分别为压力场与速度场的各个基模态特征值分布，由图可以看出随着基模态阶数的增多，其所包含的特征越少，前 6 阶压力与速度的基模态分别包含了其 97.7%、94.9% 的流场能量。图 8 及图 10 分别是基模态压力场与基模态速度场，从中可以看出，第 1 阶 POD 基模态流场与样本平均流场的差异最显著，说明其包含的流场变化特征最多，第 5 阶基模态流场与平均流场基本一致。由图 8 可以看出，压力第 1 阶基模态反映其进口到出口压力递增以及叶片压力面出口高压区的流场特征，压力第 2 阶基模态能够反映叶轮出口与隔舌的干扰引起的高压区特征。由图 10 可以看出，速度的第 1 阶基模态能够反映叶片压力面的低速区、叶片进口背面的低速区、叶片压力面出口低速区及叶轮出口与隔舌的干扰作用引起的高速区流场特征，第 2 阶基模态反

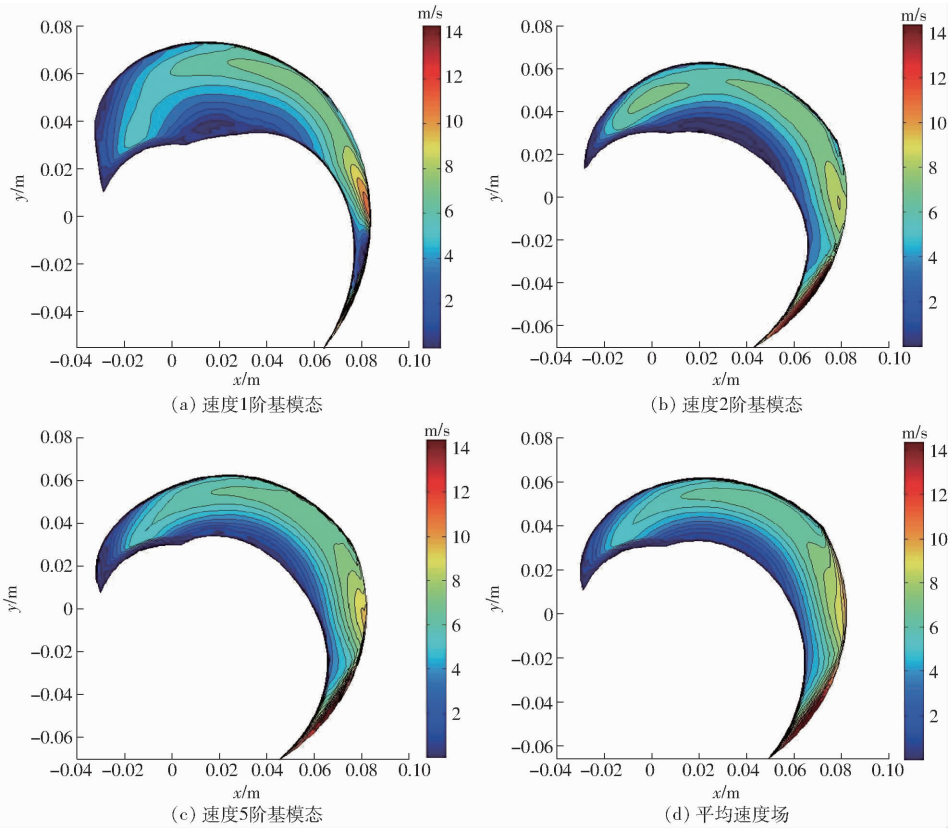

图 10 基模态速度流场

Fig. 10 Velocity field of base modal

映出叶片出口压力面附近的高速区特征,其余的速度场特征相比于第 1 阶基模态明显减弱。

3 结论

(1)提出了采用 POD - RBF 混合代理模型方法对离心泵叶轮内流场进行重构分析。从对离心泵叶轮内流场的重构分析结果来看,POD - RBF 方法能够精确重构出其压力场与速度场分布的结构特征,压力预测均方根误差为 0.84%,速度预测误差基本在 0.5 m/s 以内。

(2)对样本集进行 POD 基模态分析,前 6 阶基模态基本包含所有流场能量,1 阶基模态流场与样本平均流场差异最显著,说明其包含的流场变化特征最多,5 阶基模态流场与平均流场基本一致。采用 POD 基模态分析可以精确地预测叶轮内流场的流动特征。

(3)提出的 POD - RBF 方法能够快速精确地对低比转数离心泵叶轮内流场进行重构,流场预估所需时间约为 CFD 计算的 1/240,并可精确捕捉到内流场的分布特征,其预测精度高、计算量小,可以作为代理模型用于流体机械优化设计中流场的预估。

参 考 文 献

1 袁寿其, 王文杰, 裴吉,等. 低比转速离心泵的多目标优化设计[J]. 农业工程学报, 2015, 31(5): 46 - 52.
YUAN Shouqi, WANG Wenjie, PEI Ji, et al. Multi-objective optimization of low-specfic-speed centrifugal pump[J]. Transactions of the CSAE, 2015, 31(5): 46 - 52. (in Chinese)

2 王伟, 施卫东, 蒋小平,等. 基于正交试验及 CFD 的多级离心泵叶轮优化设计[J]. 排灌机械工程学报, 2016, 34(3): 191 - 197.
WANG Wei, SHI Weidong, JIANG Xiaoping, et al. Optimization design of multistage centrifugal pump impeller by orthogonal experiment and CFD[J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2016, 34(3): 191 - 197. (in Chinese)

3 王旭鹤, 祝宝山, 曹树良,等. 可逆式水泵水轮机转轮的三维反问题优化设计[J]. 农业工程学报, 2014, 30(13): 78 - 85.
WANG Xuhe, ZHU Baoshan, CAO Shuliang, et al. Optimal design of reversible pump-turbine runner[J]. Transactions of the CSAE, 2014, 30(13): 78 - 85. (in Chinese)

4 郭鹏程, 罗兴锜, 刘胜柱. 基于三维紊流数值计算的离心泵叶轮优化设计[J]. 机械工程学报, 2004, 40(4): 181 - 184.
GUO Pengcheng, LUO Xingqi, LIU Shengzhu. Optimized redesign of the centrifugal impeller based on numerical analysis of 3D turbulent flow[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(4): 181 - 184. (in Chinese)

5 张剑慈, 崔宝玲, 李跃,等. 低比转速开式叶轮高速离心泵的优化设计系统[J]. 机械工程学报, 2006, 42(7): 19 - 23.

ZHANG Jianci, CUI Baoling, LI Ying, et al. Numerical simulation and experimental study on fluidic flowmeter[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(7): 19 - 23. (in Chinese)

6 张人会, 樊家成, 杨军虎,等. 基于自由曲面变形方法的离心泵叶片载荷优化[J/OL]. 农业机械学报, 2015, 46(10): 38 - 43. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no = 20151006&flag = 1. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2015.10.006.
ZHANG Renhui, FAN Jiacheng, YANG Junhu, et al. The optimization of the centrifugal pump blade load based on free form deformation[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(10): 38 - 43. (in Chinese)

7 廖福, 张洪. 基于遗传算法低比转速离心泵的优化设计[J]. 中国农机化学报, 2016, 37(2): 233 - 236.
LIAO Fu, ZHANG Hong. Optimization design of lower speed pump based on genetic algorithm[J]. Journal of Chinese Agricultural Mechanization, 2016, 37(2): 233 - 236. (in Chinese)

8 张人会, 郭苗, 杨军虎,等. 基于伴随方法的离心泵叶轮优化设计[J]. 排灌机械工程学报, 2014, 32(11): 943 - 947.
ZHANG Renhui, GUO Miao, YANG Junhu, et al. Blade shape optimization of centrifugal pump impeller with adjoint method [J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2014, 32(11): 943 - 947. (in Chinese)

9 张人会, 郭广强, 杨军虎,等. 基于不完全敏感性方法的低比转速离心叶轮优化研究[J]. 机械工程学报, 2014, 50(4): 162 - 166.
ZHANG Renhui, GUO Guangqiang, YANG Junhu, et al. Optimization research on low specific speed centrifugal impeller based on incomplete sensitivities method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(4): 162 - 166. (in Chinese)

10 CHATTERJEE A. An introduction to the proper orthogonal decomposition[J]. Current Science, 2000, 78(7): 808 - 817.

11 段焰辉, 蔡晋生. 基于 Gappy POD 方法的翼型流场分析[J]. 航空工程进展, 2010, 1(1): 40 - 44.
DUAN Yanhui, CAI Jinsheng. Airfoil flow analysis based on Gappy POD method[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2010, 1(1): 40 - 44. (in Chinese)

12 白俊强, 邱亚松, 华俊. 改进型 Gappy POD 翼型反设计方法[J]. 航空学报, 2013, 34(4): 762 - 771.
BAI Junqiang, QIU Yasong, HUA Jun. Improved airfoil inverse design method based on Gappy POD[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(4): 762 - 771. (in Chinese)

13 邱亚松, 白俊强, 华俊. 基于本征正交分解和代理模型的流场预测方法[J]. 航空学报, 2013, 34(6): 1249 - 1260.
QIU Yasong, BAI Junqiang, HUA Jun. Flow field estimation method based on proper orthogonal decomposition and surrogate model [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(6): 1249 - 1260. (in Chinese)

14 刘南, 白俊强, 邱亚松,等. 基于本征正交分解的气动外形设计空间重构方法研究[J]. 西北工业大学学报, 2015, 33(2): 171 - 177.
LIU Nan, BAI Junqiang, QIU Yasong, et al. Investigating aerodynamic shape design space reconstruction using proper orthogonal decomposition (POD)[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2015, 33(2): 171 - 177. (in Chinese)

15 QIU Y, BAI J. Stationary flow fields prediction of variable physical domain based on proper orthogonal decomposition and kriging surrogate model[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2015, 28(1): 44 - 56.

16 罗佳奇, 段焰辉, 夏振华. 基于自适应本征正交分解混合模型的跨音速流场分析[J]. 物理学报, 2016, 65(12): 181 - 189.
LUO Jiaqi, DUAN Yanhui, XIA Zhenhua. Transonic flow reconstruction by an adaptive proper orthogonal decomposition hybrid model[J]. Acta Physica Sinica, 2016, 65(12): 181 - 189. (in Chinese)

17 ZHANG R H, GUO R, YANG J H, et al. Inverse method of centrifugal pump impeller based on proper orthogonal decomposition (POD) method[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2017, 30(4): 1 - 7.

18 张人会, 吴昊, 杨军虎,等. 基于本征正交分解法的液环泵气液两相流场重构[J/OL]. 农业机械学报, 2017, 48(6): 381 - 386. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no = 20170650&flag = 1. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2017.06.050.
ZHANG Renhui, WU Hao, YANG Junhu, et al. Reconstruction for gas-liquid flow of liquid-ring pump based on proper orthogonal decomposition [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(6): 381 - 386. (in Chinese)

19 SIROVICH L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. I-Coherent structures. II-Symmetries and transformations. III-Dynamics and scaling[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1987, 45(3): 561 - 571.

20 BUHMANN M D. Radial basis functions[J]. Acta Numerica, 2000, 9(5): 1 - 38.