

# 基于方位特征方程的2T2R并联机构拓扑综合与分类

孙驰宇<sup>1</sup> 沈惠平<sup>1,2</sup> 袁军堂<sup>1</sup> 杨廷力<sup>2</sup>

(1. 南京理工大学机械工程学院, 南京 210094; 2. 常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

**摘要:** 基于方位特征(POC)集方程的并联机构型综合方法,给出了可实现两平移两转动(2T2R)并联机构(Parallel mechanism, PM)的型综合过程和方法,包括基于拓扑等效替代的复杂支路综合方法、支路几何装配条件的判定方法及驱动副的判定方法等,得到了15种2T2R构型,其中10种为新构型;对这些构型按支路结构和动平台数目进行分类,并进行拓扑特征分析,得到其所包含的AKC(Assure运动链)(包括独立回路数、耦合度)、自由度类型和运动解耦性。本文综合出的构型结构较为简单、易于装配,具有一定的实用价值。

**关键词:** 并联机构; 两平移两转动输出; 机构型综合; 方位特征集

**中图分类号:** TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2018)11-0409-10

## Topological Structural Synthesis and Classification of 2T2R Parallel Mechanism Based on POC Equations

SUN Chiyu<sup>1</sup> SHEN Huiping<sup>1,2</sup> YUAN Juntang<sup>1</sup> YANG Tingli<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Technology and Engineering, Nanjing 210094, China  
2. Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213016, China)

**Abstract:** The process of two translation and two rotation (2T2R) parallel mechanism (PM) type synthesis was systematically discussed according to the method of topological structural synthesis of parallel mechanism based on position and orientation characteristic (POC) equations. The structure synthesis of complex branches, the method of judging geometric assembly condition of parallel mechanism and the judgment of drive unit of the parallel mechanism were all illustrated with examples. The type synthesis of hybrid single open chain (HSOC) branch chains was the foundation of the type synthesis of parallel mechanism, five new HSOC branches were proposed based on the complex branch synthesis method by the idea of equivalent substitution of topology structure. Totally 15 kinds of 2T2R parallel mechanisms were synthesized and classified according to branch structure and number of moving platform. Totally 10 kinds of them were new structures. Furthermore, the topological characteristics of them were analyzed, including the Assure kinematic chain (AKC), number of independent displacement equations for parallel mechanisms, degree of coupling, type of degree of freedom (DOF) and motion decoupling. In addition, according to the characteristics of topological structure, the 2T2R mechanism was classified and analyzed. These structures were simple and easy to be assembled and manufactured. All these new structures had practical value.

**Key words:** parallel mechanism; two translation and two rotation output; type synthesis; position and orientation characteristic

## 0 引言

目前,国内外并联机构型综合<sup>[1]</sup>的方法主要有:基于螺旋理论的方法<sup>[2-3]</sup>、基于位移子群的方

法<sup>[4-5]</sup>、基于线性变换与进化形态学的方法<sup>[6-7]</sup>和基于方位特征集(POC)的方法<sup>[8-12]</sup>。这些理论方法都是以自由度、动平台的输出运动类型和数目为设计目标,通过设计各种支链及其在动、静平台之间

收稿日期:2018-06-04 修回日期:2018-07-23

基金项目:国家自然科学基金项目(51475050)

作者简介:孙驰宇(1990—),男,博士生,主要从事并联机构研究,E-mail:476885351@qq.com

通信作者:沈惠平(1965—),男,教授,博士生导师,主要从事并联机构研究,E-mail:shp65@126.com

的拓扑布置,构造拓扑结构,具有较好的系统性、严密性。但前3种方法需要较好的数学基础,一般工程技术人员较难理解和掌握。基于POC集的方法仅需简单的逻辑运算,每一步都有确定的计算公式或设计准则,简洁明了,易于掌握,有利于发现更多新机构。

4自由度并联机构中的三平移—转动SCARA机构<sup>[13-14]</sup>已有较多研究与应用,而两平移两转动(2T2R)机构却较少,但该类机构在工业上也有应用潜力,可应用于减振平台、坐标测量机、农业采矿振动筛、脚踝康复装置、结合工作台的运动构成五轴联动数控机床等,因此,对2T2R并联机构进行型综合研究仍具有一定的意义。

陈海等<sup>[15]</sup>基于螺旋理论提出了两平移两转动完全解耦并联机构构型综合方法;KUMAR等<sup>[16]</sup>基于螺旋理论对2T2R机构进行了型综合,并综合出简单支链构成的机构,以用于精密医疗器械;YOON等<sup>[17]</sup>提出了一种双平台3支链的2T2R并联机构;MERLET<sup>[18]</sup>对2T2R机构型综合进行了论述;LI等<sup>[19]</sup>依据约束综合方法,综合了一系列对称的2T2R机构;FAN等<sup>[20]</sup>基于进化形态与李群理论,对2T2R机构进行了型综合;WANG等<sup>[21]</sup>基于李群理论提出了两种具有较高转动能力的2T2R机构;杨廷力等<sup>[10]</sup>基于POC方法,综合了一部分2T2R机构。本文在文献[10]的基础上,通过设计新的HSOC(混合支链),设计10种新型2T2R构型。同时,依据支路结构和动平台数目,对综合出的机构进行分类,并对它们进行拓扑特征分析,得到其所包含的AKC、耦合度数、自由度类型和运动解耦性。

## 1 基本理论

为便于理解,给出基于POC方程的并联机构拓扑结构设计理论和方法<sup>[10]</sup>。

### 1.1 串联机构的POC方程

串联机构POC方程为

$$M_S = \bigcup_{i=1}^m M_{J_i} = \bigcup_{j=1}^k M_{\text{sub-SOC}_j} \quad (1)$$

式中  $M_S$ ——串联机构末端相对于定平台的POC集

$m$ ——运动副数

$M_{J_i}$ ——第*i*个运动副的POC集(表1)

$M_{\text{sub-SOC}_j}$ ——第*j*个子单开链(sub-SOC)的POC集

表1给出了仅包含R副与P副的12种sub-SOC及其POC集。

### 1.2 并联机构的POC方程

并联机构POC方程为

$$M_{\text{Pa}} = \bigcap_{j=1}^{\nu+1} M_{b_j} \quad (2)$$

式中  $M_{\text{Pa}}$ ——并联机构动平台的POC集

$M_{b_j}$ ——第*j*条支路末端构件的POC集

$\nu$ ——独立回路数

由式(2)可知,PM支路的POC集 $M_{b_j}$ 应满足

$$M_{b_j} \supseteq M_{\text{Pa}} \quad (3)$$

表1 运动副及sub-SOC的POC集

Tab.1 POC set of kinematic pair and sub-SOC

P副	R副	H副
$\begin{bmatrix} t^1(\parallel P) \\ r^0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^1(\perp(R, \rho)) \\ r^1(\parallel R) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^1(\parallel H) \cup t^1(\perp(H, \rho)) \\ r^1(\parallel H) \end{bmatrix}$
SOC{-R  R-}	SOC{-R  R  R-}	SOC{-P-P-}
SOC{-R⊥P-}	SOC{-R  R⊥P-}	SOC{◇(P,P,⋯,P)}
	SOC{-P⊥R⊥P-}	
1 $\begin{bmatrix} t^2(\perp R) \\ r^1(\parallel R) \end{bmatrix}$	2 $\begin{bmatrix} t^2(\perp R) \\ r^1(\parallel R) \end{bmatrix}$	3 $\begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix}$
1* $\begin{bmatrix} t^1(\perp(R, \rho)) \\ r^1(\parallel R) \end{bmatrix}$	2* $\begin{bmatrix} t^2(\perp R) \\ r^1(\parallel R) \end{bmatrix}$	3* $\begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix}$
	SOC{-R P-}	SOC{-RR-}
		SOC{-RRR-}
4 $\begin{bmatrix} t^1(\parallel P) \cup t^1(\perp(R, \rho)) \\ r^1(\parallel R) \end{bmatrix}$	5 $\begin{bmatrix} t^2(\perp \rho) \\ r^2 \end{bmatrix}$	6 $\begin{bmatrix} t^2(\perp \rho) \\ r^3 \end{bmatrix}$
4* $\begin{bmatrix} t^1(\parallel P) \\ r^1(\parallel R) \end{bmatrix}$	5* $\begin{bmatrix} t^0 \\ r^2 \end{bmatrix}$	6* $\begin{bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{bmatrix}$

注: 标有\*者,表示末端构件的基点 $o'$ 不在运动副轴线上。

### 1.3 机构DOF公式

机构DOF公式为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{\nu} \xi_{L_j} \quad (4)$$

其中  $\xi_{L_j} = \dim \left( \bigcap_{j=1}^{\nu} M_{b_j} \right) \cup M_{b_{(j+1)}}$

式中  $F$ ——机构自由度

$f_i$ ——第*i*个运动副的自由度

$\xi_{L_j}$ ——第*j*个独立回路的独立位移方程数

$M_{b_j}$ ——第*j*条支路末端构件的POC集

### 1.4 并联机构型综合的一般过程

并联机构拓扑结构设计的一般过程,见文献[11]。

## 2 2T2R并联机构的拓扑结构综合

依据上述基本理论,给出2T2R并联机构的型综合过程和方法,并得到15种2T2R机构,其中10种为本文综合得到。

设计要求:设计4自由度2T2R的并联机构,且每条支链仅含一个驱动副,包含的P副只能为驱动副。即机构动平台实现的POC集为

$$M_{\text{Pa}} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{bmatrix}$$

## 2.1 确定支路的 POC 集

已知  $M_{Pa} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{bmatrix}$ , 由式(3)得机构各支路末端的

POC 集, 可为以下 4 种情况

$$M_{bj} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^2 \\ r^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

## 2.2 支路的结构综合

### 2.2.1 单开链(Single open chain, SOC)支路的综合

#### 2.2.1.1 POC 集为 $\begin{bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{bmatrix}$ 的支路综合

(1) 确定 SOC 支路的基本功能

① 支路末端的 POC 集为  $\begin{bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{bmatrix}$ 。

② 支路的自由度为 4, 即  $F = \dim\{M_S\} = 4$ 。

(2) 确定运动副的组合方案

由条件公式<sup>[21]</sup>

$$\begin{cases} F_1 = m_R + m_P \\ m_R \geq \dim\{M_S(r)\} \\ m_P \leq \dim\{M_S(t)\} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $F_1$ ——支路自由度

$m_R$ ——转动副数目

$m_P$ ——移动副数目

$\dim\{M_S(r)\}$ ——支路 POC 集独立转动元素数

$\dim\{M_S(t)\}$ ——支路 POC 集独立移动元素数

且已知:  $\dim\{M_S(r)\} = 2, \dim\{M_S(t)\} = 2$ , 可得:  $m_R \geq 2, m_P \leq 2$ 。

再由串联 POC 方程(式(1))及表 1, 可得运动副的组合方案为 3 种: 4R、3R1P、2R2P。

(3) 确定 SOC 支路包含的 sub-SOC, 并生成 SOC 支路

① 方案 1: 4R

由  $\dim\{M_S(r)\} = 2$  及式(1)与表 1 之 2 可知, 该支路可由一个 sub-SOC  $\{-R \parallel R \parallel R -\}$  及一个 R 副串联而成, 得到支路 SOC  $\{-R \parallel R \parallel R -R -\}$ , 其基点  $o'$  位于末端 R 副轴线上。

② 方案 2: 3R1P

由  $\dim\{M_S(r)\} = 2$  及式(1)与表 1 之 2 可知, 该支路可由一个 sub-SOC  $\{-R \parallel R \perp P -\}$  及一个 R 副串联而成, 得到支路 SOC  $\{-P \perp R \parallel R -R -\}$ , 其基点  $o'$  位于末端 R 副轴线上。

③ 方案 3: 2R2P

由  $\dim\{M_S(r)\} = 2$  及式(1)与表 1 之 3、5 可知, 该支路可由一个 sub-SOC  $\{-P - P -\}$  及一个

sub-SOC  $\{-\widetilde{RR} -\}$  串联而成, 得到支路 SOC  $\{-P - P - \widetilde{RR} -\}$ , 其基点  $o'$  位于末端两 R 副轴线交点处。

(4) 检验支路的 POC 集

由式(1)可知, 以上 3 种方案所得的 3 条单开链支路都满足该支路的 POC 设计要求。

例如: SOC  $\{-P \perp R \parallel R -R -\}$  支路由 sub-SOC  $\{-R \parallel R \perp P -\}$  及一个 R 副串联而成, 将它们的 POC 集代入式(1), 可得该支路的 POC 集

$$M_S = \begin{bmatrix} t^2(\perp R) \\ r^1(\parallel R) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^0 \\ r^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R) \\ r^2(\parallel \diamond(R, R)) \end{bmatrix}$$

#### 2.2.1.2 POC 集为 $\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} t^2 \\ r^3 \end{bmatrix}$ 的支路综合

仿照  $\begin{bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{bmatrix}$  的支路综合并参照表 1 可得:  $\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 \end{bmatrix}$  支路中运动副的组合方案为 4 种: 5R、4R1P、3R2P、2R3P。  $\begin{bmatrix} t^2 \\ r^3 \end{bmatrix}$  支路中运动副的组合方案为 3 种: 5R、4R1P、3R2P。

确定各 SOC 支路所包含的 sub-SOC, 并生成 SOC 支路的 POC 集。

#### 2.2.1.3 POC 集为 $\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}$ 的 SOC 支路结构类型

易知, 满足该 POC 集要求的支路结构有 SOC  $\{-S - S - R -\}$ 、SOC  $\{-S - P - S -\}$  等。

2T2R、3T2R、2T3R、3T3R 的 SOC 支路结构见表 2(左侧 SOC 支路部分 1~12)。

### 2.2.2 复杂单开链(Hybrid single open chain, HSOC)支路的综合

当一条 SOC 的 POC 集与一子并联机构(sub-PM)末端的 POC 集完全相同时, 称它们拓扑等效。HSOC 支路综合就是一个将 SOC 支路替换为拓扑等效的 sub-PM 的过程。表 3 给出常用的 sub-PM 类型及与其对应的拓扑等效 SOC, 以便于 HSOC 支路的综合。

由表 3 及 2.2.1 节所综合出的 SOC 支路可得 10 种 HSOC 种支路。其中, (2T-2R) HSOC 结构有 3 种, 如图 1 所示; (3T-2R) HSOC 结构有 5 种, 如图 2 所示; (2T-3R) HSOC 结构有 2 种, 如图 3 所示。

为便于比较, 表 2 列出了 2.2.1 节中叙述的 12 种 SOC 支路构型, 并根据本节 HSOC 支路综合方法, 衍生出 10 种 HSOC 支路构型, 其中(3)、(7)、(8)、(9)、(10)为 5 种新构型 HSOC 结构。

表 2 SOC 支路与 HSOC 支路的结构类型

Tab. 2 Branch structure types of SOC branch and HSOC branch

$M_{b_j}$	SOC 支路的运动副组合方案	SOC 支路	对应的 HSOC 支路
$\begin{bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{bmatrix}$	4R	(1) SOC { -R    R    R - R - }	不存在对应的 HSOC 支路
	3R1P	(2) SOC { -P ⊥ R    R - R - }	(1) HSOC { -R    R ⊥ P <sup>(4R)</sup> - R - }
	2R2P	(3) SOC { -P - P - $\widetilde{RR}$ - }	(2) HSOC { - (P <sup>(2S2R)</sup> ⊥ R <sup>(2S2R)</sup> )    R - R - }
$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 (    \diamond (R, R^*) ) \end{bmatrix}$	5R	(4) SOC { -R    R    R - R    R - }	不存在对应的 HSOC 支路
	4R1P	(5) SOC { -R    R - P - R    R - }	(4) HSOC { -R    R    R - P <sup>(4R)</sup> - R - }
	3R2P	(6) SOC { -R - P - P - R    R - }	(5) HSOC { -R    (R <sup>(2S2R)</sup>    P <sup>(2S2R)</sup> )    R ⊥ R - }
	2R3P	(7) SOC { -P - P - R - P - R - }	(6) HSOC { -R - P <sup>(4S)</sup> - P <sup>(4S)</sup> - R <sup>(4S)</sup>    R - }
			(7) HSOC { -DeltaPM - R ⊥ R - }
$\begin{bmatrix} t^2 \\ r^3 \end{bmatrix}$	5R	(8) SOC { -R    R - $\widetilde{RRR}$ - }	不存在对应的 HSOC 支路
	4R1P	(9) SOC { -R    R ⊥ P - $\widetilde{RR}$ - }	(9) HSOC { -R    R ⊥ P <sup>(4R)</sup> - $\widetilde{RR}$ - }
	3R2P	(10) SOC { -P - P - $\widetilde{RRR}$ - }	(10) HSOC { - $\diamond (P^{(3R2P)}, P^{(3R2P)}) \perp \widetilde{RRR}$ - }
$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}$		(11) SOC { -S - S - R - }	不存在对应的 HSOC 支路
		(12) SOC { -S - P - S - }	不存在对应的 HSOC 支路

表 3 常用的 sub-PM 及其拓扑等效 SOC

Tab. 3 Frequently used sub-PM and their topological equivalence SOC

	1	2	3	4	5
sub-PMs					
POC集	$\begin{bmatrix} t^1    ad \\ r^0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^1    bc \\ r^1    bc \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^1    ad \\ r^1    ad \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^0 \end{bmatrix}$
拓扑等效的SOC					

注: 表中 No. 4 之 sub-PM 的 4 个 S 副, 应保持平行四边形。

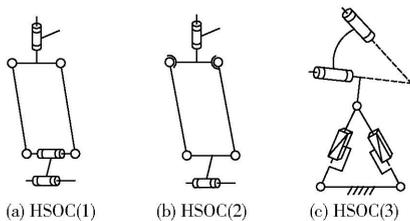


图 1 (2T-2R) 支路的 3 种结构类型

Fig. 1 Three types of (2T-2R) branch structure

2.3 确定支路组合方案

由表 2 可得 4 种不含 P 副 SOC 支链结构(表 2 中 SOC(1,4,8,11))以及 10 种 HSOC 支链结构, 对它们进行组合以综合出满足 POC 集要求的 2T2R 并联机构, 其中, 考虑到每条支链应只含一个驱动副且所用驱动副皆处于同一平面, 本文给出表 2 中部分支链组合结果的 15 种方案, 如表 4 所示。

2.4 确定支路装配几何条件

由式(3)可知, 综合出的并联机构的 POC 集所

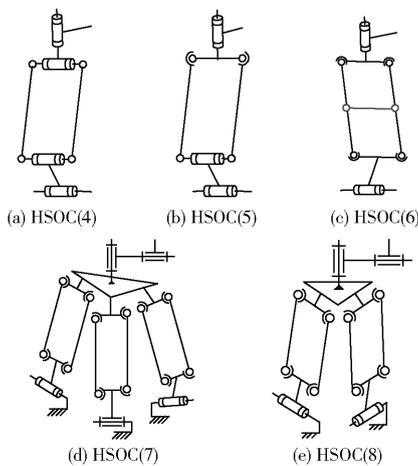


图 2 (3T-2R) 支路的 5 种结构类型

Fig. 2 Five types of (3T-2R) branch structure

包含的元素, 应多于或至少等于支链的 POC 集, 因此, 可运用支链间 POC 集交集运算, 可以消去支路 POC 集中并联机构所不包含的 POC 集元素, 现给出

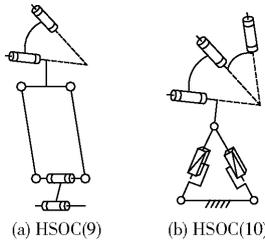


图 3 (2T-3R) 支路的 2 种结构类型

Fig. 3 Two types of (2T-3R) branch structure

支路交运算的基本公式, 以此可确定装配的几何条

件。分为转动、移动两种情况:

转动元素: 当满足式(6)~(8)中上式右侧的几何条件时, 左侧的交集运算可不约束掉转动元素, POC 集保持不变; 当满足式(6)~(8)中下式右侧的几何条件时, 左侧的交集运算将约束掉一个转动元素。

$$[r^1(\parallel R_i)]_{b_i} \cap [r^1(\parallel R_j)]_{b_j} = \begin{cases} [r^1(\parallel R_i)]_{P_a} & (R_i \parallel R_j) \\ [r^0]_{P_a} & (R_i \parallel R_j) \end{cases} \quad (6)$$

表 4 (2T-2R) PM 的支路组合方案

Tab. 4 Branch combination schemes of (2T-2R) PM

表 2 中的基本支路	序号	支路组合方案
SOC-(1)	1	4-SOC   -R    R    R-R-
	2*	2-SOC   -R    R    R-R-   ⊕2-SOC   -S-S-R-
SOC-(2)	3	2-SOC   -P ⊥ R    R-R-   ⊕2-SOC   -S-P-S-
	4	2-SOC   -R ⊥ P ⊥ C-   ⊕2-SOC   -S-P-S-
SOC-(3)	5	2-SOC   -P-P- $\widetilde{RR}$ -   ⊕2-SOC   -S-S-R-
HSOC-(1)	6*	4-HSOC   -R    R ⊥ P <sup>(4R)</sup> -R-
	7*	2-HSOC   -R    R ⊥ P <sup>(4R)</sup> -R-   ⊕2-SOC   -S-S-R-
HSOC-(2)	8*	4-HSOC   -(P <sup>(2S2R)</sup> ⊥ R <sup>(2S2R)})    R-R-</sup>
	9*	2-HSOC   -(P <sup>(2S2R)</sup> ⊥ R <sup>(2S2R)})    R-R-   ⊕2-SOC   -S-S-R-</sup>
HSOC-(3)	10*	1-HSOC   -◇(P <sup>(3R2P)</sup> , P <sup>(3R2P)</sup> ) ⊥ $\widetilde{RR}$ -   ⊕2-SOC   -S-S-R-
HSOC-(5)	11*	2-HSOC   -R    R ⊥ P <sup>(4R)</sup> -R-   ⊕2-HSOC   -R    (R <sup>(2S2R)</sup>    P <sup>(2S2R)</sup> )    R ⊥ R-
HSOC-(6)	12*	2-HSOC   -(P <sup>(2S2R)</sup> ⊥ R <sup>(2S2R)})    R-R-   ⊕2-HSOC   -R-P<sup>(4S)</sup>-P<sup>(4S)</sup>-R<sup>(4S)</sup>    R-</sup>
HSOC-(7)	13*	1-HSOC   -R    R ⊥ P <sup>(4R)</sup> -R-   ⊕1-HSOC   -DeltaPM-R ⊥ R-
HSOC-(8)	14	1-HSOC   -2SOC   R    R <sup>(4S)</sup> -P <sup>(4S)</sup> -P <sup>(4S)</sup> -R ⊥ R-   ⊕2-SOC   -R    R    R-R-
HSOC-(9)	15*	1-HSOC   -◇(P <sup>(3R2P)</sup> , P <sup>(3R2P)</sup> ) ⊥ $\widetilde{RR}$ -   ⊕2-HSOC   -R    R ⊥ P <sup>(4R)</sup> - $\widetilde{RR}$ -

注: 标有\*者, 为本文首次提出的新机构。

$$[r^1(\parallel R_i)]_{b_i} \cap [r^2(\parallel \diamond(R_{j1}, R_{j2}))] = \begin{cases} [r^1(\parallel R_i)]_{P_a} & (R_i \parallel (\diamond(R_{j1}, R_{j2}))) \\ [r^0]_{P_a} & (R_i \parallel (\diamond(R_{j1}, R_{j2}))) \end{cases} \quad (7)$$

$$[t^2(\parallel \diamond(P_{i1}^*, P_{i2}^*))]_{b_i} \cap [t^2(\parallel \diamond(P_{j1}^*, P_{j2}^*))] = \begin{cases} [t^2(\parallel \diamond(P_{i1}^*, P_{i2}^*))]_{P_a} & ((\diamond(P_{i1}^*, P_{i2}^*)) \parallel (\diamond(P_{j1}^*, P_{j2}^*))) \\ [t^1(\parallel (\diamond(P_{i1}^*, P_{i2}^*) \cap (\diamond(P_{j1}^*, P_{j2}^*))))]_{P_a} & ((\diamond(P_{i1}^*, P_{i2}^*)) \parallel (\diamond(P_{j1}^*, P_{j2}^*))) \end{cases} \quad (11)$$

$$[r^2(\parallel \diamond(R_{j1}, R_{j2}))]_{b_i} \cap [r^2(\parallel \diamond(R_{j1}, R_{j2}))] = \begin{cases} [r^2(\parallel \diamond(R_{j1}, R_{j2}))]_{P_a} & ((\diamond(R_{j1}, R_{j2})) \parallel (\diamond(R_{j1}, R_{j2}))) \\ [r^1(\parallel (\diamond(R_{j1}, R_{j2}) \cap (\diamond(R_{j1}, R_{j2}))))]_{P_a} & ((\diamond(R_{j1}, R_{j2})) \parallel (\diamond(R_{j1}, R_{j2}))) \end{cases} \quad (8)$$

移动元素: 当满足式(9)~(11)中上式右侧的几何条件时, 左侧的交集运算可不约束掉移动元素, POC 集保持不变; 当满足式(9)~(11)中下式右侧的几何条件时, 左侧的交集运算将约束掉一个移动元素。

$$[t^1(\parallel P_i^*)]_{b_i} \cap [t^1(\parallel P_j^*)]_{b_j} = \begin{cases} [t^1(\parallel P_i^*)]_{P_a} & (P_i^* \parallel P_j^*) \\ [t^0]_{P_a} & (P_i^* \parallel P_j^*) \end{cases} \quad (9)$$

$$[t^1(\parallel P_i^*)]_{b_i} \cap [t^2(\parallel \diamond(P_{j1}^*, P_{j2}^*))] = \begin{cases} [t^1(\parallel P_i^*)]_{P_a} & (P_i^* \parallel (\diamond(P_{j1}^*, P_{j2}^*))) \\ [t^0]_{P_a} & (P_i^* \parallel (\diamond(P_{j1}^*, P_{j2}^*))) \end{cases} \quad (10)$$

以表 4 中序号 1 的支路为例, 确定其动定平台间的几何装配条件。

已知该机构 4 条支路结构相同, 皆为 SOC | -R<sub>j1</sub> || R<sub>j2</sub> || R<sub>j3</sub> - R<sub>j4</sub> -, j=1, 2, 3, 4。基点 o' 为 R<sub>14</sub> 轴线上一点。

由 2.2 节可知, 当基点取在末端 R 副轴线上时, 该支路的 POC 集为

$$M_{b_j} = \begin{bmatrix} t^2(\perp \diamond(R_{j3}, R_{j4})) \\ r^2(\parallel \diamond(R_{j3}, R_{j4})) \end{bmatrix} \quad (j=1, 2)$$

基点取在轴线外位置时, 该支路的 POC 集为

$$M_{b_j} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{j3}, R_{j4})) \end{bmatrix} \quad (j=3, 4)$$

将期望的并联机构动平台 POC 集及各支路的 POC 集代入并联机构 POC 集方程中(式(2)), 可得

$$\begin{aligned} \left[ \begin{matrix} t^2 \\ r^2 \end{matrix} \right] \Leftarrow & \left[ r^2(\parallel \diamond(R_{13}, R_{14})) \right] \cap \left[ r^2(\parallel \diamond(R_{23}, R_{24})) \right] \cap \\ & \left[ r^2(\parallel \diamond(R_{33}, R_{34})) \right] \cap \left[ r^2(\parallel \diamond(R_{43}, R_{44})) \right] \end{aligned}$$

符号“ $\Leftarrow$ ”表示式中右端所有支路 POC 集交运算得预期目标为左端的 POC 集。

为实现动平台输出为 2T2R, 各条支路 POC 集交运算后需约束掉一个移动元素, 且 POC 集的转动元素保持不变。由式(8)的上式逆运算可知: 其装配几何条件为:  $R_{11} \parallel R_{21} \parallel R_{31} \parallel R_{41}$ ,  $R_{14} \parallel R_{24} \parallel R_{34} \parallel R_{44}$ , 且基点取在  $R_{14}$  与  $R_{24}$  的共线轴线上。按此装配几何条件得到的并联机构, 如图 4a 所示, 对应表 4 的序号 1, 该机构由 4 条相同的简单支链构成, 见文献[10]。进一步, 已知第 1、2 条支路 POC 集交运算已满足 2T2R 的型综合要求, 即第 3、4 条支路可为包含 2T2R 方位特征集的无约束简单支路结构, 如 3T3R 的 SSR 结构等, 如图 4b 所示, 对应表 4 的序号 2。

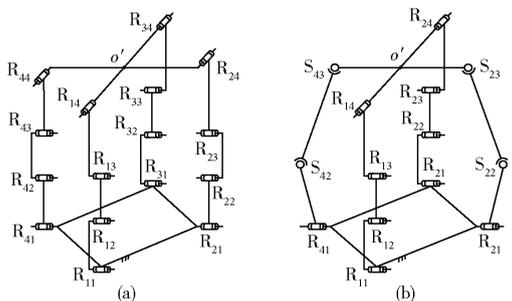


图 4 SOC-(1) 的两种 (2T-2R) PM

Fig. 4 Two types of (2T-2R) PM structure composed by SOC-(1)

按照上述步骤, 现分别确定表 4 中其他支路组合方案的几何条件, 得 13 种并联机构, 如图 5~12 所示, 简述如下:

(1) 按表 4 中第 3、4 组合方案综合出的并联机构, 如图 5 所示, 其中图 5a 机构中  $R_{11} \parallel R_{13} \parallel R_{21} \parallel R_{23}$ ;  $P_{12} \perp R_{11}$ ;  $P_{22} \perp R_{21}$ ;  $R_{14}$  与  $R_{24}$  轴线共线且基点取在轴线上, 该机构由 4 条简单支链构成<sup>[10]</sup>。第 4 方案(图 5b)实为第 3 方案的变形, 将  $R_{13}$  与  $R_{23}$  移除, 同时将  $R_{14}$  与  $R_{24}$  在同样位置上替换为 2 个 C 副, 该机构由 FAN 等<sup>[20]</sup> 提出, 该文使用运动副替代的思想提出了类似的一系列包含 C 副、U 副的简单支链构成的 2T2R 机构。

(2) 按表 4 中第 5 组合方案综合出的并联机构, 如图 6 所示, 其中,  $P_{12}$  与  $P_{12}$  共面且垂直于  $R_{13}$ ;  $P_{31}$  与  $P_{32}$  共面且垂直于  $R_{33}$ ;  $R_{14}$  与  $R_{34}$  共线且基点为 4 个 R 副轴线交点。该机构由 KUMAR 等<sup>[16]</sup> 提出, 其 4 条支路都为简单支链, 结构较为简单。

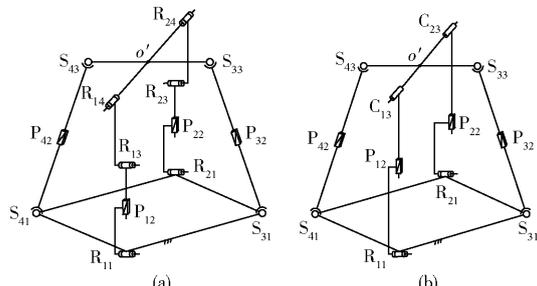


图 5 SOC-(2) 的一种 (2T-2R) PM 及其变形

Fig. 5 (2T-2R) PM structure composed by SOC-(2) and its metamorphosis

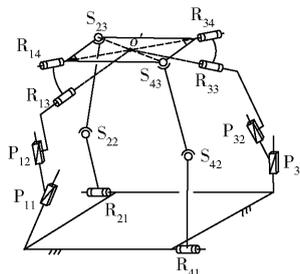


图 6 SOC-(3) 的一种 (2T-2R) PM

Fig. 6 (2T-2R) PM structure composed by SOC-(3)

(3) 按表 4 中第 6、7 组合方案综合出的并联机构, 如图 7 所示, 其中图 7a 机构中  $R_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{21} \parallel R_{22} \parallel R_{31} \parallel R_{32} \parallel R_{41} \parallel R_{42}$ ;  $R_{13} \parallel R_{23} \parallel R_{33} \parallel R_{43}$ ;  $R_{13}$  与  $R_{23}$  轴线共线且基点取在轴线上。图 7b 机构将图 7a 机构的第 3、4 条支链替换为 SSR 结构, 且定平台 4 个 R 副平行。

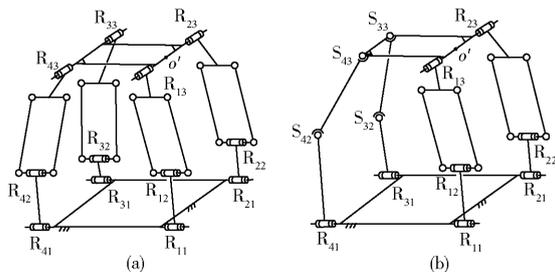


图 7 HSOC-(1) 的两种 (2T-2R) PM

Fig. 7 Two types of (2T-2R) PM structure composed by HSOC-(1)

(4) 按表 4 中第 8、9 组合方案综合出的并联机构, 如图 8 所示, 其中, 图 8a 定平台上 4 个 R 副平行, 动平台上 4 个 R 副也平行, 基点位于动平台两 R 副共线轴线上。图 8b 将图 8a 机构的第 3、4 条支链替换为 SSR 结构, 且定平台 4 个 R 副平行。

(5) 按表 4 中第 10、11 组合方案综合出的并联机构, 如图 9 所示, 其中图 9a 机构中  $R_{11} \parallel R_{21} \parallel R_{13} \parallel R_{31} \parallel R_{41}$ ;  $P_{12} \perp R_{11}$ ;  $P_{22} \perp R_{21}$ ; 基点位于  $R_{14}$  与  $R_{15}$  轴线的交点。图 9b 机构中  $R_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{21} \parallel R_{22} \parallel R_{31} \parallel R_{32} \parallel R_{41} \parallel R_{42}$ ;  $R_{13} \parallel R_{23} \parallel R_{33} \parallel R_{43}$ ;  $R_{13}$  与  $R_{23}$  轴线共线且基点取在轴线上。

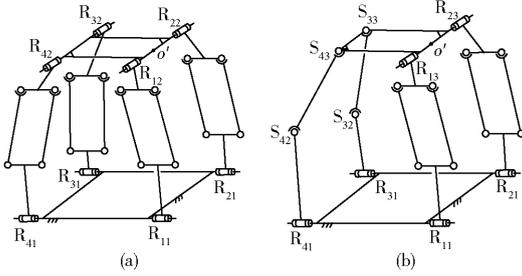


图 8 HSOC-(2) 的两种 (2T-2R) PM

Fig. 8 Two types of (2T-2R) PM structure composed by HSOC-(2)

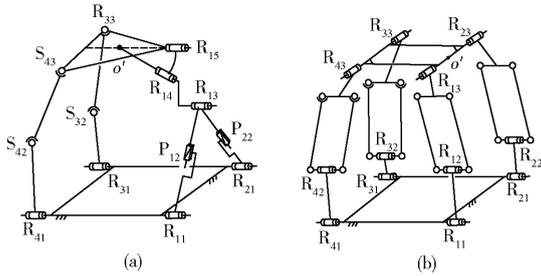


图 9 HSOC-(3) 及 HSOC-(5) 的 (2T-2R) PM

Fig. 9 (2T-2R) PM structure composed by HSOC-(3) and HSOC-(5)

(6) 按表 4 中第 12、13 组合方案综合出的并联机构,如图 10 所示,其中,图 10a 定平台上 4 个 R 副平行,动平台上 4 个 R 副也平行,基点位于动平台两 R 副共线轴线上。图 10b 中  $R_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{22}; R_{13} \perp R_{11}; R_{13}$  与  $R_{23}$  轴线共线且基点取在轴线上。

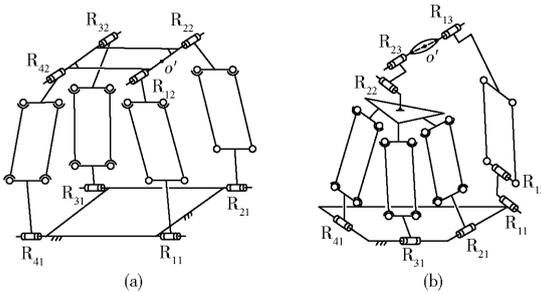


图 10 HSOC-(6) 及 HSOC-(7) 的 (2T-2R) PM

Fig. 10 (2T-2R) PM structure composed by HSOC-(6) and HSOC-(7)

(7) 按表 4 中第 14 组合方案综合出的并联机构,如图 11 所示,其中  $R_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13} \parallel R_{21} \parallel R_{22} \parallel R_{23} \parallel R_{32}; R_{14} \parallel R_{24} \parallel R_{33}; R_{14}$  与  $R_{24}$  轴线共线且基点取在轴线上。它由 WANG 等<sup>[21]</sup> 提出,该机构具有较强的转动能力。

(8) 按表 4 中第 15 组合方案综合出的并联机构,如图 12 所示,其中  $R_{11} \parallel R_{13} \parallel R_{21} \parallel R_{31} \parallel R_{32} \parallel R_{41} \parallel R_{42}; P_{12} \perp R_{11}; P_{22} \perp R_{21}; R_{14}, R_{15}, R_{33}, R_{34}, R_{43}, R_{44}$  的轴线交于一点且为基点。

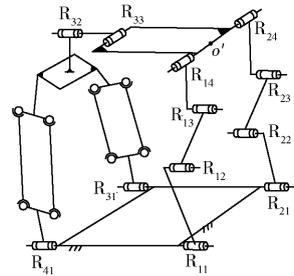


图 11 HSOC-(8) 的 (2T-2R) PM

Fig. 11 (2T-2R) PM structure composed by HSOC-(8)

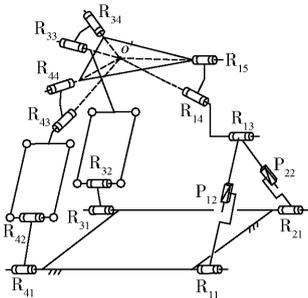


图 12 HSOC-(9) 的 (2T-2R) PM

Fig. 12 (2T-2R) PM structure composed by HSOC-(9)

### 2.5 选定机构驱动副

对于自由度为  $F$  的机构,在判定其驱动副时<sup>[10]</sup>,可将预定的  $F$  个运动副锁死,此时得到的新机构的自由度若为 0,则该  $F$  个运动副可同时为机构的驱动副,否则,该  $F$  个运动副不能同时为机构的驱动副。

以图 4a 为例,判定该机构定平台上的 4 个 R 副是否可为驱动副。

#### (1) 确定支路拓扑结构

将定平台的 4 个 R 副 ( $R_{11}, R_{21}, R_{31}, R_{41}$ ) 锁死,得到新的并联机构,其支路拓扑结构为

$$SOC \{ -R_j \parallel R_j - R_j - \} \quad (j=1,2,3,4)$$

#### (2) 确定支路的 POC 集

由式(1)可得,当基点取在末端 R 副轴线上时,该支路的 POC 集为

$$M_{b_j} = \begin{bmatrix} t^2 (\perp \diamond (R_j, R_j)) \\ r^2 (\parallel \diamond (R_j, R_j)) \end{bmatrix} \quad (j=1,2)$$

基点取在周线外位置时,该支路的 POC 集为

$$M_{b_j} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 (\parallel \diamond (R_j, R_j)) \end{bmatrix} \quad (j=3,4)$$

#### (3) 确定新机构的自由度

将各支路末端 POC 集代入式(4),并由式(1)、(2)可得

$$\xi_{L_1} = \dim \{ M_{b_1} \cup M_{b_2} \} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^2 (\perp \diamond (R_{13}, R_{14})) \\ r^2 (\parallel \diamond (R_{13}, R_{14})) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2 (\perp \diamond (R_{23}, R_{24})) \\ r^2 (\parallel \diamond (R_{23}, R_{24})) \end{bmatrix} \right\} = 4$$

$$\xi_{L_2} = \dim \{ (M_{b_1} \cap M_{b_2}) \cup M_{b_3} \} =$$

$$\dim \left\{ \left[ \begin{matrix} t^2(\perp \diamond (R_{13}, R_{14})) \\ t^2(\parallel \diamond (R_{13}, R_{14})) \end{matrix} \right] \cup \left[ \begin{matrix} t^2(\perp \diamond (R_{33}, R_{34})) \\ t^2(\parallel \diamond (R_{33}, R_{34})) \end{matrix} \right] \right\} = 4$$

$$\xi_{L_3} = \dim \left\{ \left( \bigcap_{j=1}^3 M_{b_j} \right) \cup M_{b_4} \right\} =$$

$$\dim \left\{ \left( \bigcap_{j=1}^3 \left[ \begin{matrix} t^2(\perp \diamond (R_{13}, R_{14})) \\ t^2(\parallel \diamond (R_{13}, R_{14})) \end{matrix} \right] \right) \cup \left[ \begin{matrix} t^2(\perp \diamond (R_{43}, R_{44})) \\ t^2(\parallel \diamond (R_{43}, R_{44})) \end{matrix} \right] \right\} = 4$$

将  $\xi_{L_j}$  代入式(4), 得到新机构自由度为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} = 12 - (4 + 4 + 4) = 0$$

(4) 由于新机构的自由度为 0, 可得定平台上

4 个 R 副 ( $R_{11}, R_{21}, R_{31}, R_{41}$ ) 可为 4 个驱动副, 即满足设计要求。

类似地, 可用同样方法, 判定图 4~12 所示并联机构的驱动副, 都为定平台上 4 个 R 副, 也都满足设计要求。

以上为本文综合出的 15 种 2T2R 机构, 详见表 5, 其中带 \* 的机构为本文首次提出的新机构。

### 3 2T2R 并联机构的拓扑结构分类

#### 3.1 拓扑结构分类

综上所述, 现依据支路结构和动平台数目, 对综合出的 15 种 2T2R 机构 (其中 10 种为新型的 2T2R 机构) 进行如下机构类型分类, 详见表 5。

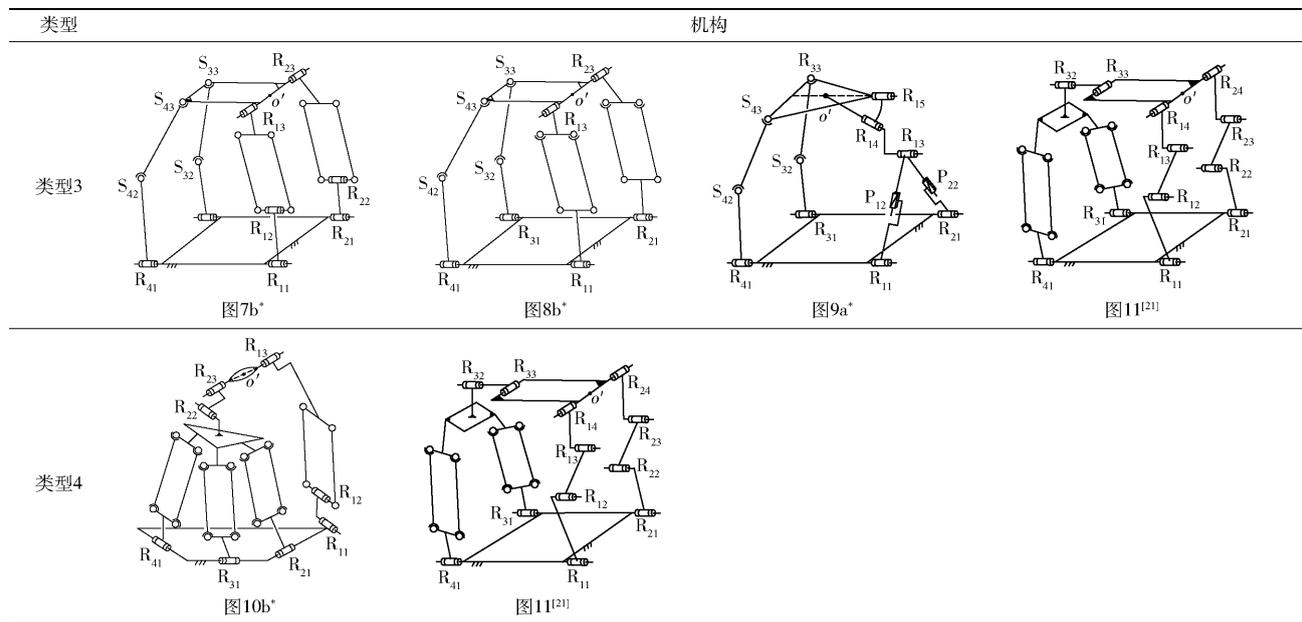
其中①皆由简单支路构成的机构 (类型 1) 有

表 5 (2T-2R) PM 的 4 种类型

Tab. 5 Four types of (2T-2R) PM

类型	机构			
类型 1	<p>图4a<sup>[10]</sup></p>	<p>图4b*</p>	<p>图5a<sup>[10]</sup></p>	<p>图5b<sup>[20]</sup></p>
类型 2	<p>图6<sup>[16]</sup></p>	<p>图7a*</p>	<p>图8a*</p>	<p>图9b*</p>
	<p>图10a*</p>	<p>图10b*</p>	<p>图11*</p>	<p>图12*</p>

续表 5



5 种;即表 4 中序号 1~5。②皆由复杂支路构成的机构(类型 2)有 6 种:即表 4 中序号 6、8、11、12、13、15。③由简单支路复杂支路共同构成的机构(类型 3)有 4 种:即表 4 中序号 7、9、10、14。④单动平台的机构有 13 种:即表 4 中序号 1~12 及序号 15;双动平台的机构(类型 4)有 2 种:即表 4 中序号 13、14。

### 3.2 拓扑特征分析

为优选具有实用价值的机构,根据文献[10]中提出的拓扑特征计算方法,对表 5 中的 15 种 2T2R 机构进行拓扑特征分析,得到其所包含的基本运动链(BKC)、耦合度( $\kappa$ )、自由度类型和运动解耦性,详见表 6。

表 6 (2T-2R) PMs 的拓扑特征

Tab. 6 Topology structure characteristics of (2T-2R) PM

序号	PM	$M_{Pa},$ $\text{Dim}\{M_{Pa}\}$	DOF	消极 运动副	驱动副 位置	包含的 BKC[ $\nu, \kappa$ ]	自由度 类型	运动解耦	支路结构		
1	图 4a <sup>[10]</sup>								相同		
2	图 4b										
3	图 5a <sup>[10]</sup>										
4	图 5b <sup>[20]</sup>								两种结构		
5	图 6 <sup>[16]</sup>					BKC[ $\nu=3, \kappa=2$ ]					
6	图 7a						完全自由度	不解耦	相同		
7	图 7b								两种结构		
8	图 8a	$\begin{bmatrix} 1^2 \\ 1^2 \end{bmatrix}, 4$	4	0	定平台				相同		
9	图 8b										
10	图 9a								BKC[ $\nu=2, \kappa=1$ ]		
11	图 9b					BKC[ $\nu=3, \kappa=2$ ]					
12	图 10a										
13	图 10b					BKC <sub>1</sub> [ $\nu=2, \kappa=1$ ] BKC <sub>2</sub> [ $\nu=1, \kappa=0$ ]	部分自由度	部分解耦	两种结构		
14	图 11 <sup>[21]</sup>										
15	图 12					BKC[ $\nu=2, \kappa=1$ ]	完全自由度	不解耦			

(1)耦合度是衡量机构复杂程度的一种拓扑不变量,对于耦合度为 1 的机构,一般可用一维搜索法得到位置问题的全部实数解。表 6 中,耦合度为 1 的机构为序号 10、14、15,其中,序号 10 与序号 15 为本文设计的新机构,而本文参考文献中列举的,为已

有的其他构型(序号 1、3、4、5),它们的耦合度为 2,其机构较为复杂。本文所提新机构与之相比,优点为:耦合度仅为 1,机构结构较为简单,较易处理运动学与动力学问题。

(2)运动输入-输出解耦可使机构运动学分析

较为简单,又能简化机器人的控制问题,因此,实现运动输入-输出解耦是机构拓扑结构设计的重要目标之一。表6中,部分解耦且具有部分自由度的机构为序号13,该机构为本文设计的新机构,其包含两个BKC,且耦合度分别为1和0,而本文参考文献中列举的,已有的其他构型(序号1、3、4、5、14),它们仅包含一个BKC,具有完全自由度,且不解耦。

## 4 结论

(1)基于拓扑等效替代的复杂支路型综合方法,提出了5种HSOC新构型支链。

(2)基于POC方程的并联机构结构综合方法,结合综合出的新型HSOC支链结构,给出了15种2T2R并联机构构型,其中,5种是已有机器人构型,其余10种是具有实用价值的新构型。

(3)依据拓扑结构特性,对综合出的2T2R机构进行分类,其中,皆由简单支路构成的机构5种,皆由复杂支路构成的机构6种,由简单支路、复杂支路共同构成的机构4种;单动平台的机构13种,双动平台的机构2种。进一步对综合出的15种机构进行拓扑特征分析,计算其耦合度、自由度类型和运动解耦性,筛选出结构较简单、耦合度为1的机构以及较易于控制的部分解耦机构。

## 参 考 文 献

- HUNT K H. Kinematic geometry of mechanisms[M]. Oxford: Clarendon Press, 1978.
- HUANG Zhen, LI Qinchuan. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint-synthesis method[J]. International Journal of Robotics Research, 2003, 22(1): 55-79.
- KONG X, GOSELIN C M. Type synthesis of parallel mechanisms[J]. Springer Tracts in Advanced Robotics, 2007, 33: 66-70.
- HERVE J M. Analyse structurelle des mecanismes parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 1978, 13: 437-450.
- LI Qinchuan, HUANG Zhen, HERVE J M. Type synthesis of 3R2T 5-DOF parallel mechanisms using the lie group of displacements[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2004, 20(2): 173-180.
- GOGU G. Structural synthesis of fully-isotropic translational parallel robots via theory of linear transformations[J]. European Journal of Mechanics Solids, 2004, 23(6): 1021-1039.
- GOGU G. Structural synthesis of fully-isotropic parallel robots with Schonflies motions via theory of linear transformations and evolutionary morphology[J]. European Journal of Mechanics, 2007, 26(2): 242-269.
- 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京:机械工业出版社,2004.
- 沈惠平,孙驰宇,朱小蓉,等. 以基本运动链为单元的并联机构拓扑结构设计[J/OL]. 农业机械学报, 2015, 46(12): 337-345. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?flag=1&file\\_no=20151246&journal\\_id=jcsam](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20151246&journal_id=jcsam). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.12.046.
- SHEN Huiping, SUN Chiyu, ZHU Xiaorong, et al. Topology structure design of parallel mechanisms based on kinematic chains [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(12): 337-345. (in Chinese)
- 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社,2012.
- 杨廷力,刘安心,沈惠平,等. 基于方位特征方程的3T1R并联机构的拓扑结构综合[J]. 机械工程学报, 2017, 53(21): 54-64. YANG Tingli, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. Topological structural synthesis of 3T1R parallel mechanism based on POC equations [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(21): 54-64. (in Chinese)
- YANG Tingli, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. Topology design of robot mechanism [M]. Springer Press, 2018.
- 刘辛军,谢福贵,王立平,等. 一种可实现SCARA运动的四自由度单动平台并联机构201210435375.1[P]. 2012-11-02.
- KRUT S, COMPANY O, BENOIT M, et al. I4: a new parallel mechanism for scara motions [C]//IEEE International Conference on Robotics & Automation, 2008, 2(2): 1875-1880.
- 陈海,曹毅,秦友蕾,等. 基于螺旋理论的2T2R完全解耦并联机构构型综合[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2016, 42(3): 406-413. CHEN Hai, CAO Yi, QIN Youlei, et al. Structure synthesis of fully-decoupled 2T2R parallel mechanisms based on screw theory [J]. Journal of Donghua University (Natural Science), 2016, 42(3): 406-413. (in Chinese)
- KUMAR N, PCCIN O, BAYLE B, et al. A task-based type synthesis of novel 2T2R parallel mechanisms [J]. Mechanism & Machine Theory, 2014, 77(7): 59-72.
- YOON J, RYU J. A new family of hybrid 4-DOF parallel mechanisms with two platforms and its application to a footpad device [J]. Journal of Robotics Research, 2003, 22(9): 717-732.
- MERLET J P. Les robots parallèles[M]. 2nd ed. Paris: Hermès, 1997: 31-63.
- LI Qinchuan, HUANG Zhen. Type synthesis of 4-DOF parallel manipulators [C]//Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Taipei, 2003: 755-760.
- FAN Caixia, LIU Hongzhao, ZHANG Yanbin, et al. Type synthesis of 2T2R, 1T2R and 2R parallel mechanisms [J]. Mechanism & Machine Theory, 2013, 61(1): 184-190.
- WANG Congzhe, FANG Yuefa, FANG Hairong, et al. Novel 2R3T and 2R2T parallel mechanisms with high rotational capability [J]. Robotica, 2017, 35(2): 401-418.