doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.11.048

计及重力的 3 - RRS 并联机构静刚度分析

汪满新[1]　谌秋生[1]　祖　莉[1]　刘海涛[2]

(1. 南京理工大学机械工程学院, 南京 210094; 2. 天津大学机构理论与装备设计教育部重点实验室, 天津 300072)

摘要: 研究重力场作用下 3 - RRS 并联机构半解析静刚度建模方法。建模中同时考虑运动部件重力和末端外载荷对关节反力的影响,以及支链分布重力和所有构件/铰链弹性对关节变形的影响,并基于各部件在关节空间中的刚度模型建立机构末端静刚度模型。通过算例得到 3 - RRS 并联机构末端静刚度和重力引起的末端变形在工作空间的分布规律;通过研究各构件刚度和重力分别对末端静刚度和变形的影响,得出为实现轻质高刚的结构设计应从球副和转动副刚度相匹配、主动臂和从动臂的驱动和约束刚度相匹配以及动平台轻量化设计等方面入手。

关键词: 静刚度分析; 并联机构; 重力影响

中图分类号: TH112　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2018)11-0392-11

Stiffness Analysis of 3 - RRS Parallel Mechanism with Consideration of Gravity

WANG Manxin[1]　CHEN Qiusheng[1]　ZU Li[1]　LIU Haitao[2]

(1. *School of Mechanical Engineering*, *Nanjing University of Science and Technology*, *Nanjing* 210094, *China*
2. *Key Laboratory of Mechanism Theory and Equipment Design*, *Ministry of Education*, *Tianjin University*, *Tianjin* 300072, *China*)

Abstract: Stiffness is one of the most important performance factors that should be considered for parallel mechanism. A semi-analytical approach for the stiffness analysis of a 3 - RRS parallel mechanism was presented with consideration of gravity. The force analysis was carried out by taking both gravity of all moving components and the externally applied wrench imposed upon the platform into account. The deflection analysis that considered the distributed gravity of all limbs and joint/link compliances was investigated. On the basis of the formulation of component stiffness matrices in the joint space, the stiffness model of the parallel mechanism was achieved. Based on a numerical example, the stiffness distributions and deflection distributions induced by gravity throughout the entire task workspace were evaluated, and the contributions of the component stiffness to the global stiffness and the contributions of the components gravity to platform deflection were investigated. Meanwhile, the effectiveness of the proposed modeling approach was verified by the FEA software at a typical configuration. Numerical example showed that in order to make the parallel mechanism with lightweight yet rigid design, the rigidities of different components, as well as the actuated and constraint rigidities of each component should be matched each other. For the considered 3 - RRS parallel mechanism, the rigidity of the spherical joint should be improved while the rigidity of the revolute joint should be reduced, the actuated rigidity of the limb should be enhanced while the constraint rigidities of that should be reduced.

Key words: stiffness analysis; parallel mechanism; gravitational effect

0　引言

并联机构因具有刚度大、结构稳定、承载能力强、精度高、运动惯性小、实时控制性好等特点而得到广泛应用[1],特别是 1T2R 3 自由度并联机构[2-6],如 Z3 主轴头中 3 - PRS 并联机构[3],Tricept、Exechon 以及 TriVariant 等混联机器人中的 3 自由度并联模块[4-6],已在飞机大部件加工与自

收稿日期: 2018-06-13　修回日期: 2018-07-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(51605225)、机械系统与振动国家重点实验室项目(MSV201812)和中央高校基本科研业务费专项资金项目(309171B8808、30915118830)

作者简介: 汪满新(1987—),男,讲师,博士,主要从事机构学与机器人学研究,E-mail: mxwang@njust.edu.cn

动钻铆、机身与机翼对接面现场加工、汽车发动机缸体销孔过盈装配以及大型钢结构相贯线切割等方面得到应用。

静刚度可表征机构在外载荷作用下抵抗变形的能力，是并联机构最重要的性能之一，因而常常被作为评价机构性能以及机构结构参数优化设计的指标。基于刚度优化设计的先决条件是构建精确的刚度模型。有限元法[7－8]、解析/半解析法[9－11]是目前刚度建模常用的两类方法。有限元法建模精度高，但仅能在指定位形下划分网格计算，无法预估机构全域刚度的变化规律，故多适用于校核最终设计。考虑到机构刚度随位形变化的特点，解析/半解析法是预估机构全域刚度的有效方法。在解析法建模方面，GOSSELIN[12]基于虚功原理提出了虚铰链法，该方法用一维弹簧来等效模拟机构主动关节弹性变形，建立了力与末端变形的映射模型；PASHKEVICH 等[13－14]将假想弹簧扩充到 6 维，以一类过约束并联机构为对象构建了计及被动关节弹性变形的刚度模型。为有效分离驱动刚度和约束刚度对机构末端刚度的贡献，许多学者利用旋量理论构造出全雅可比矩阵或广义雅可比矩阵用于并联机构的刚度建模中[15－21]，文献[15－16]利用上述方法分别建立了 3－PUU、3－RPS 并联机构的静刚度模型。此外，落海伟等[17]提出了一种基于子结构综合和静态凝聚技术的静刚度建模方法，并综合考虑了铰链和支链弹性对静刚度的贡献。

值得指出，传统的解析/半解析刚度建模大多未考虑重力场的影响，但实际中重力因会引起构件发生弹性变形而影响机构末端精度。文献[18－19]研究重力场刚度建模问题时将重力等效为集中力，这仅适用于将连杆视为刚体的场合。文献[20－21]基于变形协调条件研究了重力对过约束机构受力的影响。文献[22－23]计及了运动部件分布重力的影响，并考虑了各构件/铰链的柔度分别构造了 3－SPR 及 3－RPS 并联机构的静柔度模型，所建模型建立了零部件弹性和重力与末端变形之间的映射关系，进而为有针对性改进设计提供了一种有效手段。

本文沿用文献[22]的建模思路，研究 3－RRS 并联机构半解析静刚度建模问题，并揭示机构末端静刚度和重力所引起的末端变形在全域工作空间的分布规律，以及不同零部件弹性和重力对末端静刚度和变形的影响，旨在为这类机构的机械结构设计提供理论依据。

1　系统简介与位置逆解

图 1 为 3－RRS 并联机构的实体造型，由机架、动平台及 3 条结构相同的 RRS 支链组成，在此 R 和 S 分别表示转动副和球副，R 表示主动转动副。在 R 副驱动下，动平台可沿 z 轴移动及绕 x 和 y 轴转动。

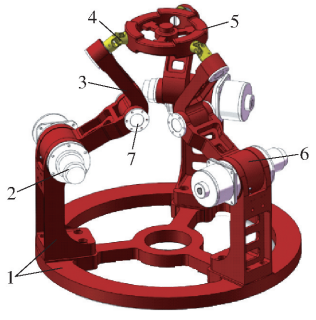


图 1　3－RRS 三维模型

Fig. 1　3D model of 3－RRS parallel mechanism

1. 机架　2. 转动副 R　3. 从动臂　4. 球副 S　5. 动平台　6. 主动臂　7. 转动副 R

图 2 所示为 3－RRS 并联机构的结构简图，图中点 B_i 和 A_i($i=1,2,3$)分别为支链 i 中 R 副中心和 S 副中心，它们分别构成等边三角形 $\triangle B_1B_2B_3$ 和 $\triangle A_1A_2A_3$，P_i 为 R 副中心。在 $\triangle B_1B_2B_3$ 和 $\triangle A_1A_2A_3$ 的中心点上分别建立固定参考系 $\{R\}$ 和连体系 $\{R'\}$，且满足 $y \perp B_1B_2$，$z \perp \triangle B_1B_2B_3$，$y' \perp A_1A_2$，$z' \perp \triangle A_1A_2A_3$。

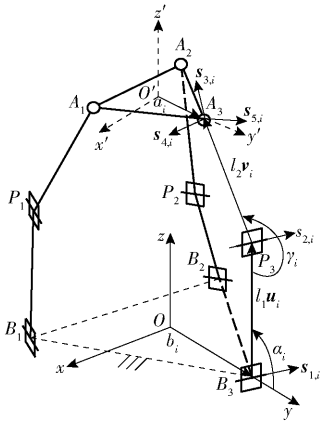


图 2　3－RRS 并联机构结构简图

Fig. 2　Schematic diagram of 3－RRS parallel manipulator

系 $\{R'\}$ 相对于系 $\{R\}$ 姿态矩阵 $\boldsymbol{R}$ 可根据 $z-x-z$ 旋转变换，用进动角 ψ、章动角 θ 与自旋角 ϕ 表示为

$$\boldsymbol{R}=\mathrm{Rot}(z,\psi)\,\mathrm{Rot}(x',\theta)\,\mathrm{Rot}(z'',\phi)=\begin{bmatrix} C\psi C\phi-S\psi C\theta S\phi & -C\psi S\phi-S\psi C\theta C\phi & S\psi S\theta \\ S\psi C\phi+C\psi C\theta S\phi & -S\psi S\phi+C\psi C\theta C\phi & -C\psi S\theta \\ S\theta S\phi & S\theta C\phi & C\theta \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中,S 表示 sin,C 表示 cos。

将球副看成由轴线相交于一点的 3 个转动副串联组成,并令 $\boldsymbol{s}_{j,i}$表示支链 i 中第 j 个运动副的单位矢量,由关节轴线间关系可得约束 $\boldsymbol{s}_{1,i}/\!/\boldsymbol{s}_{2,i}$,$\boldsymbol{s}_{2,i}\perp\boldsymbol{s}_{3,i}$,$\boldsymbol{s}_{3,i}\perp\boldsymbol{s}_{5,i}$,$\boldsymbol{s}_{5,i}\perp\boldsymbol{s}_{4,i}$($i=1,2,3$)。

此外,为了描述各构件的姿态,建立如图 3 所示连体参考坐标系$\{R_{j,i}\}$($i=1,2,3;j=1,2,3$)。

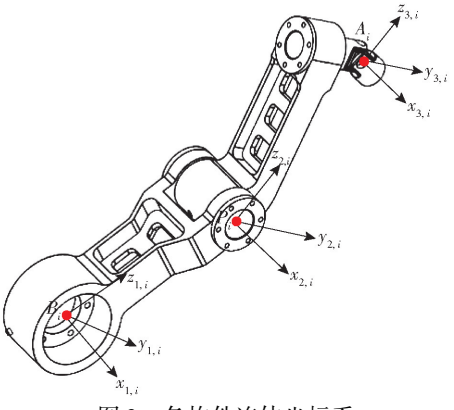


图 3 各构件连体坐标系

Fig. 3 Body fixed frames of each components

(1) $\{R_{1,i}\}$为主动臂连体坐标系,以 B_i 点为原点,轴 $z_{1,i}$方向由 B_i 指向 P_i,轴 $x_{1,i}$与 $\boldsymbol{s}_{1,i}$重合。

(2) $\{R_{2,i}\}$为从动臂连体坐标系,以 P_i 点为原点,轴 $z_{2,i}$方向由 P_i 指向 A_i,轴 $x_{2,i}$与 $\boldsymbol{s}_{2,i}$重合。

(3) $\{R_{3,i}\}$以 A_i 为原点,且与系$\{R_{2,i}\}$相平行。

为建立 3 - $\underline{\text{R}}$RS 并联机构的半解析静刚度模型,需先对机构作位置逆解分析,其可归结为给定机构尺度参数和参考点 O'的位矢 $\boldsymbol{r}$,确定各支链 $\underline{\text{R}}$ 副转角。如图 2 所示,点 O'在参考系$\{R\}$中的位矢$\boldsymbol{r}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}_i+l_1\boldsymbol{u}_i+l_2\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{a}_i\quad(i=1,2,3)\tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{b}_i$——由点 O 到 B_i 的位置矢量

$\boldsymbol{a}_i$——由点 O'到 A_i 的位置矢量

$\boldsymbol{u}_i$——由点 B_i 到 P_i 的位置矢量

$\boldsymbol{v}_i$——由点 P_i 到 A_i 的位置矢量

其中 $\boldsymbol{b}_i=b\boldsymbol{s}_i\quad\boldsymbol{a}_{i0}=a\boldsymbol{s}_i\quad\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_{i0}$

$$b=l_{OB_1}=l_{OB_2}=l_{OB_3}\quad a=l_{O'A_1}=l_{O'A_3}=l_{O'A_3}$$

$$l_1=l_{P_1B_1}=l_{P_2B_2}=l_{P_3B_3}\quad l_2=l_{P_1A_1}=l_{P_2A_2}=l_{P_3A_3}$$

$$\boldsymbol{s}_i=(\cos\beta_i,\sin\beta_i,0)^{\mathrm{T}}\quad\beta_i=\frac{\pi}{2}-i\frac{2\pi}{3}$$

$$\boldsymbol{u}_i=(\cos\alpha_i\cos\beta_i,\cos\alpha_i\sin\beta_i,\sin\alpha_i)^{\mathrm{T}}$$

式中 α_i——B_iP_i 相对于 OB_i 的转角

β_i——OB_i 相对于 x 轴的转角

注意到 $\boldsymbol{s}_{1,i}\perp\boldsymbol{b}_i$,$\boldsymbol{s}_{1,i}\perp\boldsymbol{u}_i$,$\boldsymbol{s}_{1,i}\perp\boldsymbol{v}_i$,对式(2)两端同时点乘 $\boldsymbol{s}_{1,i}$,可得

$$(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_{1,i}=0\quad(i=1,2,3)\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{s}_{1,i}=(-\sin\beta_i,\cos\beta_i,0)^{\mathrm{T}}$

选取(z,ψ,θ)作为 3 - $\underline{\text{R}}$RS 并联机构独立输出参数,求解式(3)可得

$$\begin{cases}x=a\sin\psi\cos\psi(\cos\theta-1)\\ y=\dfrac{a}{2}(\cos\psi-\sin\psi)(\cos\psi+\sin\psi)(\cos\theta-1)\\ \phi=-\psi\end{cases}\tag{4}$$

至此,可通过式(4)解出参数(x,y,ϕ),从而可解出 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{a}_i$。由式(2)可得

$$|\boldsymbol{m}_i-l_1\boldsymbol{u}_i|^2=l_2^2\tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{m}_i=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b}_i+\boldsymbol{a}_i=[m_{1x}\quad m_{1y}\quad m_{1z}]^{\mathrm{T}}$

展开式(5)可得

$$-2l_1m_{iz}\sin\alpha_i-2l_1(m_{ix}\cos\beta_i+m_{iy}\sin\beta_i)\cos\alpha_i+|\boldsymbol{m}_i|^2+l_1^2-l_2^2=0\tag{6}$$

求解式(6)可得

$$\alpha_i=2\arctan\frac{A_i+M_i\sqrt{A_i^2+B_i^2-C_i^2}}{B_i-C_i}\tag{7}$$

其中 $B_i=-2l_1m_{ix}\cos\beta_i-2l_1m_{iy}\sin\beta_i$

$A_i=-2l_1m_{iz}\quad C_i=|\boldsymbol{m}_i|^2+l_1^2-l_2^2\quad M_i=\pm1$

M_i 可依据机构初始位型唯一确定,从而可进一步求出 $\boldsymbol{u}_i$ 及

$$\boldsymbol{v}_i=\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b}_i-l_1\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{a}_i}{l_2}\tag{8}$$

2 静刚度建模

注意到动、静平台的刚性远大于支链体各部件的刚性,故可作刚体处理,此外,在建模过程中,将计及支链体各部件弹性及所有运动部件的重力。

2.1 力分析

力分析目的在于建立末端动平台上的外载荷及运动部件重力与关节反力间的映射关系。如图 4 所示为末端动平台受力示意图,通过对点 O'取矩,可建立平衡方程

$$\boldsymbol{f}-mg\hat{\boldsymbol{z}}=\sum_{i=1}^{3}(f_{x_3,i}^A\boldsymbol{s}_{1,i}+f_{y_3,i}^A\boldsymbol{n}_i+f_{z_3,i}^A\boldsymbol{v}_i)$$

$$\boldsymbol{\tau}-(l_m\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{z}})(-mg\hat{\boldsymbol{z}})=\sum_{i=1}^{3}[f_{x_3,i}^A(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{s}_{1,i})+f_{y_3,i}^A(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{n}_i)+f_{z_3,i}^A(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{v}_i)]\tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{n}_i=\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{s}_{1,i}\quad\hat{\boldsymbol{z}}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$

式中 $\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{\tau}$——外力和外力矩

m——动平台质量

l_m——点 O'到动平台质心的距离

$\hat{\boldsymbol{z}}$——沿坐标轴 z 的单位矢量,与重力场方向相反

$f_{x_3,i}^A$ $f_{y_3,i}^A$ $f_{z_3,i}^A$——点 A_i 处沿坐标轴 $x_{3,i}$、$y_{3,i}$和 $z_{3,i}$的关节反力

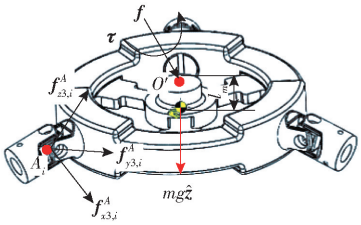


图 4　动平台受力图

Fig. 4　Free body diagram of moving platform

显见，式(9)所要求解未知数个数为 9 但独立方程个数仅为 6，无法求解，为解决该问题，以图 5 所示从动臂为研究对象作力分析，对点 P_i 取矩可得静力平衡方程

$$\boldsymbol{\tau}^P_{y_2,i}\boldsymbol{n}_i+\boldsymbol{\tau}^P_{z_2,i}\boldsymbol{v}_i-(q_{2,i}\boldsymbol{v}_i+t_{2,i}\boldsymbol{n}_i)(-m_{2,i}g\hat{\boldsymbol{z}})=f^A_{y3,i}(l_2\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{n}_i)+f^A_{x3,i}(l_2\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{s}_{1,i}) \tag{10}$$

式中　$\boldsymbol{\tau}^P_{y_2,i}$、$\boldsymbol{\tau}^P_{z_2,i}$——点 P_i 处绕 $y_{2,i}$ 和 $z_{2,i}$ 轴的反力矩

$m_{2,i}$——从动臂质量

$q_{2,i}(t_{2,i})$——从动臂重心到点 P_i 的位置矢量沿 $\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{n}_i)$ 方向的投影

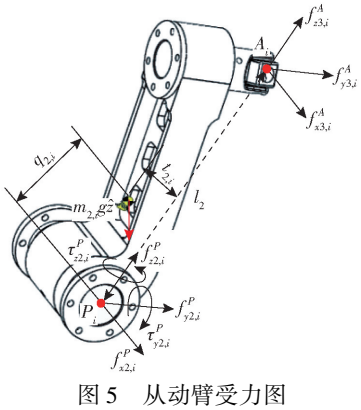


图 5　从动臂受力图

Fig. 5　Free body diagram of driven link

对式(10)两端同时点积 $\boldsymbol{s}_{2,i}$，得

$$f^A_{y3,i}=\frac{m_{2,i}g}{l_2}(q_{2,i}\boldsymbol{n}_i-t_{2,i}\boldsymbol{v}_i)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{z}}\quad(i=1,2,3) \tag{11}$$

将式(11)代入式(9)并写成矩阵形式，得

$$\hat{\boldsymbol{\$}}_w=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}_w \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{J}=[\boldsymbol{J}_a^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{J}_c^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{J}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\\ \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{v}_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{J}_c=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_{1,1} & \boldsymbol{s}_{2,1} & \boldsymbol{s}_{3,1}\\ \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{s}_{1,1} & \boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{s}_{2,1} & \boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{s}_{3,1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\$}}_w=\hat{\boldsymbol{\$}}_{w,G_{O'}}+\hat{\boldsymbol{\$}}_{w,G_{L_2}}+\hat{\boldsymbol{\$}}_{w,F}\qquad\hat{\boldsymbol{\$}}_{w,F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{\tau}\end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\$}}_{w,G_{O'}}=-mg\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{z}}\\ -l_m\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{z}}\end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\$}}_{w,G_{L_2}}=\sum_{i=1}^{3}\left(-\frac{m_{2,i}g}{l_2}(q_{2,i}\boldsymbol{n}_i-t_{2,i}\boldsymbol{v}_i)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{z}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_i\\ \boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{n}_i\end{bmatrix}\right)$$

$$\boldsymbol{\rho}_w=(\boldsymbol{\rho}_{wa}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{\rho}_{wc}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\qquad\boldsymbol{\rho}_{wa}=(\rho_{wa,1},\rho_{wa,2},\rho_{wa,3})^{\mathrm{T}}$$

$$\rho_{wa,i}=f^A_{z3,i}\qquad\boldsymbol{\rho}_{wc}=(\rho_{wc,1},\rho_{wc,2},\rho_{wc,3})^{\mathrm{T}}$$

$$\rho_{wc,i}=f^A_{x3,i}$$

式中　$\boldsymbol{J}$——机构的广义雅可比矩阵[24]

$\boldsymbol{J}_a$、$\boldsymbol{J}_c$——驱动和约束雅可比矩阵

$\boldsymbol{\rho}_w$——界面力矢量

$\boldsymbol{\rho}_{wa}$、$\boldsymbol{\rho}_{wc}$——界面驱动和约束力矢量

$\hat{\boldsymbol{\$}}_w$——$A_i$ 坐标系下施加在动平台点 O' 的等效合外力旋量

$\hat{\boldsymbol{\$}}_{w,F}$——由外载荷产生的外力旋量

$\hat{\boldsymbol{\$}}_{w,G_{O'}}$、$\hat{\boldsymbol{\$}}_{w,G_{L_2}}$——由动平台重力、从动臂重力产生的外力旋量

故式(12)表示的物理意义为：施加在动平台上的等效外载荷应由作用在其上的所有支链界面驱动力和界面约束力共同承担。

2.2　变形分析

3－RRS 并联机构的变形分析在于构建动平台末端变形旋量与关节变形间的映射关系。由速度合成原理，易得

$$\delta\boldsymbol{r}_{O'}+\delta\boldsymbol{\alpha}_{O'}\boldsymbol{a}_i=\delta^A_{x_3,i}\boldsymbol{s}_{1,i}+\delta^A_{y_3,i}\boldsymbol{n}_i+\delta^A_{z_3,i}\boldsymbol{v}_i \tag{13}$$

式中　$\delta\boldsymbol{r}_{O'}$、$\delta\boldsymbol{\alpha}_{O'}$——末端参考点 O' 的线变形矢量、动平台的角变形矢量

$\delta^A_{z_3,i}$、$\delta^A_{x_3,i}$——由支链体装配体弹性变形在点 A_i 产生的沿驱动和约束方向的线变形量

$\delta^A_{y_3,i}$——为了协调点 A_i 处的变形而产生的沿 $\boldsymbol{n}_i$ 方向的微小位移

对式(13)两端分别点乘 $\boldsymbol{v}_i$ 和 $\boldsymbol{s}_{1,i}$，得

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{r}_{O'}+(\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{v}_i)^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\alpha}_{O'}=\delta^A_{z_3,i}\\ \boldsymbol{s}_{1,i}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{r}_{O'}+(\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{s}_{1,i})^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\alpha}_{O'}=\delta^A_{x_3,i}\end{cases}\quad(i=1,2,3) \tag{14}$$

将式(14)改写成矩阵形式，得

$$\boldsymbol{J}\hat{\boldsymbol{\$}}_t=\boldsymbol{\rho}_t \tag{15}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\$}}_t=((\delta\boldsymbol{r}_{O'})^{\mathrm{T}},(\delta\boldsymbol{\alpha}_{O'})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\rho}_t=(\boldsymbol{\rho}_{ta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\rho}_{tc}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\qquad\boldsymbol{\rho}_{ta}=(\rho_{ta,1},\rho_{ta,2},\rho_{ta,3})^{\mathrm{T}}$$

$$\rho_{ta,i}=\delta^A_{z_3,i}\qquad\boldsymbol{\rho}_{tc}=(\rho_{tc,1},\rho_{tc,2},\rho_{tc,3})^{\mathrm{T}}$$

$$\rho_{tc,i}=\delta^A_{x_3,i}$$

$$\boldsymbol{\rho}_{ta}=\boldsymbol{\rho}'_{ta}+\boldsymbol{\rho}''_{ta}$$

$$\boldsymbol{\rho}'_{ta}=(\rho'_{ta,1},\rho'_{ta,2},\rho'_{ta,3})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\rho}''_{ta}=(\rho''_{ta,1},\rho''_{ta,2},\rho''_{ta,3})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\rho}_{tc}=\boldsymbol{\rho}'_{tc}+\boldsymbol{\rho}''_{tc}$$

$$\boldsymbol{\rho}'_{tc}=(\rho'_{tc,1},\rho'_{tc,2},\rho'_{tc,3})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\rho}''_{tc}=(\rho''_{tc,1},\rho''_{tc,2},\rho''_{tc,3})^{\mathrm{T}}$$

式中 $\boldsymbol{\rho}_t$——关节变形量

$\hat{\boldsymbol{\$}}_t$——由并联机构弹性引起的末端变形旋量

$\boldsymbol{\rho}_{ta}$、$\boldsymbol{\rho}_{tc}$——沿驱动、约束方向的关节变形量

$\rho'_{ta,i}(\rho'_{tc,i})$——由关节反力引起的关节变形量

$\rho''_{ta,i}(\rho''_{tc,i})$——在支链自身分布重力作用下而产生的关节变形量

将 RRS 支链中的部件按运动副的形式划分成下述 2 个子装配体：①子装配体 1：R 副和主动臂。②子装配体 2：R 副、从动臂及球副。则 $\boldsymbol{\rho}''_t$ 可进一步分解为

$$\boldsymbol{\rho}''_t = \sum_{n=1}^{2} \boldsymbol{\rho}''_{t,n} \tag{16}$$

其中
$$\boldsymbol{\rho}''_{t,n} = (\boldsymbol{\rho}''^{\mathrm{T}}_{ta,n}, \boldsymbol{\rho}''^{\mathrm{T}}_{tc,n})^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\rho}''_{ta,n} = (\rho''_{ta,1,n}, \rho''_{ta,2,n}, \rho''_{ta,3,n})^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\rho}''_{tc,n} = (\rho''_{tc,1,n}, \rho''_{tc,2,n}, \rho''_{tc,3,n})^{\mathrm{T}}$$

式中 $\rho''_{ta,i,n}$、$\rho''_{tc,i,n}$——子装配体 $n(n=1,2)$ 在其自身分布重力作用下引起的沿驱动和约束方向的关节变形量，其建模详见 2.5 节

2.3 静刚度建模

现基于 2.1 节与 2.2 节的力分析与变形分析，构造 3－RRS 并联机构的静刚度模型。假设各部件仅产生弹性变形，由胡克定理可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_{wa} = \overline{\boldsymbol{K}}_a \boldsymbol{\rho}'_{ta} \\ \boldsymbol{\rho}_{wc} = \overline{\boldsymbol{K}}_c \boldsymbol{\rho}'_{tc} \end{cases} \tag{17}$$

其中
$$\overline{\boldsymbol{K}}_a = \begin{bmatrix} k_{a,1} & & \\ & k_{a,2} & \\ & & k_{a,3} \end{bmatrix} \quad \overline{\boldsymbol{K}}_c = \begin{bmatrix} k_{c,1} & & \\ & k_{c,2} & \\ & & k_{c,3} \end{bmatrix}$$

式中 $\overline{\boldsymbol{K}}_a(\overline{\boldsymbol{K}}_c)$——关节空间中驱动(约束)刚度矩阵

$k_{a,i}(k_{c,i})$——A_i 点处产生单位变形量时所需驱动(约束)力 $f^A_{z3,i}(f^A_{x3,i})$，一般随位型变化而变化

假设 $\boldsymbol{J}$ 非奇异，将式(15)和(17)代入式(12)可得考虑运动部件重力时 3－RRS 并联机构的力与变形之间的映射模型

$$\hat{\boldsymbol{\$}}_t = \boldsymbol{K}^{-1} \hat{\boldsymbol{\$}}_w + \boldsymbol{J}^{-1} \boldsymbol{\rho}''_t \tag{18}$$

其中
$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \overline{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{J} \qquad \boldsymbol{\rho}''_t = [\boldsymbol{\rho}''^{\mathrm{T}}_{ta} \quad \boldsymbol{\rho}''^{\mathrm{T}}_{tc}]^{\mathrm{T}}$$
$$\overline{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{K}}_a & \\ & \overline{\boldsymbol{K}}_c \end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{K}$——3－RRS 并联机构静刚度矩阵

分析式(18)可得，3－RRS 并联机构末端所发生的变形由以下两部分组成：①末端点 O' 的等效外载荷引起的末端变形。②支链体在其自身分布重力作用下产生的变形从而引起的末端变形。此外，依据载荷的性质，式(18)还可分解为

$$\hat{\boldsymbol{\$}}_t = \hat{\boldsymbol{\$}}_{t,F} + \hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G} \tag{19}$$

其中
$$\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,F} = \boldsymbol{K}^{-1} \hat{\boldsymbol{\$}}_{w,F} \qquad \hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G} = \boldsymbol{K}^{-1} \hat{\boldsymbol{\$}}_{w,G} + \boldsymbol{J}^{-1} \boldsymbol{\rho}''_t$$
$$\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G} = \hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G_{O'}} + \hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G_{L_1}} + \hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G_{L_2}}$$
$$\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G_{O'}} = \boldsymbol{K}^{-1} \hat{\boldsymbol{\$}}_{w,G_{O'}} \qquad \hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G_{L_1}} = \boldsymbol{J}^{-1} \boldsymbol{\rho}''_{t,1}$$
$$\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G_{L_2}} = \boldsymbol{K}^{-1} \hat{\boldsymbol{\$}}_{w,G_{L_2}} + \boldsymbol{J}^{-1} \boldsymbol{\rho}''_{t,2}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,F}$——施加于末端点 O' 的外力旋量导致的末端变形旋量

$\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G}$——所有运动部件的重力产生的末端变形旋量

$\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G_{O'}}$——由动平台重力在动平台末端产生的变形旋量

$\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G_{L_1}}$、$\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G_{L_2}}$——子装配体 1 和子装配体 2 的重力在动平台末端产生的变形旋量

2.4 构造 $\overline{\boldsymbol{K}}_a$ 和 $\overline{\boldsymbol{K}}_c$

为快速构造 $\overline{\boldsymbol{K}}_a$ 和 $\overline{\boldsymbol{K}}_c$，现略去支链序号下标 i，如图 6 所示，假设支链体各部件刚度矩阵在其局部坐标系下 $\{R_j\}$ 的度量为

$$\boldsymbol{K}^D_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^D_{j,t} & \\ & \boldsymbol{K}^D_{j,r} \end{bmatrix} \tag{20}$$

其中
$$\boldsymbol{K}^D_{j,t} = \begin{bmatrix} k^D_{x_j} & & \\ & k^D_{y_j} & \\ & & k^D_{z_j} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{K}^D_{j,r} = \begin{bmatrix} k^D_{\alpha_j} & & \\ & k^D_{\beta_j} & \\ & & k^D_{\gamma_j} \end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{K}^D_{j,t}(\boldsymbol{K}^D_{j,r})$——线(角)刚度矩阵

$k^D_{x_j}$、$k^D_{y_j}$、$k^D_{z_j}$($k^D_{\alpha_j}$、$k^D_{\beta_j}$、$k^D_{\gamma_j}$)——沿(绕)x_j、y_j、z_j 轴的刚度系数

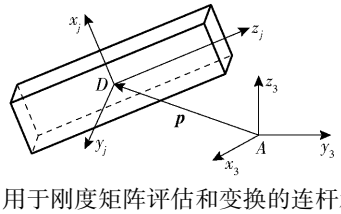


图 6 用于刚度矩阵评估和变换的连杆示意图

Fig. 6 Link model for stiffness evaluation and transformation

$\boldsymbol{K}^A_{3,t}$ 和 $\boldsymbol{K}^D_j$ 两者之间的关系由虚功原理可得

$$(\boldsymbol{K}^A_{3,t})^{-1} = \boldsymbol{R}_{3,j} (\boldsymbol{K}^D_{j,t})^{-1} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}_{3,j} - \hat{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{R}_{3,j} (\boldsymbol{K}^D_{j,t})^{-1} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}_{3,j} \hat{\boldsymbol{p}} \tag{21}$$

其中　$\boldsymbol{R}_{3,j}=[\boldsymbol{u}_{3j}\quad \boldsymbol{v}_{3j}\quad \boldsymbol{w}_{3j}]$

式中　$\boldsymbol{R}_{3,j}$——系$\{R_j\}$相对于系$\{R_3\}$的姿态矩阵

$\tilde{\boldsymbol{p}}$——矢量$\boldsymbol{p}$的斜矩阵

$\boldsymbol{p}$——由点 A 指向点 D 的位置矢量(图 6)

在此,对于 RRS 支链而言,点 D 为 R 副中心点或 R 副中心点其中之一。

对于 3－RRS 并联机构而言,仅需考虑沿驱动和约束方向的刚度系数,故上述刚度矩阵在系$\{R_3\}$中的度量可表示为

$$\boldsymbol{K}_{3,t}^{A}=\begin{bmatrix} k_{x_3x_3}^{A} & & \\ & 0 & \\ & & k_{z_3z_3}^{A} \end{bmatrix} \tag{22}$$

式中,0 表示除约束与驱动方向外存在微小位移,是 3 条支链与同一个动平台相连接所需的兼容性条件。

如前所述,RRS 支链由子装配体 1 和子装配体 2 组成,则 RRS 支链可视为由子装配体 1 和子装配体 2 串联组成的弹簧系统,故 k_a 和 k_c 可分别表示为

$$\begin{cases} k_a^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{2} k_{z_3z_3,n}^{A}\right)^{-1} \\ k_c^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{2} k_{x_3x_3,n}^{A}\right)^{-1} \end{cases} \tag{23}$$

式中　$k_{z_3z_3,n}^{A}$、$k_{x_3x_3,n}^{A}$——第 n 个子装配体沿 z_3、x_3 轴线刚度系数

对于子装配体 1,应用式(21),其刚度可表示为

$$(k_{z_3z_3,1}^{A})^{-1}=((k_{x_1\alpha_1,\underline{R}_joint}^{B})^{-1}l_1^2+(k_{y_1y_1,L_1_body}^{B})^{-1})\sin^2\theta_1+((k_{z_1z_1,\underline{R}_joint}^{B})^{-1}+(k_{z_1z_1,L_1_body}^{B})^{-1})\cos^2\theta_1\ (k_{x_3x_3,1}^{A})^{-1}=(k_{x_1x_1,\underline{R}_joint}^{B})^{-1}+(k_{x_1x_1,L_1_body}^{B})^{-1}+l_1^2((k_{y_1\beta_1,\underline{R}_joint}^{B})^{-1}\cos^2\theta_1) \tag{24}$$

式中　θ_1——$\boldsymbol{u}_i$ 与 $\boldsymbol{v}_i$ 的夹角

$k_{x_1\alpha_1,\underline{R}_joint}^{P}$——R 副绕 x_1 轴的角刚度系数

$k_{y_1y_1,L_1_body}^{P}$——主动臂沿 y_1 轴线刚度系数

$k_{z_1z_1,\underline{R}_joint}^{P}$、$k_{z_1z_1,L_1_body}^{P}$——R 副、主动臂沿 z_1 轴线刚度系数

$k_{x_1x_1,\underline{R}_joint}^{B}$、$k_{x_1x_1,L_1_body}^{B}$、——R 副、主动臂沿 x_1 轴线刚度系数

$k_{y_1\beta_1,\underline{R}_joint}^{B}$——R 副绕 y_1 轴角刚度系数

对于子装配体 2,应用式(21)得

$$(k_{z_3z_3,2}^{A})^{-1}=(k_{z_3z_3,R_joint}^{A})^{-1}+(k_{z_3z_3,L_2_body}^{A})^{-1}+(k_{z_3z_3,S_joint}^{A})^{-1}$$

$$(k_{x_3x_3,2}^{A})^{-1}=(k_{x_3x_3,R_joint}^{A})^{-1}+(k_{x_3x_3,L_2_body}^{A})^{-1}+(k_{x_3x_3,S_joint}^{A})^{-1} \tag{25}$$

式中　$k_{z_3z_3,R_joint}^{A}$、$k_{x_3x_3,R_joint}^{A}$——R 副沿 z_3、x_3 轴线刚度系数

$k_{z_3z_3,L_2_body}^{A}$、$k_{x_3x_3,L_2_body}^{A}$——从动臂沿 z_3、x_3 轴线刚度系数

$k_{z_3z_3,S_joint}^{A}$、$k_{x_3x_3,R_joint}^{A}$——S 副沿 z_3、x_3 轴线刚度系数

由于 S 副尺度参数比较小,变化幅度不大,故为简化计算,将其视为常数。

2.5　构造 $\rho''_{ta,i,n}$ 和 $\rho''_{tc,i,n}$

注意到 $\boldsymbol{s}_{1,i}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{z}}=0$,故支链在自身分布重力作用下引起的变形沿约束方向的投影为 0,即有 $\rho''_{tc,i,n}=0$。

对于 $\rho''_{ta,i,n}$ 则可表示为

$$\rho''_{ta,i,n}=\delta''^{A}_{z_3,i,n}$$

式中　$\delta''^{A}_{z_3,i,n}$——第 n 个子装配体在其自身重力作用下引起的支链在 A_i 点沿 z_3 轴线变形量

对于子装配体 2,在工作空间范围内,$\boldsymbol{v}_i$ 与 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 的夹角 θ_2 接近于 0,故 $\delta''^{A}_{z_3,i,2}$ 很小,可忽略不计。因此,只需考虑 $\delta''^{A}_{z_3,i,1}$,其可表示为

$$\delta''^{A}_{z_3,i,1}=\delta''^{A}_{z_3,i,\underline{R}_joint}+\delta''^{A}_{z_3,i,L_1_body} \tag{26}$$

其中　$\delta''^{A}_{z_3,i,\underline{R}_joint}=-m_{1,i}g(l_1^2\,(k_{x_1\alpha_1,\underline{R}_joint}^{B})^{-1}\sin^2\theta_1+(k_{z_1z_1,\underline{R}_joint}^{B})^{-1}\cos^2\theta_1)\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{z}}$

式中　$\delta''^{A}_{z_3,i,\underline{R}_joint}$——支链在子装配体 1 的重力作用下,由 R 副弹性所引起的在点 A_i 沿 z_3 轴线变形量

$\delta''^{A}_{z_3,i,L_1_body}$——子装配体 1 在其自身分布重力作用下产生的在点 A_i 沿 z_3 轴方向的线变形量,需借助有限元分析和数值模拟得到其随 α_i 的变化规律

由此可见,对于 3－RRS 并联机构,因分布重力仅会引起支链在驱动方向产生变形,故适当提高支链的驱动方向的刚度可减轻重力对末端变形的影响。

3　算例

本节利用前述推导出的模型,研究末端静刚度和运动部件重力所引起的末端变形的分布规律以及各构件刚度和重力对末端静刚度和变形的影响。表 1～4 分别示出了机构的尺度参数、各部件的刚度系数、质量及其质心参数,以上数据来源于机构的三维模型、有限元软件及相关设计手册。

为简化表示,使用 $\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G}(i)\,(i=1,2,\cdots,6)$ 依此

表 1 3－RRS 并联机构尺度参数与工作空间

Tab. 1 Dimensions and workspace of 3－RRS parallel mechanism

动平台半径 a/mm	静平台半径 b/mm	主动臂杆长 l_1/mm	从动臂杆长 l_2/mm	z 向最大行程 z/mm	最大章动角 θ/(°)
84	181	135	140	200	30

表 2 支链体各部件的质量、质心位置及动平台质量

Tab. 2 Masses and their locations of platform and limb-body assembly

参数	$q_{2,i}$/mm	$t_{2,i}$/mm	m_{L_2}/kg	m_0/kg	l_m/mm
数值	43.8	14.9	1.211	1.599	15

表 3 子装配体 1 在其局部坐标系下的刚度系数

Tab. 3 Stiffness coefficients of the first sub-assembly evaluated in body fixed frames

刚度系数	数值
$k^B_{x_1\alpha_1,\underline{R}_joint}$/(N·m·rad^{-1})	$2.555\,3\times10^6$
$k^B_{y_1y_1,L_1_body}$/(N·m·μm^{-1})	14.28
$k^B_{z_1z_1,\underline{R}_joint}$/(N·m·μm^{-1})	230.75
$k^B_{z_1z_1,L_1_body}$/(N·m·μm^{-1})	314.86
$k^B_{x_1x_1,\underline{R}_joint}$/(N·m·μm^{-1})	14.21
$k^B_{x_1x_1,L_1_body}$/(N·m·μm^{-1})	11.41
$k^B_{y_1\beta_1,\underline{R}_joint}$/(N·m·rad^{-1})	9.589×10^5

表示由重力引起的沿(绕)3 个正交轴的线(角)变形。图 7 给出了当末端点 O' 位于 $z=150$ mm 平面时 $\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G}(i)$ 的分布情况。显见，$\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G}(3)$ 与 $\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G}(6)$ 均呈三对称分布，且由重力引起的末端线变形沿 z 轴的分量 $\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G}(3)$ 远比沿 x、y 轴的分量 $\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G}(1)$ 和

表 4 子装配体 2 在其局部坐标系下的刚度系数

Tab. 4 Stiffness coefficients of the second sub-assembly evaluated in body fixed frames N/μm

刚度系数	数值
$k^A_{z_3z_3,R_joint}$	339.98
$k^A_{z_3z_3,L_2_body}$	18.19
$k^A_{z_3z_3,S_joint}$	11.13
$k^A_{x_3x_3,R_joint}$	23.25
$k^A_{x_3x_3,L_2_body}$	11.14
$k^A_{x_3x_3,S_joint}$	4.22

$\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G}(2)$ 大，原因在于 3－RRS 并联机构为立式布局，重力作用方向沿 z 轴的反方向。同时，为方便分析 3－RRS 各个方向的刚度在任务空间的分布规律，将刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中对角元素分别作为 3 个正交轴的线刚度 k_u、k_v、k_w 和角刚度 k_{ru}、k_{rv}、k_{rw}，即有 $k_u=\boldsymbol{K}(1,1)$，$k_v=\boldsymbol{K}(2,2)$，$k_w=\boldsymbol{K}(3,3)$，$k_{ru}=\boldsymbol{K}(4,4)$，$k_{rv}=\boldsymbol{K}(5,5)$，$k_{rw}=\boldsymbol{K}(6,6)$。

图 8 为机构在工作空间($\psi=0\sim360°$，$\theta=0\sim30°$)上、中、下 3 个层面($z=100$、150、200 mm)的末端刚度分布规律，由图 8 可知，3－RRS 并联机构的 z 向线刚度 k_w 和角刚度 k_{rw} 均呈三对称分布；x、y 向各刚度均关于 $\theta_y=0$ 呈面对称分布。由图 8 可知，机构的 z 向线刚度 k_w 优于 x 和 y 向的线刚度 k_u 和 k_v；x 和 y 向的角刚度 k_{ru} 和 k_{rv} 均优于 z 向角刚度 k_{rw}，这表明该机构适合要求具有 z 向移动以及 x 和 y 向转动的工况，与 3－RRS 并联机构的自由度相吻合。

为评估驱动(约束)刚度及各部件刚度对末端静刚度的贡献，定义全域静刚度性能评价指标为

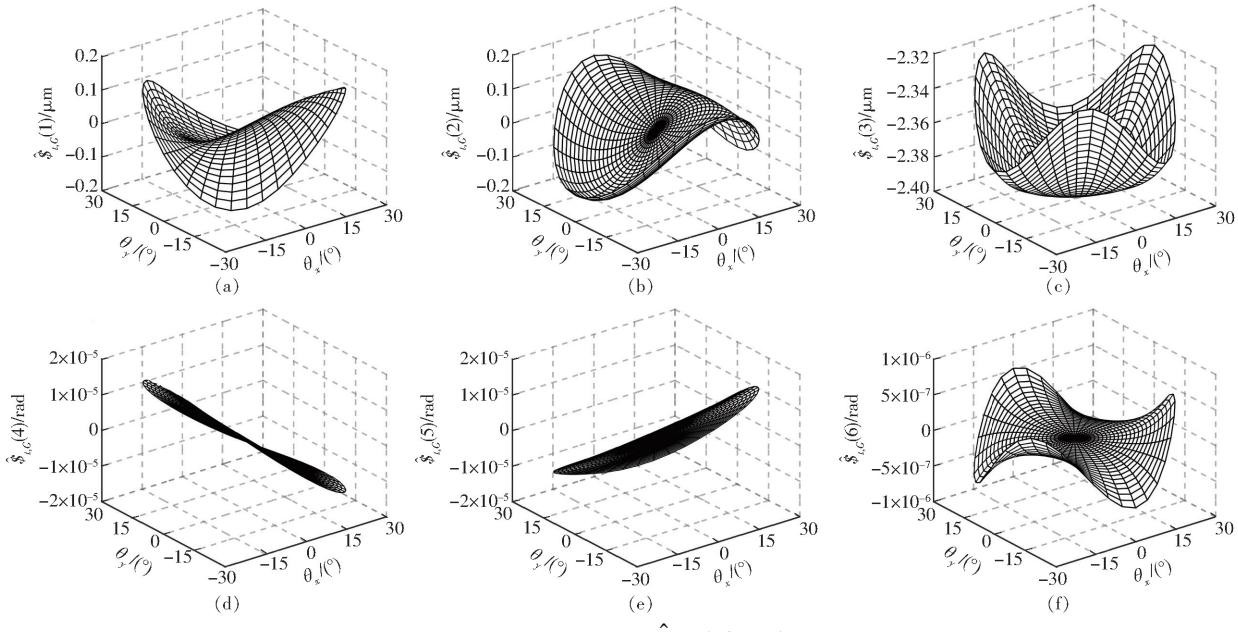


图 7 $z=150$ mm 时 $\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G}$ 分布规律

Fig. 7 Distributions of $\hat{\boldsymbol{\$}}_{t,G}$ when $z=150$ mm

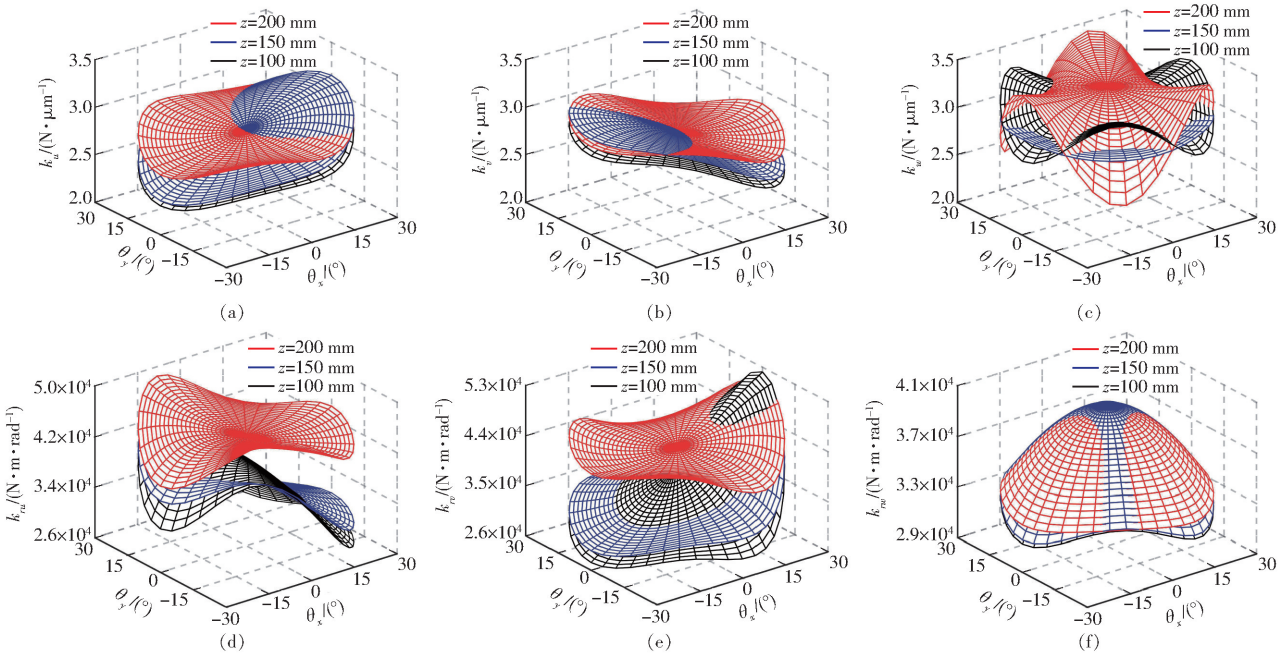


图 8　末端刚度全域分布规律

Fig. 8　Stiffness distributions within entire workspace

$$\begin{cases} \bar{k}_u = \dfrac{\int k_u \mathrm{d}W_t}{W_t} \quad \bar{k}_v = \dfrac{\int k_v \mathrm{d}W_t}{W_t} \quad \bar{k}_v = \dfrac{\int k_v \mathrm{d}W_t}{W_t} \\ \bar{k}_{ru} = \dfrac{\int k_{ru} \mathrm{d}W_t}{W_t} \quad \bar{k}_{rv} = \dfrac{\int k_{rv} \mathrm{d}W_t}{W_t} \quad \bar{k}_{rw} = \dfrac{\int k_{rw} \mathrm{d}W_t}{W_t} \end{cases} \tag{27}$$

式中　W_t——给定全域工作空间体积

$\bar{k}_u$、$\bar{k}_v$、$\bar{k}_w$——机构在末端参考点 O' 处沿 x、y、z 轴的线刚度全域均值

$\bar{k}_{ru}$、$\bar{k}_{rv}$、$\bar{k}_{rw}$——机构绕 x、y、z 轴的角刚度全域均值

图 9 给出了不同构件的刚度对末端静刚度的贡献率，图中，$x=1$、2、3、4、5 分别表示 R 副、$\underline{\mathrm{R}}$ 副、从动臂、主动臂、S 副刚度，$y=1$、2、3、4、5、6 分别表示末端各项刚度 $\bar{k}_u$、$\bar{k}_v$、$\bar{k}_w$、$\bar{k}_{ru}$、$\bar{k}_{rv}$、$\bar{k}_{rw}$。由图 9 可见，各构件刚度贡献率由大到小排序依此为：R 副、$\underline{\mathrm{R}}$ 副、从动臂、主动臂、S 副，且 R 副和 $\underline{\mathrm{R}}$ 副的贡献远大于其他构件，其主要原因在于 R 副和 $\underline{\mathrm{R}}$ 副均为短粗结构因而刚性大变形小，而从动臂、主动臂为长臂结构因而较容易产生变形，S 副贡献小则主要因为其尺寸小故而刚性不足。为进一步分析各构件驱动和约束刚度的影响，图 10 给出了各构件驱动刚度和约束刚度分别对界面驱动刚度和约束刚度的贡献率，图中，$x=1$、2、3、4、5 分别表示 S 副、主动臂、从动臂、$\underline{\mathrm{R}}$ 副、R 副。由图 10 可见，对于驱动方向，贡献率由大到小为 R 副、$\underline{\mathrm{R}}$ 副、从动臂、主动臂、S 副，且 R 副和 $\underline{\mathrm{R}}$ 副远高于后三者，对于约束方向，贡献率由大到小为 R 副、$\underline{\mathrm{R}}$ 副、主动臂、从动臂、S 副，且各构件在约束方向相对比较均衡。因此，为了在不增加运动部件的质量前提下改善机构的整体刚性，在现有设计的基础上，可适当增加球副的大小而减少转动副的尺寸从而使各构件之间刚度更加匹配，以及通过改变从动臂和主动臂的截面参数以使各零部件本身的驱动刚度和约束刚度更加匹配。上述现象说明，为了获得轻质高刚的结构，不仅需要不同构件之间的刚度相互匹配，且需要构件本身在驱动和约束方向的刚度相互匹配。

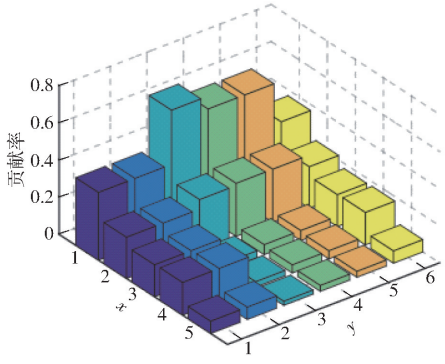


图 9　各构件刚度对末端刚度的贡献率

Fig. 9　Contributions of component stiffness to stiffness of platform

图 11 给出了不同部件重力对末端变形量的贡献率，图中，$x=1$、2、3 分别表示动平台重力、子装配体 1 重力、子装配体 2 重力，$y=1$、2、3、4、5、6 分别表示末端各项变形 $\overline{\hat{\boldsymbol{s}}}_{t,G}(1)$、$\overline{\hat{\boldsymbol{s}}}_{t,G}(2)$、$\overline{\hat{\boldsymbol{s}}}_{t,G}(3)$、$\overline{\hat{\boldsymbol{s}}}_{t,G}(4)$、$\overline{\hat{\boldsymbol{s}}}_{t,G}(5)$、$\overline{\hat{\boldsymbol{s}}}_{t,G}(6)$。因部件重力主要引起沿 z 轴方向的线变形 $\overline{\hat{\boldsymbol{s}}}_{t,G}(3)$，故以此为依据，由图可得各部件重力的影响由大到小排序依此为：动平

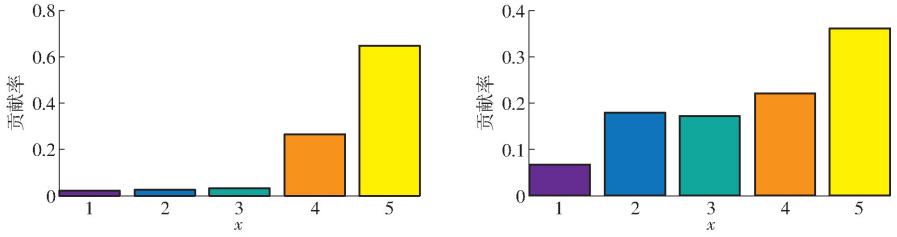


图 10 各构件刚度对界面刚度的贡献率

Fig. 10 Contributions of component stiffness to interface stiffness

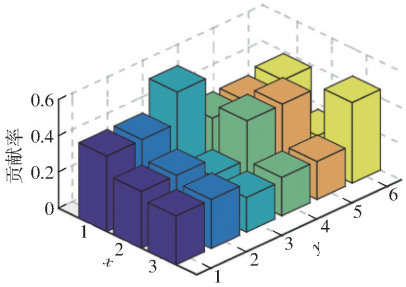
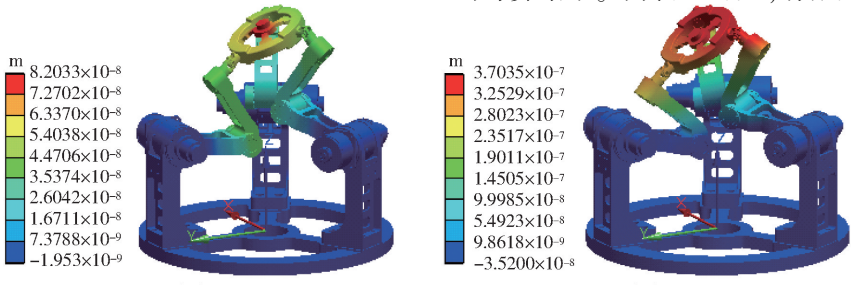


图 11 各部件重力对末端变形量的贡献率

Fig. 11 Contributions of gravity to global deflection

台、子装配体 1、子装配体 2,因此动平台的轻量化设计显得尤为重要;此外,子装配体 1 的重力(其主要重力为主动臂的重力)对角变形 $\overline{\hat{\$}_{t,G}(4)}$ 和 $\overline{\hat{\$}_{t,G}(5)}$ 影响最大,因主动臂的重力仅会引起支链在驱动方向产生变形,因而为了减少主动臂的重力对末端变形的影响,可适当增加支链驱动方向的刚度。

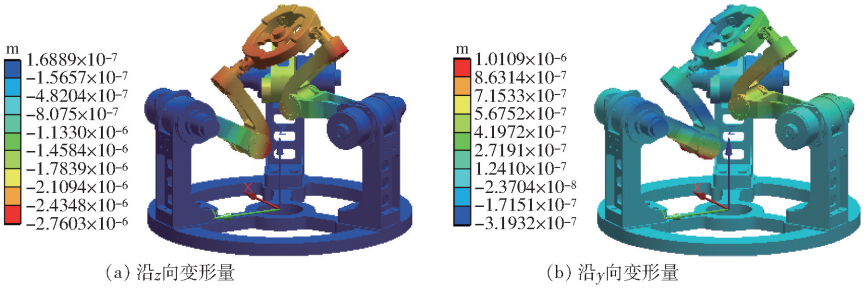
为了验证所建模型的正确性,利用 ANSYS 软件,计算末端点位于 $z=150$ mm,$\theta=30°$时的静刚度及重力引起的末端变形量。值得指出,该位形下沿 x 方向的线变形以及绕 x、y、z 方向的角变形量近似为零,故在此仅计算沿 y、z 坐标轴方向的静刚度及线变形量。同时,在有限元软件中设置的边界条件与文中的理论分析方法相同,以保证两种方法具有可比性。图 12 给出了末端参考点在上述位形且受单位力作用下机构沿 y、z 轴方向的变形云图。图 13 则给出了机构在该位型时在重力作用下沿 y、z 轴方向的变形云图。表 5 给出了半解析法与有限元软件的计算结果。由表 5 可见,有限元软件求解结果绝对值略小于半解析法求解结果的绝对值,但二者的取值非常接近,进而验证了半解析法是正确有效的。



(a) 沿z向变形量 (b) 沿y向变形量

图 12 $z=150$ mm、$\theta=30°$时受单位力作用下沿 y、z 方向变形量

Fig. 12 Deflections along y and z axis arising from unit force when $z=150$ mm and $\theta=30°$



(a) 沿z向变形量 (b) 沿y向变形量

图 13 $z=150$ mm、$\theta=30°$时重力作用下沿 y、z 方向变形量

Fig. 13 Deflections along y and z axis arising from gravity when $z=150$ mm and $\theta=30°$

表 5 半解析法与有限元软件求解结果

Tab. 5 Results obtained by semi-analytic method and FEA

方法	$\hat{\$}_{t,G}(2)$/μm	$\hat{\$}_{t,G}(3)$/μm	k_v/(N·μm^{-1})	k_w/(N·μm^{-1})
半解析法	−0.119 5	−2.366	3.008	12.592
有限元法	−0.115 3	−2.346	2.832	12.425

4 结论

(1)建立了考虑所有运动部件重力及构件/铰

链弹性的 3 - RRS 并联机构半解析静刚度模型，在变形分析时因同时计及了由关节反力和运动部件自身分布重力所引起的关节变形，故所建模型更加完备。

(2)所建末端变形模型可有效分离零部件弹性和重力对末端变形的影响，进而可为指导详细结构设计提供重要的理论依据。

(3)算例显示，为了使机构具有轻质高刚的性能，不仅需要不同构件之间的刚度相互匹配，且需要构件本身在驱动和约束方向的刚度相互匹配。针对本文所提 3 - RRS 并联机构，可适当增加球副的尺寸而减少转动副的尺寸从而使构件之间刚度更加匹配，以及通过改变从动臂和主动臂的截面参数从而使构件本身的驱动刚度和约束刚度更加匹配。

(4)不同部件重力对末端变形的贡献表明，动平台的重力对末端变形的影响最大，故在机构设计时应着重考虑动平台的轻量化设计。此外，对于 3 - RRS 并联机构而言，适当提高支链驱动方向的刚度有助于减小重力对末端变形的影响。

参 考 文 献

1 陈学生，陈在礼，孔民秀. 并联机器人研究的进展与现状[J]. 机器人，2002，24(5)：464 - 470.
CHEN Xuesheng, CHEN Zaili, KONG Minxiu. Recent development and current status of stewart platform research [J]. Robot, 2002, 24(5): 464 - 470. (in Chinese)

2 毛冰滟，谢志江，吴小勇，等. 基于引导人工蜂群算法的 3 - RPS 并联机构正解优化[J/OL]. 农业机械学报，2017，48(1)：339 - 345. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag=1&file_no=20170145&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.01.045.
MAO Bingyan, XIE Zhijiang, WU Xiaoyong, et al. Forward kinematics optimization of 3 - RPS parallel manipulator based on global-best artificial bee colony algorithm[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(1): 339 - 345. (in Chinese)

3 HENNES N, STAIMER D. Application of PKM in aerospace manufacturing high performance machining centers ECOSPEED, ECOSPEED - F and ECOLINER [C] // Proceedings of the 4th Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, Chemnitz: Verlag Wissenschaftliche Scripten, 2004: 557 - 568.

4 OLAZAGOITIA J L, WYATT S. New PKM tricept T9000 and its application to flexible manufacturing at aerospace industry[J]. SAE Technical Papers, 2007, 2142: 37 - 48.

5 BI Z M. Kinetostatic modeling of Exechon parallel kinematic machine for stiffness analysis[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2014, 71(1 - 4): 325 - 335.

6 HUANG T, LI M, ZHAO X M, et al. Conceptual design and dimensional synthesis for a 3-DOF module of the TriVariant—a novel 5-DOF reconfigurable hybrid robot[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2005, 21(3): 449 - 456.

7 栾玉亮，荣伟彬，孙立宁. 基于有限元方法 3 - PPSR 大长径比柔性并联机器人刚度模型分析[J]. 机器人，2014，36(6)：730 - 736.
LUAN Yuliang, RONG Weibin, SUN Lining. Analysis on stiffness model of 3 - PPSR flexible parallel robot with high aspect ratio based on finite element method [J]. Robot, 2014, 36(6): 730 - 736. (in Chinese)

8 陈落根. 数字化设计平台中的 CAD 与 CAE 集成技术研究[D]. 天津：天津大学，2013.
CHEN Luogen. Research on CAD - CAE integrated technology for a digital design platform [D]. Tianjin: Tianjin University, 2013. (in Chinese)

9 陶兆胜，彭澎，赵艳芹. Exe - Variant 并联模块静刚度分析[J/OL]. 农业机械学报，2017，48(4)：377 - 382. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag=1&file_no=20170450&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.04.050.
TAO Zhaosheng, PENG Peng, ZHAO Yanqin. Stiffness analysis for Exe - Variant parallel kinematic machine [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(4): 377 - 382. (in Chinese)

10 ZHANG J, ZHAO Y, DAI J. Compliance modeling and analysis of a 3 - RPS parallel kinematic machine module[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 27(4): 703 - 713.

11 CAO W A, DING H, YANG D. A method for compliance modeling of 5 - DOF over-constrained parallel robotic mechanisms with 3T2R output motion[J]. Journal of Mechanisms & Robotics, 2016, 9(1): 941 - 954.

12 GOSSELIN C. Stiffness mapping for parallel manipulator[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 377 - 382.

13 PASHKEVICH A, KLIMCHIK A, CHABLAT D. Enhanced stiffness modeling of manipulators with passive joints[J]. Mechanism & Machine Theory, 2011, 46(5): 662 - 679.

14 KLIMCHIK A, CHABLAT D, PASHKEVICH A. Stiffness modeling for perfect and non-perfect parallel manipulators under internal and external loadings[J]. Mechanism & Machine Theory, 2014, 79: 1 - 28.

15 LI Y, XU Q. Stiffness analysis for a 3 - PUU parallel kinematic machine[J]. Mechanism & Machine Theory, 2008, 43(2): 186 - 200.

16 胡波，路懿. 求解 3 - RPS 并联机构刚度的新方法[J]. 机械工程学报，2010，46(1)：24 - 29.
HU Bo, LU Yi. New approach for analyzing the stiffness of 3 - RPS parallel manipulator [J]. Journal of Mechanical Engineering,

2010, 46(1):24 – 29. (in Chinese)

17 落海伟, 张俊,王辉,等. 3 – RPS 并联机构静刚度建模方法[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版),2015,48(9):797 – 803.
LUO Haiwei, ZHANG Jun, WANG Hui, et al. Static stiffness modeling method of 3 – RPS PKM[J]. Journal of Tianjin University(Science and Technology), 2015, 48(9):797 – 803. (in Chinese)

18 赵铁石,赵延治,边辉,等. 空间并联机构连续刚度非线性映射[J]. 机械工程学报,2008,44(8):20 – 25.
ZHAO Tieshi, ZHAO Yanzhi, BIAN Hui, et al. Continuous stiffness non-linear mapping of spatial parallel mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(8): 20 – 25. (in Chinese)

19 QUENNOUELLE C, GOSSELIN C. Kinematostatic modeling of compliant parallel mechanisms[J]. Meccanica, 2011, 46(1): 155 – 169.

20 郭萌萌. 重力作用下被动过约束并联机构受力与虚拟仿真分析[D]. 秦皇岛:燕山大学, 2015.
GUO Mengmeng. The force and virtual simulation analysis of passive over-constrained parallel mechanism with gravity[D]. Qinhuangdao: Yanshan University,2015. (in Chinese)

21 刘文兰, 许允斗,闫文楠,等. 重力对超静定结构受力的影响[J]. 中国机械工程, 2017, 28(6):648 – 655.
LIU Wenlan, XU Yundou, YAN Wennan, et al. Influences of limbs' gravity on force analyses of statically indeterminate structures[J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28(6): 648 – 655. (in Chinese)

22 WANG M, LIU H, HUANG T, et al. Compliance analysis of a 3 – SPR parallel mechanism with consideration of gravity[J]. Mechanism & Machine Theory, 2015, 84:99 – 112.

23 LI Q, WANG M, HUANG T, et al. Compliance analysis of a 3 – DOF spindle head by considering gravitational effects[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(1):1 – 10.

24 HUANG T, LIU H T, CHETWYND D G. Generalized Jacobian analysis of lower mobility manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory,2011, 46(6):831 – 844.