

3-RPS 并联机器人粘性摩擦工况动力学建模

张彦斐 金鹏 官金良 刘强

(山东理工大学机械工程学院, 淄博 255049)

摘要: 以转动副轴线平行布置的 3-RPS 并联机器人为研究对象, 提出一种基于拉格朗日算子修正的动力学建模方法。首先, 采用矢量法建立系统运动学模型, 基于拉格朗日方法建立系统理想动力学模型。然后, 将关节摩擦视为系统非保守力, 基于“库伦 + 粘性”摩擦模型对关节摩擦所做的功精确量化处理。最后以摩擦所做负功的形式对拉格朗日算子进行修正, 建立考虑全部关节摩擦的系统动力学模型。同时对所建立的考虑关节摩擦和忽略关节摩擦的动力学模型进行了仿真对比, 结果表明, 在一个仿真周期内, 移动副 1、2、3 驱动力的相对误差分别为 18.1%、12.6%、16.5%, 试验结果为机器人控制系统的摩擦补偿提供了理论依据。

关键词: 3-RPS 并联机器人; 拉格朗日方程法; “库伦 + 粘性”摩擦模型; 关节摩擦

中图分类号: TH113 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2018)09-0374-08

Dynamic Modeling of 3-RPS Parallel Robot Considering Joint Friction

ZHANG Yanfei JIN Peng GONG Jinliang LIU Qiang

(School of Mechanical Engineering, Shandong University of Technology, Zibo 255049, China)

Abstract: During the process of dynamic analysis of the robot, the researchers generally ignored or not fully considered the effect of joint frictions on the dynamic model of the robot. Although the process of mathematical deduction was simplified, the model was quite different from the practice. Taking a 3-RPS parallel robot of which the rotation axes were parallel arranged as the research object, a dynamic modeling method based on modified Lagrange operator was presented. Firstly, the DOF of the moving platform was studied based on the screw theory and the kinematics model of the system was established by vector method. By analyzing the kinetic energy and potential energy of the whole moving components, the ideal dynamic model of the parallel robot was set up based on Lagrange equations. After that, taking the single chain, telescopic rod and moving platform as the research objects, the constraining forces of all motion joints were solved based on the D’Alembert’s principle, the joint frictions were regarded as the non-conservative forces of the system, based on the ‘Coulomb + viscous’ friction model, the work done by joint frictions was disposed accurately and quantitatively. Finally, the work done by joint frictions was always negative, some mechanical energy of the parallel robot was converted to other forms of energy and the mechanical energy of the system was reduced. Based on the ideal Lagrange operator, the Lagrange operator was amended based on the form of negative work done by frictions, and the system dynamic model considering all joint frictions was established. At the same time, the dynamic models with and without considering joint frictions were simulated and contrasted. In a simulation cycle, the results showed that the relative errors of the first, second and third driving forces were 18.1%, 12.6% and 16.5%, the results provided a theoretical basis for the frictional compensation of the robot control system and the analysis process also had reference significance for other parallel robot’s performance analysis and optimization.

Key words: 3-RPS parallel robot; Lagrange-equation method; ‘Coulomb + viscosity’ friction model; joint frictions

收稿日期: 2018-03-22 修回日期: 2018-05-09
基金项目: 国家自然科学基金项目(61303006)、山东省优秀中青年科学家科研奖励基金项目(BS2012ZZ009)和淄博市校城融合项目(2017ZBXC151)
作者简介: 张彦斐(1977—),女,副教授,博士,主要从事微操作机器人研究,E-mail: 1392076@sina.com
通信作者: 官金良(1976—),男,副教授,博士,主要从事机器人技术及微纳装备研究,E-mail: gjlwing@qq.com

0 引言

并联机器人具有承载能力强、动态性能优等特点,已被广泛应用到并联机床、高精度定位平台等诸多领域^[1-4]。为建立机器人关节驱动力和末端运动的映射关系,需要在运动学分析的基础上建立其动力学模型^[5-8]。目前,针对并联机构的动力学建模方法有拉格朗日方程法、牛顿-欧拉法和虚功原理法等,其中又以拉格朗日方程法和牛顿-欧拉法应用最为广泛^[9-11]。WU 等^[12]基于拉格朗日方程法建立了一种球面三自由度并联机器人的动力学模型。陈修龙等^[13]基于牛顿-欧拉法对一种 4-UPS-UPU 空间并联机构的动力学方程进行了研究。陈子明等^[14]基于虚功原理对一种 3-UPU 对称并联机构的动力学性能进行了分析。

在建立动力学模型过程中,研究人员往往忽略关节摩擦^[15]或者仅考虑部分关节摩擦^[16]对动力学模型的影响。虽然在一定程度上简化了数学推导过程,但所建模型的精度往往不高。为定量描述关节摩擦对动力学模型的影响,需选择合适的摩擦模型^[17-19]。动态摩擦模型能够很好地描述两铰接构件在预滑动阶段的摩擦行为,但对于并联机器人来说,其关节摩擦主要以运动摩擦的形式出现,选择动态摩擦模型的优势并不明显。在静态摩擦模型中,以库伦摩擦模型、“库伦+粘性”摩擦模型和指数摩擦模型应用最多。山显雷等^[20]基于库伦摩擦模型求解了人工髋关节和推力球轴承的摩擦力矩,但该模型忽略了关节处润滑介质的粘性对关节摩擦的影响。李仁军^[21]基于一种修正的指数摩擦模型建立了平面五杆机构的逆动力学模型,但该摩擦模型需要辨识的参数太多且某些参数辨识较为困难。本文选择模型参数相对较少且易辨识,同时又能较好地反映关节摩擦特性的“库伦+粘性”摩擦模型。

针对提出的转动副轴线平行布置的 3-RPS 并联机器人,在运动学分析的基础上,基于拉格朗日方程法建立该机器人的理想动力学模型。将关节摩擦视为非保守力,通过对拉格朗日算子进行修正,建立包含全部关节摩擦的完整动力学模型,通过与 ADAMS 的仿真结果进行对比,验证该建模过程的正确性和考虑关节摩擦的必要性。

1 机器人结构描述

3-RPS 并联机器人由动平台、定平台以及连接动平台和定平台的 3 条支链组成,如图 1 所示。每条支链由下往上分别为转动副 R、移动副 P 和球铰副 S,机构动力输入为各支链移动副 P。转动副按顶

角为 120°的等腰三角形布置(腰为 R_1R_2 和 R_1R_3),球铰副转动中心按等边三角形布置,且等边三角形 $S_1S_2S_3$ 的高与等腰三角形 $R_1R_2R_3$ 底边高相等。以定平台底边 R_2R_3 的中点 O_1 为原点建立定坐标系 $O_1x_1y_1z_1$,以动平台几何中心点 O_2 为原点建立动坐标系 $O_2x_2y_2z_2$ 。转动副轴线平行布置且与定坐标系 O_1y_1 平行。在转动副 R_3 处建立如图 1 所示局部坐标系,将球铰副 S_3 视为转动轴线相互正交的 3 个转动副,则支链 3 中各运动副的 Plücker 坐标为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 = \{0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0\} \\ \mathcal{S}_2 = \{0 \ 0 \ 0; \ a_2 \ 0 \ c_2\} \\ \mathcal{S}_3 = \{1 \ 0 \ 0; \ 0 \ b_3 \ 0\} \\ \mathcal{S}_4 = \{0 \ 1 \ 0; \ a_4 \ 0 \ c_4\} \\ \mathcal{S}_5 = \{0 \ 0 \ 1; \ 0 \ b_5 \ 0\} \end{cases} \quad (1)$$

式中, a_2 和 c_2 、 b_3 、 a_4 和 c_4 、 b_5 为矢量 $\mathbf{r}_n \times \mathbf{S}_n$ 在局部坐标系的坐标分量,则驱动支链 3 的运动螺旋系矩阵为

$$\mathcal{S}_{R3P3} = \{ \mathcal{S}_1 \ \mathcal{S}_2 \ \mathcal{S}_3 \ \mathcal{S}_4 \ \mathcal{S}_5 \} \quad (2)$$

与式(2)互逆的反螺旋系矩阵为

$$\mathcal{S}_{R3P3}^r = \{0 \ 1 \ 0; \ -b_3 \ 0 \ -b_5\} \quad (3)$$

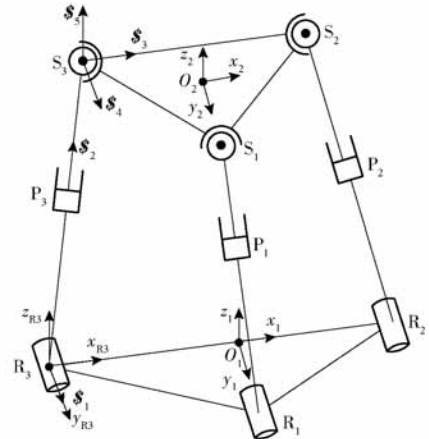


图 1 3-RPS 并联机器人

Fig. 1 3-RPS parallel robot

由此可知,该反螺旋为一过球铰副转动中心且平行于转动副轴线的线力矢,则驱动支链 3 对动平台的约束力也平行于转动副轴线。由于 $\mathcal{S}_{R1P1}^r$ 、 $\mathcal{S}_{R2P2}^r$ 和 $\mathcal{S}_{R3P3}^r$ 线性无关且转动副轴线平行布置,则 3 条驱动支链约束了动平台沿 O_1y_1 的平移以及绕 O_2x_2 、 O_2z_2 的转动,即动平台自由度数目为 3 且自由度的类型为沿 O_1x_1 、 O_1z_1 的平移和绕 O_2y_2 的转动。

2 运动学分析

选择动平台的位姿 $[x_{o2} \ z_{o2} \ \theta]^T$ 为机器人的广义坐标,其中 x_{o2} 和 z_{o2} 为动平台参考点 O_2 在定坐标系中的坐标分量, θ 为动平台外法线与定坐标系

轴 O_1x_1 的夹角。设 $|L_{S_1S_2}| = |L_{S_2S_3}| = |L_{S_3S_1}| = 2k$, $|L_{R_2R_3}| = 2l$ 。在矢量三角形 $O_1O_2S_2$ 中,基于闭环矢量法可得

$$L_{O_1S_2} = L_{O_1O_2} + L_{O_2S_2}$$

其中 $L_{O_1O_2} = [x_{o_2} \quad k/\sqrt{3} \quad z_{o_2}]^T$

$$L_{O_2S_2} = [k\sin\theta \quad -k/\sqrt{3} \quad -k\cos\theta]^T$$

则 $L_{O_1S_2} = [x_{o_2} + k\sin\theta \quad 0 \quad z_{o_2} - k\cos\theta]^T$

在矢量三角形 $O_1R_2S_2$ 中

$$L_{R_2S_2} = L_{R_2O_1} + L_{O_1S_2}$$

其中 $L_{R_2O_1} = [-l \quad 0 \quad 0]^T$

则 $L_{R_2S_2} = [x_{o_2} + k\sin\theta - l \quad 0 \quad z_{o_2} - k\cos\theta]^T \quad (4)$

与上同理,在矢量三角形 $O_1O_2S_1$ 和矢量三角形 $O_1R_1S_1$ 中,有

$$L_{R_1S_1} = [x_{o_2} \quad 0 \quad z_{o_2}]^T \quad (5)$$

在矢量三角形 $O_1O_2S_3$ 和矢量三角形 $O_1R_3S_3$ 中,同样可以得到

$$L_{R_3S_3} = [x_{o_2} - k\sin\theta + l \quad 0 \quad z_{o_2} + k\cos\theta]^T \quad (6)$$

各支链的移动副输入量为零时,支链的长度为 $L_n (n=1,2,3)$ 。当各支链移动副的输入位移为 q_n 时,根据式(4)~(6)可建立并联机器人的逆运动学模型为

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{x_{o_2}^2 + z_{o_2}^2} - L_1 \\ q_2 = \sqrt{(x_{o_2} + k\sin\theta - l)^2 + (z_{o_2} - k\cos\theta)^2} - L_2 \\ q_3 = \sqrt{(x_{o_2} - k\sin\theta + l)^2 + (z_{o_2} + k\cos\theta)^2} - L_3 \end{cases} \quad (7)$$

式(7)两边分别对时间 t 求一阶导可得

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_{o_2} \\ \dot{z}_{o_2} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

其中 $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{o_2}}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{o_2}}{\partial q_2} & \frac{\partial x_{o_2}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z_{o_2}}{\partial q_1} & \frac{\partial z_{o_2}}{\partial q_2} & \frac{\partial z_{o_2}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \theta}{\partial q_1} & \frac{\partial \theta}{\partial q_2} & \frac{\partial \theta}{\partial q_3} \end{bmatrix}$

式中 J ——并联机器人的速度雅可比矩阵

3 理想动力学模型

将整个机构分为动平台、移动副伸缩杆和移动副基座 3 个子系统,同时假设各构件在运动过程中均为刚体。

3.1 子系统动能

(1) 动平台动能

动平台动能为

$$E_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{x}_{o_2}^2 + \dot{z}_{o_2}^2) + \frac{1}{2} J'_d \dot{\theta}^2 \quad (8)$$

其中 $J'_d = J_d + m_d (x_{o_2}^2 + z_{o_2}^2)$

式中 m_d ——动平台质量

J'_d ——动平台绕坐标系轴 O_1y_1 转动惯量

J_d ——动平台绕坐标系轴 O_2y_2 转动惯量

(2) 移动副伸缩杆动能

支链 1 中,取移动副伸缩杆的质心点为 G_{11} ,如图 2 所示。在矢量三角形 $O_1S_1G_{11}$ 中有

$$L_{O_1G_{11}} = L_{O_1S_1} + L_{S_1G_{11}} \quad (9)$$

由式(9)可得移动副伸缩杆质心坐标为

$$L_{O_1G_{11}} = [X_{G_{11}} \quad \sqrt{3}k \quad Z_{G_{11}}]^T \quad (10)$$

其中 $X_{G_{11}} = x_{o_2} - mx_{o_2} / \sqrt{x_{o_2}^2 + z_{o_2}^2}$
 $Z_{G_{11}} = z_{o_2} - mz_{o_2} / \sqrt{x_{o_2}^2 + z_{o_2}^2}$
 $m = |L_{S_1G_{11}}|$

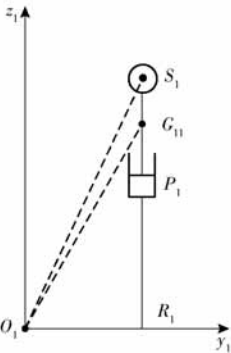


图 2 支链 1 移动副伸缩杆质心

Fig. 2 Mass center of the first sliding pair

支链 2 和支链 3 移动副伸缩杆质心如图 3 所示。

与上同理,在矢量三角形 $O_1S_2G_{21}$ 和三角形 $O_1S_3G_{31}$ 中可得

$$L_{O_1G_{21}} = [X_{G_{21}} \quad 0 \quad Z_{G_{21}}]^T \quad (11)$$

$$L_{O_1G_{31}} = [X_{G_{31}} \quad 0 \quad Z_{G_{31}}]^T \quad (12)$$

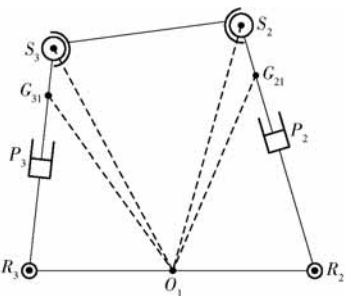


图 3 支链 2 和 3 移动副伸缩杆质心

Fig. 3 Mass center of the second and third sliding pair

其中

$$\begin{aligned} X_{G_{21}} &= x_{O_2} + k \sin \theta - \\ &\frac{m(x_{O_2} + k \sin \theta - l)}{\sqrt{(x_{O_2} + k \sin \theta - l)^2 + (z_{O_2} - k \cos \theta)^2}} \\ Z_{G_{21}} &= z_{O_2} - k \cos \theta - \\ &\frac{m(z_{O_2} - k \cos \theta)}{\sqrt{(x_{O_2} + k \sin \theta - l)^2 + (z_{O_2} - k \cos \theta)^2}} \\ X_{G_{31}} &= x_{O_2} - k \sin \theta - \\ &\frac{m(x_{O_2} - k \sin \theta + l)}{\sqrt{(x_{O_2} - k \sin \theta + l)^2 + (z_{O_2} + k \cos \theta)^2}} \\ Z_{G_{31}} &= z_{O_2} + k \cos \theta - \\ &\frac{m(z_{O_2} + k \cos \theta)}{\sqrt{(x_{O_2} - k \sin \theta + l)^2 + (z_{O_2} + k \cos \theta)^2}} \end{aligned}$$

取向量 $\mathbf{L}_{R_n S_n}$ 与定坐标系轴 $O_1 x_1$ 正向的夹角为 φ_1 、 φ_2 和 φ_3 , 由 $\cos \varphi_1 = \cos(\mathbf{L}_{R_1 S_1}, \mathbf{L}_{O_1 R_2})$ 可得

$$\varphi_1 = \arccos \frac{x_{O_2}}{\sqrt{x_{O_2}^2 + z_{O_2}^2}} \quad (13)$$

同理

$$\varphi_2 = \arccos \frac{x_{O_2} + k \sin \theta - l}{\sqrt{(x_{O_2} + k \sin \theta - l)^2 + (z_{O_2} - k \cos \theta)^2}} \quad (14)$$

$$\varphi_3 = \arccos \frac{x_{O_2} - k \sin \theta + l}{\sqrt{(x_{O_2} - k \sin \theta + l)^2 + (z_{O_2} + k \cos \theta)^2}} \quad (15)$$

综上, 由式(9) ~ (15) 可得移动副伸缩杆的总动能为

$$\sum_{n=1}^3 E_{n1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 m_{n1} (\dot{X}_{G_{n1}}^2 + \dot{Z}_{G_{n1}}^2) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 J'_{n1} \dot{\varphi}_n^2 \quad (16)$$

其中 $J'_{n1} = J_{n1} + m_{n1} l_{n1}^2$ $l_{n1} = \sqrt{X_{G_{n1}}^2 + Z_{G_{n1}}^2}$
 式中 m_{n1} ——移动副伸缩杆质量
 J'_{n1} ——伸缩杆绕坐标系轴 $O_1 y_1$ 转动惯量
 J_{n1} ——伸缩杆绕质心坐标系 y 轴转动惯量
 l_{n1} ——伸缩杆质心 G_{n1} 到定坐标轴 $O_1 y_1$ 距离
 (3) 移动副基座动能

支链移动副基座的总动能为

$$\sum_{n=1}^3 E_{n2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 J'_{n2} \dot{\varphi}_n^2 \quad (17)$$

其中 $J'_{n2} = J_{n2} + m_{n2} l_{n2}^2$
 式中 J'_{n2} ——移动副基座绕坐标轴 $O_1 y_1$ 转动惯量
 J_{n2} ——基座绕质心坐标系 y 轴转动惯量
 m_{n2} ——基座质量
 l_{n2} ——基座质心 G_{n2} 到定坐标轴 $O_1 y_1$ 距离

3.2 子系统势能

取各支链转动副轴线所在平面为系统的零势

能面。

(1) 动平台势能

动平台势能为

$$U_d = m_d g z_{O_2} \quad (18)$$

(2) 移动副伸缩杆势能

移动副伸缩杆势能为

$$\sum_{n=1}^3 U_{n1} = \sum_{n=1}^3 m_{n1} g Z_{G_{n1}} \quad (19)$$

(3) 移动副基座势能

取 $p = |\mathbf{L}_{R_n G_{n2}}|$, 设 p 在轴 $O_1 z_1$ 投影为 $Z_{G_{n2}}$, 则

$$\begin{aligned} Z_{G_{12}} &= \frac{p z_{O_2}}{\sqrt{x_{O_2}^2 + z_{O_2}^2}} \\ Z_{G_{22}} &= \frac{p(z_{O_2} - k \cos \theta)}{\sqrt{(x_{O_2} + k \sin \theta - l)^2 + (z_{O_2} - k \cos \theta)^2}} \\ Z_{G_{32}} &= \frac{p(z_{O_2} + k \cos \theta)}{\sqrt{(x_{O_2} - k \sin \theta + l)^2 + (z_{O_2} + k \cos \theta)^2}} \end{aligned}$$

则移动副基座势能为

$$\sum_{n=1}^3 U_{n2} = \sum_{n=1}^3 m_{n2} g Z_{G_{n2}} \quad (20)$$

3.3 忽略摩擦的动力学模型

由式(8)、(16) ~ (20) 可得拉格朗日算子为

$$L = E_d + \sum_{n=1}^3 E_{n1} + \sum_{n=1}^3 E_{n2} - U_d - \sum_{n=1}^3 U_{n1} - \sum_{n=1}^3 U_{n2}$$

设机器人在操作空间中的广义力为

$$\mathbf{F} = [F_{x_{O_2}} \quad F_{z_{O_2}} \quad M_{y_\theta}]^T$$

由拉格朗日方程可建立机器人的理想动力学模型。

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_n}$$

应用虚位移原理, 将操作空间中的广义力转换为关节空间中的关节驱动力

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{J}^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_n} \right) \quad (21)$$

式中 $\boldsymbol{\tau}_n$ ——各支链关节驱动力

4 运动副摩擦

为了定量描述关节摩擦, 需依据达朗贝尔原理对各运动构件进行受力分析。

4.1 单条支链受力分析

对于单条支链, 其受力情况如图4所示。

依据达朗贝尔原理建立力平衡方程为

$$\mathbf{F}'_S + \mathbf{G}_i + \mathbf{G}_j + \mathbf{F}'_R + \mathbf{F}_{fj} = \mathbf{O} \quad (22)$$

其中 $\mathbf{F}'_S = {}^S_{O_1} \mathbf{R}_{an} \mathbf{F}_S$ $\mathbf{F}'_R = {}^R_{O_1} \mathbf{R}_{an} \mathbf{F}_R$

$${}^S_{O_1} \mathbf{R}_{an} = {}^R_{O_1} \mathbf{R}_{an} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & 0 & -\sin \alpha_n \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_n & 0 & \cos \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \varphi_n$$

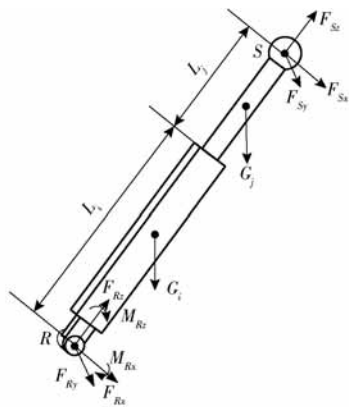


图4 单条支链受力

Fig. 4 Force diagram of single branch chain

$$\mathbf{G}_i = [0 \quad 0 \quad -m_i g]^T \quad \mathbf{G}_j = [0 \quad 0 \quad -m_j g]^T$$
$$\mathbf{F}_{lj} = -m_j^s \mathbf{R}_{an} [0 \quad 0 \quad a_{jz}]^T$$

式中 $\mathbf{F}'_S$ ——定坐标系中球铰副关约束力
 $\mathbf{F}'_R$ ——定坐标系中转动副关约束力
 $\mathbf{G}_i$ ——基座重力 $\mathbf{G}_j$ ——伸缩杆重力
 m_j ——基座质量
 m_j ——伸缩杆质量
 $\mathbf{F}_{lj}$ ——伸缩杆惯性力
 ${}^S_{O_1} \mathbf{R}_{an}$ ——球铰副的关节局部坐标系到定坐标系的坐标转换矩阵
 ${}^R_{O_1} \mathbf{R}_{an}$ ——转动副的关节局部坐标系到定坐标系的坐标转换矩阵
 α_n ——局部坐标系的 z 轴与定坐标系 $O_1 z_1$ 轴的夹角,坐标变换过程中从 $O_1 y_1$ 轴正向看逆时针方向为正
 a_{jz} ——伸缩杆在局部坐标系 z 轴方向加速度
 $\mathbf{O}$ ——零矩阵

对转动副局部坐标系的坐标轴取矩

$$(\mathbf{L}_i + \mathbf{L}_j) \mathbf{F}'_S + (\mathbf{L}_i + \mathbf{L}_j/2) \mathbf{G}_j + (\mathbf{L}_i/2) \mathbf{G}_i + \mathbf{M}'_R + \mathbf{M}_{li} + \mathbf{M}_{lj} = \mathbf{O} \quad (23)$$

其中 $\mathbf{L}_i = [L_i \cos \varphi_n \quad 0 \quad L_i \sin \varphi_n]^T$
 $\mathbf{L}_j = [L_j \cos \varphi_n \quad 0 \quad L_j \sin \varphi_n]^T$

$$\mathbf{M}'_R = {}^R_{O_1} \mathbf{R}_{an} \mathbf{M}_R$$

$$\mathbf{M}_{li} = \mathbf{I}'_i \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\alpha}_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}_n \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}'_i \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{lj} = \mathbf{I}'_j \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\alpha}_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}_n \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}'_j \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}'_i = {}^R_{O_1} \mathbf{R}_{an} \mathbf{I}_{iO_1} {}^R_{O_1} \mathbf{R}_{an}^T \quad \mathbf{I}'_j = {}^S_{O_1} \mathbf{R}_{an} \mathbf{I}_{jO_1} {}^S_{O_1} \mathbf{R}_{an}^T$$

式中 L_i ——基座长度 L_j ——伸缩杆长度
 $\mathbf{M}_R$ ——局部坐标系中转动副约束力矩
 $\mathbf{M}_{li}$ ——基座相对坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 的惯性力矩

$\mathbf{M}_{lj}$ ——伸缩杆相对坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 惯性力矩
 $\mathbf{I}_i$ ——基座绕质心坐标系的转动惯量
 $\mathbf{I}_j$ ——伸缩杆绕质心坐标系的转动惯量

4.2 伸缩杆受力分析

伸缩杆的受力如图5所示。

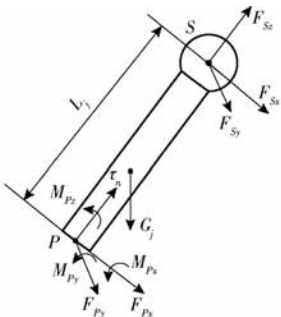


图5 伸缩杆受力

Fig. 5 Force diagram of retractable rod

在定坐标系中,根据伸缩杆受力情况建立力平衡方程为

$$\mathbf{F}'_S + \mathbf{G}_j + \mathbf{F}'_P + \boldsymbol{\tau}'_n + \mathbf{F}_{lj} = \mathbf{O} \quad (24)$$

其中 $\mathbf{F}'_P = {}^P_{O_1} \mathbf{R}_{an} \mathbf{F}_P$ $\boldsymbol{\tau}'_n = {}^P_{O_1} \mathbf{R}_{an} \boldsymbol{\tau}_n$ ${}^P_{O_1} \mathbf{R}_{an} = {}^S_{O_1} \mathbf{R}_{an}$

式中 $\mathbf{F}_P$ ——局部坐标系中移动副的关约束力
对移动副局部坐标系的坐标轴取矩

$$\mathbf{L}_j \mathbf{F}'_S + (\mathbf{L}_j/2) \mathbf{G}_j + \mathbf{M}'_P + \mathbf{M}_{lj} = \mathbf{O} \quad (25)$$

其中 $\mathbf{M}'_P = {}^P_{O_1} \mathbf{R}_{an} \mathbf{M}_P$

式中 $\mathbf{M}_P$ ——局部坐标系中移动副的关约束力矩

4.3 动平台受力分析

动平台的受力如图6所示。

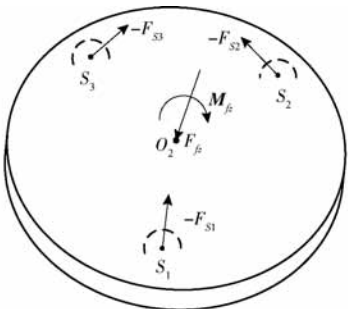


图6 动平台受力

Fig. 6 Force diagram of moving platform

在定坐标系中建立力平衡方程

$$- \sum_{n=1}^3 \mathbf{F}'_{Sn} + \mathbf{G}_k + \mathbf{F}_{fz} + \mathbf{F}_{lk} = \mathbf{O} \quad (26)$$

其中 $\mathbf{F}_{lk} = -m_k [\ddot{x}_{O2} \quad 0 \quad \ddot{z}_{O2}]^T$

式中 $\mathbf{G}_k$ ——动平台重力

$\mathbf{F}_{fz}$ ——动平台所受负载力

$\mathbf{F}_{lk}$ ——动平台相对于定坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 惯性力
对动坐标系坐标轴取矩,可建立力矩平衡方程

$$- \sum_{n=1}^3 \mathbf{A}_n \mathbf{F}'_{Sn} + \mathbf{M}_{fz} + \mathbf{M}_{lk} = \mathbf{O} \quad (27)$$

其中
$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & z_{O_2} - z_{S_n} & y_{S_n} - y_{O_2} \\ z_{S_n} - z_{O_2} & 0 & x_{O_2} - x_{S_n} \\ y_{O_2} - y_{S_n} & x_{S_n} - x_{O_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{I_k} = \mathbf{I}'_k \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}'_k \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}'_k = {}^k_0\mathbf{R}_\beta \mathbf{I}_k {}^k_0\mathbf{R}_\beta^T \quad \beta = \pi/2 - \theta$$

式中 $\mathbf{M}_{f_z}$ ——动平台所受负载力矩
 $\mathbf{M}_{I_k}$ ——动平台相对于定坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 坐标轴的惯性力矩
 β ——动坐标系 O_2z_2 轴与定坐标系 O_1z_1 轴夹角,从 O_1y_1 轴正向看逆时针方向为正
式(22)~(27)共42个独立方程,对应有42个独立未知变量,因此联立以上方程便可求得全部关节约束力。

5 修正后的动力学模型

5.1 各运动副摩擦

当移动副输入量为 Δq_n 时,根据运动学分析便可求得对应转动副和球铰副的角位移分别为 $\Delta \varphi_{Rn}$ 和 $\Delta \varphi_{Sn}$ 。各运动副的粘性摩擦系数和库伦摩擦系数分别为 f_v 和 μ_c ,基于“库伦+粘性”摩擦模型^[22],各运动副的关节摩擦可以表示如下:

(1) 移动副摩擦力

移动副摩擦力为

$$f_{P_n} = f_v \dot{\Delta q}_n + \mu_c N_{P_n} \operatorname{sgn}(\dot{\Delta q}_n)$$

式中 N_{P_n} ——移动副关节正压力

(2) 转动副摩擦力矩

转动副摩擦力矩为

$$T_{R_n} = f_v r_R \dot{\Delta \varphi}_{R_n} + \mu_c N_{R_n} \operatorname{sgn}(r_R \dot{\Delta \varphi}_{R_n})$$

式中 r_R ——转动副转动半径

N_{R_n} ——转动副关节正压力

(3) 球铰副摩擦力矩

球铰副摩擦力矩为

$$T_{S_n} = f_v r_S \dot{\Delta \varphi}_{S_n} + \mu_c N_{S_n} \operatorname{sgn}(r_S \dot{\Delta \varphi}_{S_n})$$

式中 r_S ——球铰副转动半径

N_{S_n} ——球铰副关节正压力

5.2 含全部关节摩擦的动力学模型

关节摩擦所做总负功可表示为

$$\sum E_f = \sum_{n=1}^3 |f_{P_n} \Delta q_n + T_{R_n} \Delta \varphi_{R_n} + T_{S_n} \Delta \varphi_{S_n}|$$

由于关节摩擦始终与构件相对运动的方向相反,即摩擦始终做负功,使得系统中部分机械能转换为内能等其他形式的能量,导致系统机械能减小,因此修正后的拉格朗日算子为

$$L' = L - \sum E_f$$

包含全部关节摩擦的完整动力学模型可表示为

$$\tilde{\tau}_n = \mathbf{J}^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} \right) \quad (28)$$

式中 $\tilde{\tau}_n$ ——修正后的各支链关节驱动力

6 数值仿真及分析

机构的结构参数如下:动平台质量为5.83 kg,移动副伸缩杆的质量为2.07 kg,移动副基座的质量为5.15 kg。球铰副转动中心到伸缩杆质心的距离为128.48 mm,基座质心到转动副轴线的距离为174.65 mm。定平台底边长900 mm,动平台边长300 mm。机器人处于零输入状态时,动平台和定平台平行,支链1、2、3的长度分别为505、543.16、543.16 mm, $\varphi_1 = 90^\circ$ 、 $\varphi_2 = 109.82^\circ$ 、 $\varphi_3 = 70.18^\circ$ 。转动副和球铰副转动半径为12.5 mm和25 mm。 $f_v = 0.02$ 、 $\mu_c = 0.12$ 。动平台、移动副伸缩杆和基座绕自身质心坐标系 y 轴的转动惯量分别为 1.42×10^4 、 1.85×10^4 、 $5.02 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$ 。动平台所受工作载荷为 $[100 \text{ N}, 100 \text{ N}, 100 \text{ N}, 80 \text{ N} \cdot \text{m}, 80 \text{ N} \cdot \text{m}, 80 \text{ N} \cdot \text{m}]^T$,在动平台几何中心处施加运动激励。

$$\begin{cases} x_{O_2} = 5 \sin(2\pi t) \\ z_{O_2} = 10 \cos(2\pi t) \\ \theta = 90^\circ \end{cases} \quad (29)$$

将拉格朗日算子 L 和 L' 表示为关于广义坐标 x_{O_2} 、 z_{O_2} 和 θ 的函数,基于式(21)和式(28),借助 Matlab 得到移动副1、2、3在一个仿真周期中的驱动力变化曲线。将三维模型导入 ADAMS 中,分忽略摩擦和考虑摩擦2种情况分别进行1 s的仿真试验,各移动副驱动力的 Matlab 理论计算结果和 ADAMS 的仿真结果如图7所示。

在一个仿真周期内,无论考虑关节摩擦与否,移动副1、2、3驱动力的 Matlab 理论值和 ADAMS 仿真值的变化趋势均对应一致,相对于仿真结果,理论计算结果的误差均在3.4%以内,验证了该建模过程的正确性。考虑关节摩擦与忽略关节摩擦的各支链移动副驱动力相对误差分别为18.1%、12.6%、16.5%,验证了机器人在实际应用过程中考虑关节摩擦的必要性。

在初始运动阶段(0~0.1 s),随着动平台运动速度的增加,关节处两铰接构件之间的润滑薄膜逐渐充分形成,关节摩擦由构件间的直接接触摩擦变为间接接触摩擦,使得考虑关节摩擦和忽略关节摩擦这两种情况下的移动副驱动力差值呈逐渐变小的趋势,但在终止运动阶段(0.9~1.0 s),随着动平台

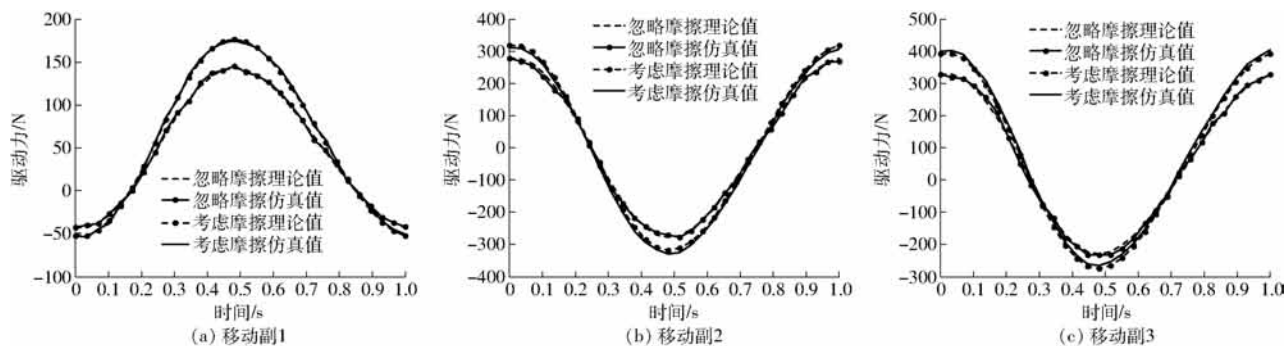


图7 驱动力

Fig. 7 Driving force

运动速度的减小,关节摩擦又重新恢复为直接接触摩擦,使得驱动力差值逐渐变大。在0.4~0.6 s的运动阶段,关节法向约束力的变化对关节摩擦的影响较大,法向约束力在该阶段先增大后减小,使得考虑关节摩擦和忽略关节摩擦的移动副驱动力差值出现先增大后减小的现象,且在0.5 s左右二者的差值最大。

7 结论

(1)将关节摩擦视为非保守力,提出了一种基于拉格朗日算子修正的动力学建模方法。结合拉

格朗日方程法和“库伦+粘性”摩擦模型,建立了包含全部关节摩擦的动力学模型。通过对比数值算例中 Matlab 的理论值和 ADAMS 的仿真值,验证了该建模过程的正确性和考虑关节摩擦的必要性。

(2)针对本文提出的3-RPS并联机器人,在机器人初始运动阶段和终止运动阶段,动平台的运动速度对关节摩擦的影响较大。在一个仿真周期的中间阶段,关节正压力的变化使关节摩擦对机器人动力学模型的影响较明显。仿真结果为该机器人控制系统的摩擦补偿提供了理论依据。

参考文献

- 张东胜,许允斗,姚建涛,等.五自由度混联机器人逆动力学分析[J/OL].农业机械学报,2017,48(9):384-391. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20170949&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.09.049.
- ZHANG Dongsheng, XU Yundou, YAO Jiantao, et al. Inverse dynamic analysis of novel 5-DOF hybrid manipulator[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017,48(9):384-391. (in Chinese)
- 鹿玲,姚建涛,顾伟栋,等.基于Kane方程的冗余驱动5UPS/PRPU并联机床动力学分析[J/OL].农业机械学报,2016,47(6):366-372. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20160648&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.06.048.
- LU Ling, YAO Jiantao, GU Weidong, et al. Dynamics analysis of 5UPS/PRPU parallel machine tool with redundant actuation based on Kane equation[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016,47(6):366-372. (in Chinese)
- ZHANG X, ZHANG X, CHEN Z. Dynamic analysis of a 3-RRR parallel mechanism with multiple clearance joints[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 78: 105-115.
- 山显雷,程刚.高速运动下并联机器人主动支链的动力学耦合特性[J].机器人,2017,39(5):603-607.
- SHAN Xianlei, CHENG Gang. Dynamic coupling characteristics of active branches of parallel manipulator with high speed motion[J]. Robot, 2017,39(5):603-607. (in Chinese)
- 王庚祥,刘宏昭,龚春园,等.考虑关节摩擦效应的并联机构动力学分析[J/OL].农业机械学报,2013,44(11):308-315. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20131152&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.11.052.
- WANG Gengxiang, LIU Hongzhao, GONG Chunyuan, et al. Dynamics analysis of parallel mechanism with joint friction[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013,44(11):308-315. (in Chinese)
- 席万强,陈柏,丁力,等.考虑非线性摩擦模型的机器人动力学参数辨识[J/OL].农业机械学报,2017,48(2):393-399. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20170253&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.02.053.
- XI Wanqiang, CHEN Bai, DING Li, et al. Dynamic parameter identification for robot manipulators with nonlinear friction model[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017,48(2):393-399. (in Chinese)
- 贾凯凯,梅江平,刘松涛,等.4自由度并联机构刚体动力学模型[J].机械工程学报,2016,52(13):10-16.

- JIA Kaikai, MEI Jiangping, LIU Songtao, et al. Rigid-body dynamic model of a four-DOF parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(13): 10–16. (in Chinese)
- 8 许金凯, 王煜天, 张世忠. 驱动冗余重型并联机构的动力学性能[J]. 吉林大学学报(工学版), 2017, 47(4): 1138–1143.
- XU Jinkai, WANG Yutian, ZHANG Shizhong. Dynamic characteristics of a heavy duty parallel mechanism with actuation redundancy[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2017, 47(4): 1138–1143. (in Chinese)
- 9 赵学洋, 赵恒华, 杨世彬, 等. 基于 Kane 方程的 3-TPT 并联机构动力学研究[J]. 机械传动, 2016, 40(1): 36–39.
- ZHAO Xueyang, ZHAO Henghua, YANG Shibin, et al. Dynamics research 3-TPT parallel mechanism based on Kane equation[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2016, 40(1): 36–39. (in Chinese)
- 10 LI B, LI Y, ZHAO X. Kinematics analysis of a novel over-constrained three degree-of-freedom spatial parallel manipulator[J]. Mechanism & Machine Theory, 2016, 104: 222–233.
- 11 HEO J M, CHOI S H, PARK K S. Workspace analysis of a 6-DOF cable-driven parallel robot considering pulley bearing friction under ultra-high acceleration[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2017: 1–13.
- 12 WU G, BAI S. Dynamic modeling and design optimization of a 3-DOF spherical parallel manipulator[J]. Robotics & Autonomous Systems, 2014, 62(10): 1377–1386.
- 13 陈修龙, 董芳杞, 王清. 基于牛顿-欧拉法的 4-UPS-UPU 并联机构动力学方程[J]. 光学精密工程, 2015, 23(11): 3129–3137.
- CHEN Xiulong, DONG Fangqi, WANG Qing. Dynamic equation of 4-UPS-UPU parallel mechanism based on Newton-Euler approach[J]. Optics and Precision Engineering, 2015, 23(11): 3129–3137. (in Chinese)
- 14 陈子明, 刘晓檬, 张扬, 等. 对称两转一移 3-UPU 并联机构的动力学分析[J]. 机械工程学报, 2017, 53(21): 46–53.
- CHEN Ziming, LIU Xiaomeng, ZHANG Yang, et al. Dynamics analysis of a symmetrical 2R1T 3-UPU parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(21): 46–53. (in Chinese)
- 15 ZHANG D, XU Y, YAO J, et al. Kinematics, dynamics and stiffness analysis of a novel 3-DOF kinematically/actuation redundant planar parallel mechanism[J]. Mechanism & Machine Theory, 2017, 116: 203–219.
- 16 季晔, 刘宏昭, 原大宁. 含驱动摩擦的四自由度并联机构动力学分析[J]. 中国机械工程, 2012, 23(8): 910–914, 946.
- JI Ye, LIU Hongzhao, YUAN Daning. Dynamics analysis of a four-DOF parallel mechanism including driver friction[J]. China Mechanical Engineering, 2012, 23(8): 910–914, 946. (in Chinese)
- 17 SHAN X, CHENG G. Structural error and friction compensation control of a 2(3PUS+S) parallel manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 124: 92–103.
- 18 赵德胜, 袁立行, 吴荣军. 考虑摩擦的含 S 副间隙 6-SPS 机构动力学分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2017, 45(6): 79–84, 107.
- ZHAO Desheng, YUAN Lixing, WU Rongjun. Dynamics analysis of 6-SPS parallel mechanism with S pairs clearance considering pairs' friction[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2017, 45(6): 79–84, 107. (in Chinese)
- 19 HAO R, WANG J, ZHAO J, et al. Robust tracking control of 6-DOF parallel electrical manipulator in Joint-Task space with fast friction estimation[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2014, 47(3): 3857–3862.
- 20 山显雷, 程刚. 考虑关节摩擦的 3SPS+1PS 并联机构显式动力学建模研究[J]. 机械工程学报, 2017, 53(1): 28–35.
- SHAN Xianlei, CHENG Gang. Explicit dynamic modeling of a 3SPS+1PS parallel manipulator with joint friction[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(1): 28–35. (in Chinese)
- 21 李仁军. 考虑运动副摩擦时平面闭链五杆机构逆动力学分析[J]. 机械科学与技术, 2013, 32(4): 523–527.
- LI Renjun. The inverse dynamics problem of closed loop five bar mechanism considering joints friction[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2013, 32(4): 523–527. (in Chinese)
- 22 丁千, 翟红梅. 机械系统摩擦动力学研究进展[J]. 力学进展, 2013, 43(1): 112–131.
- DING Qian, ZHAI Hongmei. The advance in researches of friction dynamics in mechanics system[J]. Advances in Mechanics, 2013, 43(1): 112–131. (in Chinese)