

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.12.050

# 五自由度混联机构圆弧插补算法研究

王学雷 张 宾 徐松兵 李传军 吴泰羽 张春龙

(中国农业大学工学院, 北京 100083)

**摘要:** 提出了一种由两自由度并联机构和三自由度串联机构构成的五自由度混联机构-2SPU + U + RRR。建立了该混联机构的三维模型并搭建了试验样机,通过分析将其等效为 U + RRR 串联机构。对等效后的 U + RRR 串联机构进行运动学正反解分析,并验证了正反解求解的正确性,同时对两自由度并联机构进行了运动学反解计算,为机构控制奠定了理论基础。针对传统空间圆弧插补算法计算的复杂性,提出了一种基于等弧度数据采样的新型空间圆弧插补算法,简化了插补算法的计算量。通过 Matlab 仿真和样机实验,验证了上述插补算法的正确性。

**关键词:** 并联机构; 混联机构; 运动学; 圆弧插补算法

**中图分类号:** TH112      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-1298(2017)12-0403-09

## Spatial Arc Interpolation Analysis of Novel 5-DOF Hybrid Mechanism

WANG Xuelei ZHANG Bin XU Songbing LI Chuanjun WU Taiyu ZHANG Chunlong

(College of Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

**Abstract:** A novel 2SPU + U + RRR 5-DOF hybrid mechanism with one 2-DOF parallel mechanism and one 3-DOF serial mechanism was presented. This 5-DOF hybrid mechanism had advantages of large workspace and high stiffness compared with traditional hybrid mechanism. A prototype of this hybrid mechanism was constructed and it was equivalent to a U + RRR parallel mechanism, the analytic formulas for solving its inverse/forward displacement kinematics were derived and the forward displacement was derived based on D-H method. The unique solution of the inverse kinematics was determined based on the shortest distance rule, and the correctness of the analytical expression of the inverse/forward displacement kinematics was verified. The length of the two SPU active legs were derived based on the rotation angle of the Hooke hinge, thus the analytic formulas for solving the inverse displacement kinematics of the 2-DOF parallel mechanism was derived. Theoretical kinematics formulas and results provided foundation for the control of the hybrid mechanism, structure optimization design, dynamics performance analysis, manufacturing and applications and the study also enriches the application area of lower-mobility parallel mechanisms. A novel interpolation algorithm for an arc based on equal radian data sampling was derived, the calculation of interpolation algorithm was greatly simplified. In order to verify the correctness of the interpolation algorithm for an arc, the experimental prototype and its control system were built. The simulation result by Matlab and the experimental prototype result showed that the interpolation algorithm for an arc was correctness and this algorithm had great application prospect.

**Key words:** parallel mechanism; hybrid mechanism; kinematics; arc interpolation algorithm

## 引言

并联机构具有结构简单、刚度大、承载能力大、误差小、动态响应性能好等优点而受到人们的青睐。但因其工作空间小、灵活性差等缺点而难以拓展到

更为广阔的应用领域<sup>[1-4]</sup>。

传统生产线上的工业机器人多采用串联结构形式,这种拓扑结构决定了机器人在工作范围和姿态调整上具有较高的灵活性和柔性,但该种形式的机器人多采用悬臂梁式结构形式,冗长的悬臂结构使

收稿日期: 2017-08-26 修回日期: 2017-10-08

基金项目: “十二五”国家科技支撑计划项目(2015BAF20B02)

作者简介: 王学雷(1987—),男,博士生,主要从事并联机构及其控制研究,E-mail: mystoryqaz@163.com

通信作者: 张宾(1964—),男,教授,博士生导师,主要从事农业机器人技术及数控技术研究,E-mail: zhangbin64@cau.edu.cn

得机器人刚度差、负载能力和动态特性相当有限,且各关节的运动误差逐步累积并被放大,末端执行器很难达到较高的运动精度<sup>[5-8]</sup>。

混联机构结合串联机构和并联机构的优点,弥补了两者之不足而成为机构学领域的研究焦点<sup>[9-12]</sup>,最为典型的代表是瑞典 NEUMANN 博士发明的 Tricept 机器人<sup>[13]</sup>。国内学者也对五自由度混联机构进行了广泛研究, HUANG 等<sup>[14-16]</sup>提出了 TriVariant 以及 3SPR-RR 五自由度混联机构,张东胜等<sup>[17]</sup>提出了 2SPR/UPR-RP 五自由度混联机构,上述混联机构分别以具有两转一移的并联机构 2UPS/UP、3SPR 以及 2SPR/UPR 为基础,串联一个具有两自由度摆头的串联机构组成;王书森等<sup>[18]</sup>提出了一种以四自由度并联机构 2RPU/2UPS 为主体,辅以一具有移动功能的直线导轨组成的五自由度混

联机构,上述五自由度混联机构在实际生产中有着广泛的应用。

螺旋线为空间圆弧和与该圆弧平面垂直的直线运动的合成,相比直线插补算法,圆弧插补算法复杂得多,其中传统空间圆弧插补算法计算繁琐,工作量大<sup>[19-20]</sup>,因此对空间圆弧插补算法的研究极其重要。

本文在结合传统混联机构的基础上,设计一种由两自由度并联机构和三自由度串联机构构成的新型五自由度混联机构,并提出一种基于等弧度数据采样的新型空间圆弧插补算法。

## 1 五自由度混联机构构型

基于橡胶树割胶轨迹要求,本文提出由两自由度并联机构和三自由度串联机构构成的五自由度混联机构,如图 1 所示。

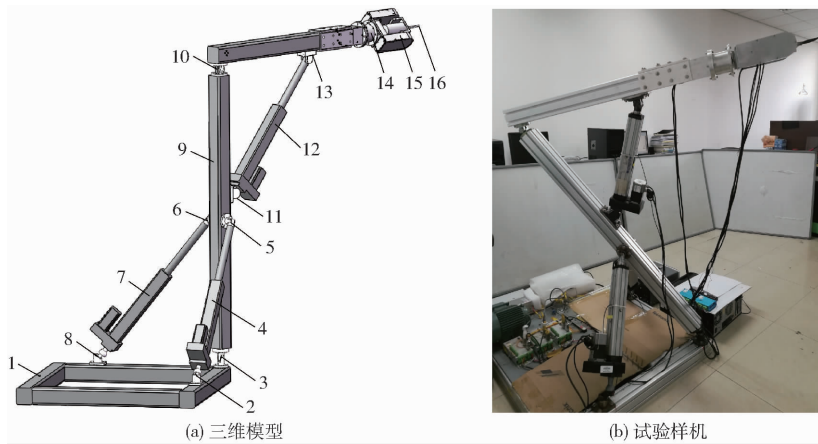


图 1 五自由度混联机构

Fig. 1 5-DOF hybrid mechanism

1. 机座 2、8. 球铰 3、5、6. 虎克铰 9. 大臂 4、7、12. 电动缸 10、11、13、14、15. 转动副 16. 末端执行器

其中,两自由度并联机构由机座、2 个结构完全相同的 SPU(球副-移动副-虎克铰)型驱动分支以及 1 个 U(虎克铰)型约束分支构成,可等效为 2SPU + U 并联机构,其三维模型以及结构简图如图 2 所示。通过控制 2 个 SPU 驱动分支的长度即可实现该并联机构位姿的调整。

三自由度串联机构包括 3 个转动自由度,可等效为 RRR 串联机构。图 1 中转动副 10 由 RPR(转动副-移动副-转动副)型驱动分支驱动,该驱动分支两端为转动副 11 和 13,分别与混联机构大臂和小臂相连,增加了 RRR 串联机构的刚度。

结合上述两自由度并联机构 2SPU + U 与三自

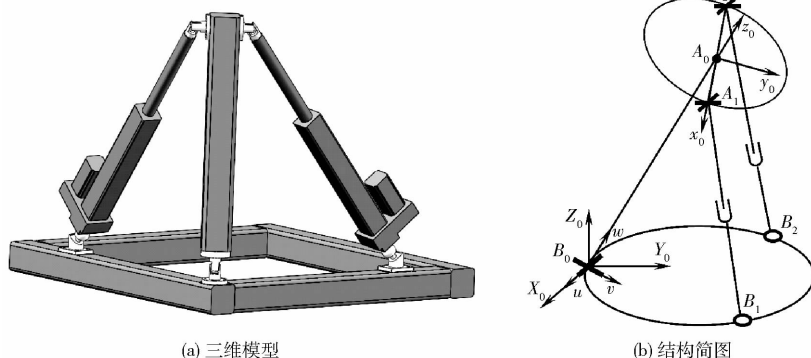


图 2 两自由度并联机构

Fig. 2 2-DOF parallel mechanism

由度串联机构 RRR, 该五自由度混联机构可等效为 2SPU + U + RRR 机构。

## 2 混联机构运动学分析

由上述五自由度混联机构结构图可知, 2 个

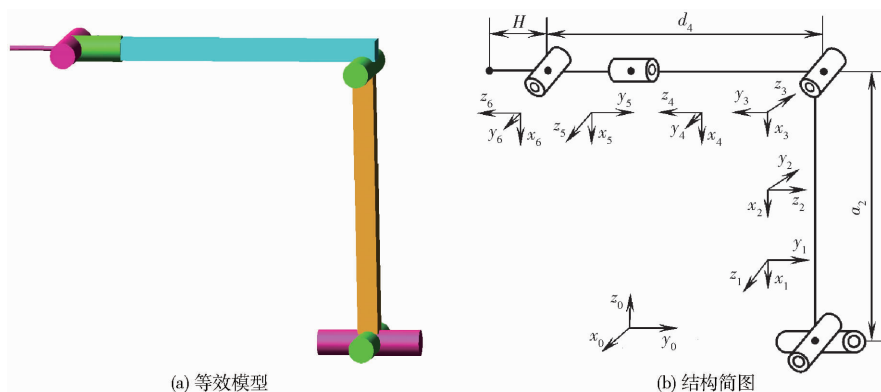


图 3 U + RRR 串联机构简图

Fig. 3 Schematic diagram of U + RRR series mechanism

串联机构的运动学分析有旋量理论<sup>[21]</sup>和 D-H 法<sup>[22-25]</sup>, 由于 D-H 法可快速简洁地求出机械臂正、逆运动学表达式, 故本文采用 D-H 法对该 U + RRR 机构进行运动学分析。通过图 3 可以看出该 U + RRR 串联机构具有 5 个旋转关节, 各关节轴线之间互相垂直或平行, 建立其连杆坐标系, 各坐标系  $z$  轴与各关节轴线重合, 如图 3 所示。其 D-H 参数如表 1 所示, 其中,  $\theta_i$  为连杆  $i$  绕关节  $i$  的  $Z_{i-1}$  轴的转角;  $d_i$  为连杆  $i$  沿关节  $i$  的  $Z_{i-1}$  轴的位移;  $a_i$  为沿  $X_i$  方向上连杆  $i$  的长度;  $\alpha_i$  为连杆  $i$  两关节轴线之间的扭角。

表 1 U + RRR 串联机构 D-H 参数

Tab. 1 D-H parameters of U + RRR series mechanism

连杆 $i$	关节转角 $\theta_i$	距离 $d_i/cm$	杆长 $a_i/cm$	扭角 $\alpha_i$
1	$\theta_1$	0	0	$-\pi/2$
2	$\theta_2$	0	$a_1$	$-\pi/2$
3	$\theta_3$	0	0	$-\pi/2$
4	$\theta_4$	$d_1$	0	$-\pi/2$
5	$\theta_5$	0	0	$\pi/2$
6	0	$H$	0	0

### 2.1 U + RRR 串联机构正向运动学分析

机器人正向运动是指给出机器人各连杆几何参数和各关节变量, 求解机器人末端执行器在固定坐标系中的位置和姿态。根据连杆坐标系之间的齐次变换关系求出该五自由度串联机械臂相邻关节坐标系之间的齐次变换矩阵 ${}^0T_1$ 、 ${}^1T_2$ 、 ${}^2T_3$ 、 ${}^3T_4$ 、 ${}^4T_5$ 、 ${}^5T_6$  为

SPU 型驱动分支和一个 RPR 驱动分支分别驱动虎克铰 3 和转动副 10, 将上述 3 个驱动分支舍去, 该混联机构便可等效为 U + RRR 五自由度串联机构, 如图 3 所示。因此, 对该混联机构的运动学分析可简化为对 U + RRR 串联机构的分析。

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 & a_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & a_1\sin\theta_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & 0 & -\sin\theta_4 & 0 \\ \sin\theta_4 & 0 & \cos\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & 0 & \sin\theta_5 & H\sin\theta_5 \\ \sin\theta_5 & 0 & -\cos\theta_5 & -H\cos\theta_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

机械臂末端执行器相对于基坐标系之间的齐次变换矩阵 ${}^0T_6$ 可表示

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} n_x &= c\theta_5(c\theta_2s\theta_4 - c\theta_3c\theta_4s\theta_2) - s\theta_2s\theta_3s\theta_5 \\ n_y &= s\theta_5(c\theta_1c\theta_3 + c\theta_2s\theta_1s\theta_3) - \\ & c\theta_5(c\theta_4(c\theta_1s\theta_3 - c\theta_2c\theta_3s\theta_1) - s\theta_1s\theta_2s\theta_4) \\ n_z &= s\theta_5(c\theta_3s\theta_1 - c\theta_1c\theta_2s\theta_3) - \\ & c\theta_5(c\theta_4(s\theta_1s\theta_3 + c\theta_1c\theta_2c\theta_3) + c\theta_1s\theta_2s\theta_4) \\ o_x &= c\theta_2c\theta_4 + c\theta_3s\theta_2s\theta_4 \\ o_y &= s\theta_4(c\theta_1s\theta_3 - c\theta_2c\theta_3s\theta_1) + c\theta_4s\theta_1s\theta_2 \\ o_z &= s\theta_4(s\theta_1s\theta_3 + c\theta_1c\theta_2c\theta_3) - c\theta_1c\theta_4s\theta_2 \\ a_x &= s\theta_5(c\theta_2s\theta_4 - c\theta_3c\theta_4s\theta_2) + c\theta_5s\theta_2s\theta_3 \\ a_y &= -s\theta_5(c\theta_4(c\theta_1s\theta_3 - c\theta_2c\theta_3s\theta_1) - s\theta_1s\theta_2s\theta_4) - \\ & c\theta_5(c\theta_1c\theta_3 + c\theta_2s\theta_1s\theta_3) \\ a_z &= -s\theta_5(c\theta_4(s\theta_1s\theta_3 + c\theta_1c\theta_2c\theta_3) + c\theta_1s\theta_2s\theta_4) - \\ & c\theta_5(c\theta_3s\theta_1 - c\theta_1c\theta_2s\theta_3) \\ p_x &= Hs\theta_5(c\theta_2s\theta_4 - c\theta_3c\theta_4s\theta_2) - a_1s\theta_2 + d_1s\theta_2s\theta_3 + \\ & Hc\theta_5s\theta_2s\theta_3 \\ p_y &= a_1c\theta_2s\theta_1 - d_1(c\theta_1c\theta_3 + c\theta_2s\theta_1s\theta_3) - \\ & Hs\theta_5(c\theta_4(c\theta_1s\theta_3 - c\theta_2c\theta_3s\theta_1) - s\theta_1s\theta_2s\theta_4) - \\ & Hc\theta_5(c\theta_1c\theta_3 + c\theta_2s\theta_1s\theta_3) \\ p_z &= -d_1(c\theta_3s\theta_1 - c\theta_1c\theta_2s\theta_3) - a_1c\theta_1c\theta_2 - \\ & Hs\theta_5(c\theta_4(s\theta_1s\theta_3 + c\theta_1c\theta_2c\theta_3) + c\theta_1s\theta_2s\theta_4) - \\ & Hc\theta_5(c\theta_3s\theta_1 - c\theta_1c\theta_2s\theta_3) \end{aligned}$$

上式中,  $s\theta_i = \sin\theta_i$ ,  $c\theta_i = \cos\theta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ 。至此, 该 U + RRR 串联机械臂运动学正解求解完毕。

## 2.2 U + RRR 串联机构运动学反解分析

机器人逆运动学为正运动学的逆过程, 即已知机器人末端执行器在基坐标系中的位置和姿态, 求解相应的各关节变量, 它是机器人运动控制和轨迹规划的基础, 也是运动学的重要部分。本文采用解析法求解该 U + RRR 机械臂的逆解, 求解过程如下:

(1) 求解  $\theta_3$

设该机械臂所期望的位姿为

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (2)$$

设  ${}^0T_2 = {}^0T_1 {}^1T_2$ , 利用逆变换  ${}^0T_2^{-1}$  和  ${}^5T_6^{-1}$  分别左乘和右乘方程(1)的两边, 令矩阵两端元素(1, 4)、(2, 4)、(3, 4)对应相等, 并设  $A = Ha_z - p_z$ ,  $B = p_y - Ha_y$ ,  $M = Ha_x - p_x$ , 化简得

$$\begin{cases} \cos\theta_2(a_1 - d_1\sin\theta_3) = A\cos\theta_1 + B\sin\theta_1 & (3) \\ \sin\theta_2(a_1 - d_1\sin\theta_3) = M & (4) \\ -d_1\cos\theta_3 = B\cos\theta_1 - A\sin\theta_1 & (5) \end{cases}$$

式(3)~(5)平方相加, 化简得

$$A^2 + B^2 + M^2 = a_1^2 - 2a_1d_1\sin\theta_3 + d_1^2 \quad (6)$$

即

$$\sin\theta_3 = \frac{a_1^2 + d_1^2 - A^2 - B^2 - M^2}{2a_1d_1} \quad (7)$$

$$\cos\theta_3 = \pm \sqrt{1 - \sin^2\theta_3} =$$

$$\pm \sqrt{\frac{2a_1d_1 - a_1^2 - d_1^2 + A^2 + B^2 + M^2}{2a_1d_1}} \quad (8)$$

由式(7)、(8)可得

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \text{Atan2}\left(\frac{a_1^2 + d_1^2 - A^2 - B^2 - M^2}{2a_1d_1}, \right. \\ & \left. \pm \sqrt{\frac{2a_1d_1 - a_1^2 - d_1^2 + A^2 + B^2 + M^2}{2a_1d_1}}\right) \quad (9) \end{aligned}$$

(2) 求解  $\theta_2$

由式(4)得

$$\sin\theta_2 = \frac{M}{a_1 - d_1\sin\theta_3} \quad (10)$$

$$\cos\theta_2 = \pm \sqrt{1 - \sin^2\theta_2} = \pm \sqrt{\frac{a_1 - d_1\sin\theta_3 - M}{a_1 - d_1\sin\theta_3}} \quad (11)$$

由式(10)、(11)可得

$$\theta_2 = \text{Atan2}\left(\frac{M}{a_1 - d_1\sin\theta_3}, \pm \sqrt{\frac{a_1 - d_1\sin\theta_3 - M}{a_1 - d_1\sin\theta_3}}\right) \quad (12)$$

(3) 求解  $\theta_1$

由式(5)得

$$-A\sin\theta_1 + B\cos\theta_1 = N \quad (13)$$

其中

$$N = -d_1\cos\theta_3$$

利用三角函数代换关系, 引入中间变量  $r$  和  $\varphi$ , 设

$$A = r\cos\varphi \quad (14)$$

$$B = r\sin\varphi \quad (15)$$

$$r = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (16)$$

得

$$\varphi = \text{Atan2}(B, A) \quad (17)$$

则式(13)可转换为

$$\sin\varphi\cos\theta_1 - \cos\varphi\sin\theta_1 = \frac{N}{r} \quad (18)$$

利用三角函数和差化积公式, 式(18)可转换为

$$\sin(\varphi - \theta_1) = \frac{N}{r} \quad (19)$$

$$\cos(\varphi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{N}{r}\right)^2} \quad (20)$$

则有

$$\theta_1 = \text{Atan2}(B, A) - \text{Atan2}\left(\frac{N}{r}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{N}{r}\right)^2}\right) \quad (21)$$

(4) 求解  $\theta_4$

设  ${}^0T_4 = {}^0T_1^{-1}T_2^{-2}T_3^{-3}T_4$ , 利用逆变换  ${}^0T_4^{-1}$  左乘方程(1)的两边, 并令矩阵两端元素(1,4)、(2,4)对应相等, 即

$$\begin{aligned} p_{64x} &= -p_y(\cos\theta_1\sin\theta_3 - \cos\theta_2\cos\theta_3\sin\theta_1) - \\ & p_z(\sin\theta_1\sin\theta_3 + \cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3) - \\ & a_1\cos\theta_3 - p_x\cos\theta_3\sin\theta_2 = H\cos\theta_4\sin\theta_5 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} p_{64y} &= p_x\cos\theta_2 - p_z\cos\theta_1\sin\theta_2 + p_y\sin\theta_1\sin\theta_2 = \\ & H\sin\theta_4\sin\theta_5 \end{aligned} \quad (23)$$

令  $L = H\cos\theta_4\sin\theta_5$ ,  $K = H\sin\theta_4\sin\theta_5$ , 式(23)与式(22)相除, 化简得

$$\theta_4 = \text{Atan2}(K, L) \quad (24)$$

(5) 求解  $\theta_5$

设  ${}^0T_5 = {}^0T_1^{-1}T_2^{-2}T_3^{-3}T_4^{-4}T_5$ , 利用逆变换  ${}^0T_5^{-1}$  左乘方程(1)的两边, 并令矩阵两端元素(1,4)、(2,4)对应相等, 即

$$\begin{aligned} p_{65x} &= p_y[\sin\theta_1(\sin\theta_2\sin\theta_4 + \cos\zeta_2\cos\theta_3\cos\theta_4) - \\ & \cos\theta_1\cos\theta_4\sin\theta_3] + \\ & p_x(\cos\theta_2\sin\theta_4 - \cos\theta_3\cos\theta_4\sin\theta_2) - \\ & a_1\cos\theta_3\cos\theta_4 - p_z[\cos\theta_1(\sin\theta_2\sin\theta_4 + \\ & \cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4) + \cos\theta_4\sin\theta_1\sin\theta_3] = H\sin\theta_5 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} p_{65y} &= p_y(\cos\theta_1\cos\theta_3 + \cos\theta_2\sin\theta_1\sin\theta_3) + \\ & p_z(\cos\theta_3\sin\theta_3 - \cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3) + \\ & d_1 - a_1\sin\theta_3 - p_x\sin\theta_2\sin\theta_3 = -H\cos\theta_5 \end{aligned} \quad (26)$$

令  $W = H\sin\theta_5$ ,  $G = -H\cos\theta_5$ , 式(25)与式(26)相除, 得

$$\theta_5 = \text{Atan2}(W, -G) \quad (27)$$

至此, 完成了对该 U + RRR 机械臂的逆运动学求解。

由式(9)、(12)、(21)可知, 逆解  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  和  $\theta_3$  均存在正负 2 种可能解, 因此该机械臂逆解具有多解性, 即可以有多个位形来到达机械臂所要求的位姿, 而对机械臂进行控制时, 只需选择其中一个适合的解来处理。在实际应用中, 一般根据最短行程原则从多组关节角中选出机械臂的最优解。最短行程原则是指选择与当前关节角差距最小的下一组解作为最优解, 从而使两时刻之间关节运动距离最短, 以减少

机器人运动过程中能量的消耗。在关节角最优解选择过程中, 一旦遇到有 2 个可能解, 立刻应用最短行程原则进行判断, 再利用新确定的最优解根据最短行程原则确定后续关节角, 以此类推, 每个关节只有一组关节角是合理的。最优解的确定流程如图 4 所示。

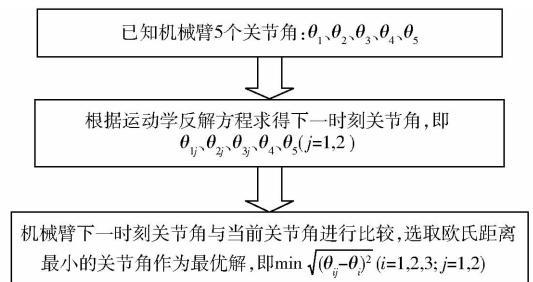


图 4 机械臂逆解唯一性确定流程图

Fig. 4 Flow chart of inverse kinematics ascertain for robot arm

### 2.3 机械臂运动学正反解验证

为验证上述机械臂运动学正反解求解的正确性, 设机械臂末端执行器沿一直线运动, 直线的起始点、中间点和终止点坐标分别为  $p_s = (0, -89, 132)$ 、 $p_m = (10, -94, 137)$  和  $p_e = (20, -99, 142)$ , 运动过程中其末端执行器  $z$  轴姿态始终为  $a = (a_x, a_y, a_z) = (0, -1, 0)$ 。以机械臂在直线起始点、中间点和终止点时正反解为例, 在 Matlab 中编写程序对正反解正确性进行验证, 验证流程如图 5 所示。

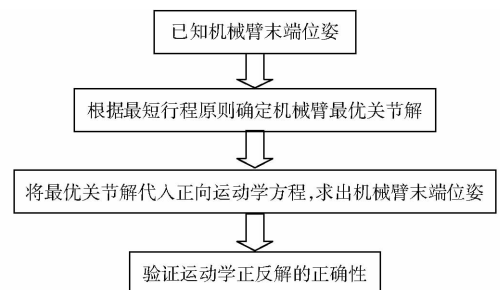


图 5 机械臂运动学正反解验证流程图

Fig. 5 Verification flow chart of inverse/forward kinematics for robot arm

根据图 4 所示流程图求出机械臂在直线起始点、中间点和终止点时最优关节角, 如表 2 所示。将表 2 中求得的 3 组机械臂最优关节角代入运动学正解方程式(1)中, 求得机械臂末端位置和姿态, 如表 3 所示。

表 2 U + RRR 机械臂逆解求解

Tab. 2 Inverse kinematics of U + RRR series mechanism

位置	末端执行器位置/cm			末端方位			关节转角/rad				
	$p_x$	$p_y$	$p_z$	$a_x$	$a_y$	$a_z$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$
$p_s$	0	-89	132	0	-1	0	$-3.0924 \times 10^{-1}$	0	$-3.0473 \times 10^{-1}$	0	$4.5140 \times 10^{-3}$
$p_m$	10	-94	137	0	-1	0	$-2.7173 \times 10^{-1}$	$9.1131 \times 10^{-2}$	$-2.3451 \times 10^{-1}$	$5.9448 \times 10^{-1}$	$4.3624 \times 10^{-2}$
$p_e$	20	-99	142	0	-1	0	$-2.3421 \times 10^{-1}$	$1.6864 \times 10^{-1}$	$-1.5634 \times 10^{-1}$	$4.8158 \times 10^{-1}$	$8.4195 \times 10^{-2}$

表3 U+RRR机械臂正解求解

Tab.3 Forward kinematics of U+RRR series mechanism

位置	关节转角/rad					末端方位			末端执行器位置/cm		
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$a_x$	$a_y$	$a_z$	$p_x$	$p_y$	$p_z$
$p_s$	$-3.0924 \times 10^{-1}$	0	$-3.0473 \times 10^{-1}$	0	$4.5140 \times 10^{-3}$	0	-1	0	0	-89	132
$p_m$	$-2.7173 \times 10^{-1}$	$9.1131 \times 10^{-2}$	$-2.3451 \times 10^{-1}$	$5.9448 \times 10^{-1}$	$4.3624 \times 10^{-2}$	0	-1	0	10	-94	137
$p_e$	$-2.3421 \times 10^{-1}$	$1.6864 \times 10^{-1}$	$-1.5634 \times 10^{-1}$	$4.8158 \times 10^{-1}$	$8.4195 \times 10^{-2}$	0	-1	0	20	-99	142

从表2和表3可以看出,表3中机械臂3组最优关节角对应的末端执行器位置和姿态与表2中机械臂3组关节角对应的位置和姿态完全一致,说明运动学正反解的正确性。

## 2.4 2SPU+U并联机构运动学分析

当求出上述U+RRR串联机械臂 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 后,通过坐标变换可求出并联机构两电动缸的长度与 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 的关系。

在静平台 $B_0$ 点建立固定坐标系 $B_0X_0Y_0Z_0$ 与动坐标系 $B_0uvw$ , $X_0$ 轴与约束支链上虎克铰U的固定转动轴轴线重合, $Z_0$ 轴与静平台垂直, $Y_0$ 轴根据右手定则确定; $u$ 轴与 $X_0$ 轴重合, $w$ 轴沿 $B_0A_0$ 方向, $v$ 轴根据右手法则确定,在 $A_0$ 点建立动坐标系 $A_0x_0y_0z_0$ , $x_0$ 轴为从点 $A_0$ 指向点 $A_1$ 的方向, $z_0$ 轴沿 $B_0A_0$ 方向, $y_0$ 轴根据右手法则确定,如图2所示。初始时刻固定坐标系 $B_0X_0Y_0Z_0$ 与动坐标系 $B_0uvw$ 重合,机构动、静平台平行,且 $\theta_1=0$ 、 $\theta_2=0$ ,动坐标系 $A_0x_0y_0z_0$ 在固定坐标系 $B_0X_0Y_0Z_0$ 中位置为 $(0,0,Z)$ ,其中, $Z$ 为动平台与固定平台的初始距离。 $B_i(i=0,1,2)$ 在固定坐标系 $B_0X_0Y_0Z_0$ 中坐标为

$$\begin{cases} B_0 = (B_{0x}, B_{0y}, B_{0z}) = (0, 0, 0) \\ B_1 = (B_{1x}, B_{1y}, B_{1z}) = (rb/2, rb/2, 0) \\ B_2 = (B_{2x}, B_{2y}, B_{2z}) = (-rb/2, rb/2, 0) \end{cases} \quad (28)$$

点 $A_i(i=0,1,2)$ 在动坐标系 $A_0x_0y_0z_0$ 中位置为

$$\begin{cases} A_0 = (A_{0x}, A_{0y}, A_{0z}) = (0, 0, 0) \\ A_1 = (A_{1x}, A_{1y}, A_{1z}) = (ra, 0, 0) \\ A_2 = (A_{2x}, A_{2y}, A_{2z}) = (-ra, 0, 0) \end{cases} \quad (29)$$

设动平台首先绕 $u$ 轴旋转 $\theta_1$ ,然后绕 $v$ 轴旋转 $\theta_2$ ,由于所有变换矩阵均相对运动坐标系 $B_0uvw$ 进行,根据“从左向右”计算原则,得相应的齐次变换矩阵为

$$T_1 = T(u, \theta_1)T(v, \theta_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \cos\theta_2 & 0 \\ -\cos\theta_1 \sin\theta_2 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

此时,动平台上 $A_i(i=0,1,2)$ 点在固定坐标系 $B_0X_0Y_0Z_0$ 中的位置可表示为

$$\begin{bmatrix} {}^{B_0}A_{ix} \\ {}^{B_0}A_{iy} \\ {}^{B_0}A_{iz} \\ 1 \end{bmatrix} = T_1 T_Z \begin{bmatrix} A_{ix} \\ A_{iy} \\ A_{iz} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

式中 $T_Z$ ——初始时刻动平台相对于固定坐标系的齐次变换矩阵

则SPU驱动分支的长度可表示为

$$l_i = |A_i - B_i| = \sqrt{({}^{B_0}A_{ix} - B_{ix})^2 + ({}^{B_0}A_{iy} - B_{iy})^2 + ({}^{B_0}A_{iz} - B_{iz})^2} \quad (i=1,2) \quad (31)$$

## 3 空间圆弧插补算法研究

提出了一种基于等弧度数据采样的空间圆弧插补算法,该方法对圆弧路径进行等弧度离散分割,再对分割后的圆弧进行粗插补,不需求解圆弧所在的平面方程,也无需坐标转换,简化了插补算法的计算量。对于圆心角 $\theta$ ,需考虑 $0 < \theta \leq \pi$ 和 $\pi < \theta < 2\pi$ 两种情况。

(1)对于圆心角 $0 < \theta \leq \pi$ 的情况

设给定圆弧上起始点 $p_s = (x_s, y_s, z_s)$ 、终止点 $p_e = (x_e, y_e, z_e)$ 以及圆弧圆心 $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,设圆弧半径为 $R$ ,则有

$$l_{p_0 p_s} = l_{p_0 p_e} = R \quad (32)$$

现根据起始点 $p_s$ 、终止点 $p_e$ 以及圆心 $p_0$ 求取圆弧上插补点 $p_i$ 的位置坐标,如图6a所示。首先从起始点 $p_s$ 到终止点 $p_e$ 对圆弧进行等弧度分割,弧长的分割精度为 $\Delta L$ ,由于弧长与其圆心角有关,故采取对圆心角等角度细分的方法对圆弧进行等弧度细分,根据分割弧长 $\Delta L$ 计算完成整个圆弧轨迹所需

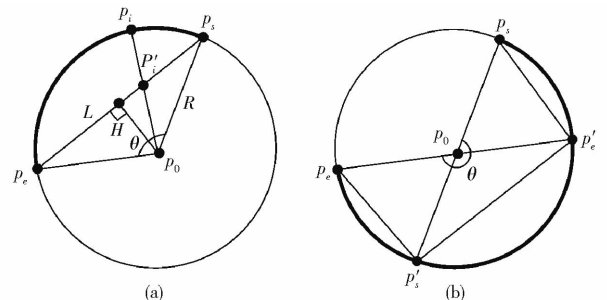


图6 空间圆弧插补原理

Fig.6 Interpolation principle of space arc

的插补次数  $n$ , 再计算圆弧上第  $j$  个插补点的坐标  $p_j$ , 具体计算过程如下:

通过起始点  $p_s$  和终止点  $p_e$  的位置坐标可计算出弦  $p_s p_e$  的长度  $L$ , 即

$$L = \sqrt{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2 + (z_e - z_s)^2} \quad (33)$$

根据半径  $R$  及弦长  $L$  计算圆心到弦  $p_s p_e$  的距离  $H$ , 即

$$H = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \quad (34)$$

根据半径  $R$  以及圆心角计算圆弧  $p_s p_e$  的长度  $K$  为

$$K = R\theta \quad (35)$$

根据圆弧分割精度  $\Delta L$  计算圆弧插补次数  $n$  为

$$n = \frac{R\theta}{\Delta L} \quad (36)$$

设第  $j$  个插补点为  $p_j$ , 其与圆心  $p_0$  的连线与弦  $p_s p_e$  相交于点  $p'_j$ , 则  $p_s p'_j$  的长度为

$$l_{p_s p'_j} = \frac{L}{2} - \frac{H}{\tan\left(\frac{\pi - \theta}{2} + \frac{j\theta}{n}\right)} \quad (37)$$

点  $p'_j$  的坐标为

$$\begin{cases} x'_j = x_s + \frac{l_{p_s p'_j}(x_e - x_s)}{L} \\ y'_j = y_s + \frac{l_{p_s p'_j}(y_e - y_s)}{L} \\ z'_j = z_s + \frac{l_{p_s p'_j}(z_e - z_s)}{L} \end{cases} \quad (38)$$

直线  $p_0 p'_j$  的长度为

$$l_{p_0 p'_j} = \sqrt{(x'_j - x_0)^2 + (y'_j - y_0)^2 + (z'_j - z_0)^2} \quad (39)$$

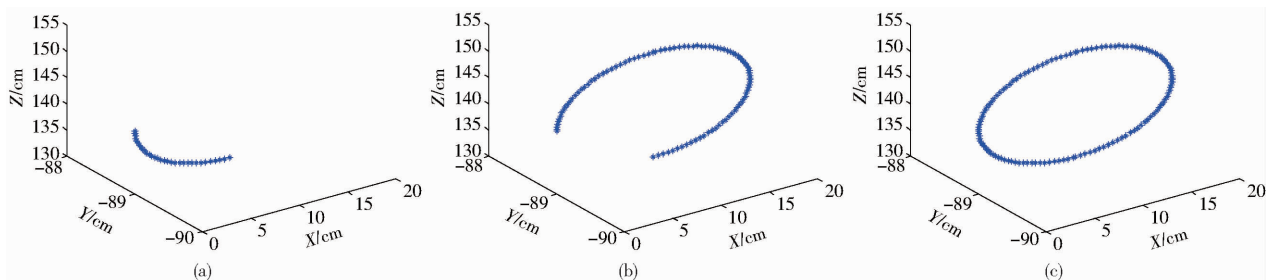


图 7 空间圆弧插补轨迹图

Fig. 7 Track charts of space arc interpolation

(2) 对圆心角  $\pi < \theta < 2\pi$  的情况进行圆弧 Matlab 仿真: 设圆弧的起始点、终止点和圆心坐标分别为  $p_s = (10, -89, 132)$ 、 $p_e = (0, -89, 142)$  和  $p_0 = (10, -89, 142)$ 。直线  $p_s p_0$  延长线与圆弧交点坐标为  $p'_s = (10, -89, 152)$ , 直线  $p_e p_0$  延长线与圆弧交点坐标为  $p'_e = (20, -89, 142)$ , 在 Matlab 中编写圆弧插补算法程序, 绘制的圆弧轨迹如图 7b 所示。

(3) 绘制一个整圆: 取上述圆弧圆心角  $0 < \theta \leq \pi$  与圆心角  $\pi < \theta < 2\pi$  两种情况相同的起始点、终

点  $p_0$ 、 $p'_j$  和  $p_j$  共线, 进而求得插补点  $p_j$  的坐标为

$$\begin{cases} x_j = x_0 + \frac{R(x'_j - x_0)}{p_0 p'_j} \\ y_j = y_0 + \frac{R(y'_j - y_0)}{p_0 p'_j} \\ z_j = z_0 + \frac{R(z'_j - z_0)}{p_0 p'_j} \end{cases} \quad (40)$$

(2) 对于圆心角  $\pi < \theta < 2\pi$  的情况

圆弧  $p_s p_e$  对应圆心角  $\pi < \theta < 2\pi$  的情况如图 6b 所示, 欲求圆弧  $p_s p_e$  上的插补点  $p_j$ , 可延长直线  $p_s p_0$  与圆弧交于点  $p'_s$ , 延长直线  $p_e p_0$  与圆弧交于点  $p'_e$ , 此时, 圆弧  $p_s p_e$  被分为圆弧  $p_s p'_s$ 、圆弧  $p'_s p'_e$  以及圆弧  $p'_e p_e$ , 上述每段圆弧所对应的圆心角均小于  $\pi$ , 故对每段圆弧可采用圆心角  $0 < \theta \leq \pi$  对应的情况进行插补点的计算, 在此不再叙述。

根据以上推导可求出每个插补点  $p_j$  的位置坐标, 对机器人在这些插补点的位置进行逆解计算, 便可求出机器人各驱动关节所需的位移。

## 4 空间圆弧插补算法验证

### 4.1 圆弧插补算法 Matlab 仿真验证

(1) 对圆心角  $0 < \theta \leq \pi$  的情况进行 Matlab 仿真: 设圆弧的起始点、终止点和圆心坐标分别为  $p_s = (0, -89, 142)$ 、 $p_e = (10, -89, 132)$  和  $p_0 = (10, -89, 142)$ 。设圆弧分割精度为  $\Delta L = 0.1$  mm, 在 Matlab 中编写圆弧插补算法程序, 绘制的圆弧轨迹如图 7a 所示。

止点和圆心坐标点, 在 Matlab 中编写绘制整圆的圆弧插补算法程序, 绘制的圆弧轨迹如图 7c 所示。

### 4.2 插补算法试验样机验证

为对上述圆弧插补算法进行验证, 基于提出的 2SPU + U + RRR 五自由度混联机构, 搭建实验样机, 控制系统采用“运动控制卡 (DSP28335) + PC 机”的方法, 以 PC 机作为上位机, 运动控制卡 (DSP28335) 作为下位机, 由 DSP28335 控制器完成控制信号的生成, 采用毛笔在白纸上画出圆弧轨迹

的方法对上述圆弧插补算法进行验证。通过 TI 公司提供的 CCS5.5 编译软件对该混联机构运动控制程序进行编译处理,实现对机构的运动控制。

通过上述圆弧插补算法可得圆弧的实时插补坐标,图 8 为该混联机构所画的圆弧轨迹。其中,图 8a 为圆弧圆心角  $0 < \theta \leq \pi$ ,圆弧的起始点、终止点和圆心坐标分别为  $p_s = (0, -89, 142)$ 、 $p_e = (10, -89, 132)$  和  $p_o = (10, -89, 142)$  所对应的空间圆弧;图 8b 为圆弧圆心角  $\pi < \theta < 2\pi$ ,且圆弧的起始点、终止点和圆心坐标分别为  $p_s = (10, -89, 132)$ 、 $p_e = (0, -89, 142)$  和  $p_o = (10, -89, 142)$  所对应的空间圆弧;图 8c 为上述两个圆弧合并成整圆。

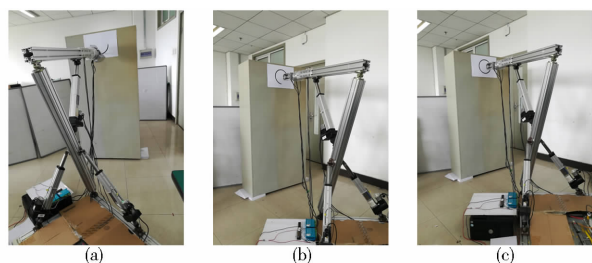


图 8 圆弧插补实验

Fig. 8 Experiment pictures of space arc interpolation

由图 8 可以看出,所画的圆弧轨迹平滑,衔接紧

密,笔画清晰,验证了上述圆弧插补算法的正确性。

## 5 结论

(1)提出了一种由两自由度并联机构和三自由度串联机构构成的五自由度混联机构,其中,两自由度并联机构增加机构的承载能力和刚度,三自由度串联机构增加机器人的刚度、灵活性和工作空间,相对传统混联机构,该机构具有更大工作空间和更高刚度。

(2)将五自由度混联机构等效为 U + RRR 串联机构,对串联机构进行运动学正反解分析,确定了逆解唯一解的选取原则,并验证了运动学正反解解析表达式的正确性。根据得到的虎克铰 U 两轴线转动角度  $\theta_1, \theta_2$ ,通过坐标转换求得两驱动分支 SPU 杆长的表达式,为机构的运动控制奠定理论基础。

(3)为满足对工件复杂曲面的加工需要,提出了一种基于等弧度数据采样的新型空间圆弧插补算法,该方法对圆弧路径进行等弧度离散分割,直接在笛卡儿坐标系中进行,无需坐标转换,简化了插补算法的计算量,通过 Matlab 仿真和样机实验验证了该方法的正确性。

## 参 考 文 献

- MENG X D, GAO F, WU S F. Type synthesis of parallel robotic mechanisms: framework and brief review [J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 78: 177 - 186.
- LIM H, LEE S H, SO B R, et al. Design of a new 6-DOF parallel mechanism with a suspended platform [J]. International Journal of Control, Automation, and Systems, 2015, 13(4): 942 - 950.
- PLITEA N, SZILAGHYI A, PISLA D. Kinematic analysis of a new 5-DOF modular parallel robot for brachytherapy [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2015, 31: 70 - 80.
- 耿明超, 赵铁石, 王唱, 等. 4-UPS/UPR 并联机构动力学分析 [J/OL]. 农业机械学报, 2014, 45(8): 299 - 306. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?file\\_no=20140848&flag=1](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20140848&flag=1). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2014.08.048.
- GENG Mingchao, ZHAO Tieshi, WANG Chang, et al. 4-UPS /UPR parallel mechanism dynamic analysis [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(8): 299 - 306. (in Chinese)
- DU X D, SHAO H K, CHEN Y J, et al. An online method for serial robot self-calibration with CMAC and UKF [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2016, 42: 39 - 48.
- MUSTAFA A, KERIM C, SHI Z P, et al. Comparison of four different heuristic optimization algorithms for the inverse kinematics solution of a real 4-DOF serial robot manipulator [J]. Neural Computing and Applications, 2016, 27: 825 - 836.
- 王梦, 付铁, 丁洪生, 等. 7 自由度串联机器人运动学分析 [J]. 机械设计与制造, 2016(8): 8 - 11.
- WANG Meng, FU Tie, DING Hongsheng, et al. Kinematics analysis of a 7-DOF serial robot [J]. Machinery Design and Manufacture, 2016(8): 8 - 11. (in Chinese)
- 田海波, 马宏伟, 魏娟. 串联机器人机械臂工作空间与结构参数研究 [J/OL]. 农业机械学报, 2013, 44(4): 196 - 201. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?file\\_no=20130434&flag=1](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20130434&flag=1). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.04.034.
- TIAN Haibo, MA Hongwei, WEI Juan. Workspace and structural parameters analysis for manipulator of serial robot [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(4): 196 - 201. (in Chinese)
- LU Y, DAI Z H, YE N J. Dynamics analysis of novel hybrid robotic arm with three fingers [J]. Robotica, 2016, 34(12): 2759 - 2775.
- GUO W J, LI R F, CAO C Q. Kinematics, dynamics, and control system of a new 5-degree-of-freedom hybrid robot manipulator [J]. Advances in Mechanical Engineering, 2016, 8(11): 1 - 19.
- ZHOU H, QIN Y, CHEN H, et al. Structural synthesis of five-degree-of-freedom hybrid kinematics mechanism [J]. Journal of



- Engineering Design, 2016, 27(4-6): 390-412.
- 12 曹毅, 秦友蕾, 陈海, 等. 基于 GF 集理论的五自由度混联机器人构型综合[J/OL]. 农业机械学报, 2015, 46(11): 392-398. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?file\\_no=20151153&flag=1](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20151153&flag=1). DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2015.11.053.  
CAO Yi, QIN Youlei, CHEN Hai, et al. Structural synthesis of 5-DOF hybrid mechanisms based on GF set [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(11): 392-398. (in Chinese)
- 13 盛东义, 赵勇, 王皓, 等. Tricept 并联机构的弹性动力学性能[J]. 机械设计与研究, 2012, 28(6): 23-29.  
SHENG Dongyi, ZHAO Yong, WANG Hao, et al. Kineto-elastic-dynamics (ked) analysis of Tricept parallel mechanism [J]. Machine Design and Research, 2012, 28(6): 23-29. (in Chinese)
- 14 HUANG T, LI T M, ZHAO X M, et al. Conceptual design and dimensional synthesis for a 3-DOF module of the TriVariant-a novel 5-DOF reconfigurable hybrid robot [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2005, 21(3): 449-456.
- 15 LIU H T, HUANG T, ZHAO X M, et al. Optimal design of the TriVariant robot to achieve a nearly axial symmetry of kinematic performance [J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(12): 1643-1652.
- 16 李彬, 黄田, 张利敏, 等. 一种新型五自由度混联机械手的概念设计及尺度综合[J]. 中国机械工程, 2011, 22(16): 1900-1905.  
LI Bin, HUANG Tian, ZHANG Limin, et al. Conceptual design and dimensional synthesis of a novel 5-DOF hybrid manipulator [J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(16): 1900-1905. (in Chinese)
- 17 张东胜, 许允斗, 赵永生, 等. 五自由度混联机器人逆动力学分析[J/OL]. 农业机械学报, 2017, 48(9): 384-391. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?file\\_no=20170949&flag=1](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20170949&flag=1). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.09.049.  
ZHANG Dongsheng, XU Yundou, ZHAO Yongsheng, et al. Inverse dynamic analysis of novel 5-DOF hybrid manipulator [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(9): 384-391. (in Chinese)
- 18 王书森, 梅瑛, 李瑞琴. 新型 3T2R 龙门式混联机床动力学模型[J]. 机械工程学报, 2016, 52(15): 81-90.  
WANG Shusen, MEI Ying, LI Ruiqin. Solving dynamics for a novel 3T2R gantry hybrid machine tool [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(15): 81-90. (in Chinese)
- 19 高宏卿, 宾鸿赞. 空间圆弧变换插补原理与算法[J]. 组合机床与自动化加工技术, 1993(3): 2-6.  
GAO Hongqing, Bin Hongzan. Theory and algorithm of space circular arc transformation interpolation [J]. Modular Machine Tool and Automatic Manufacturing Technique, 1993(3): 2-6. (in Chinese)
- 20 王忠平, 田作华. 基于矢量的 DDA 空间圆弧插补算法[J]. 机械设计与制造, 2007(9): 164-165.  
WANG Zhongping, TIAN Zuohua. DDA 3D circular interpolation based on vector [J]. Machinery Design and Manufacture, 2007(9): 164-165. (in Chinese)
- 21 李盛前, 谢小鹏. 基于旋量理论和 Sylvester 结式法的 6 自由度机器人逆运动学求解分析[J]. 农业工程学报, 2015, 31(20): 48-54.  
LI Shengqian, XIE Xiaopeng. Analysis of inverse kinematic solution for 6R robot based on screw theory and Sylvester resultant [J]. Transactions of the CSAE, 2015, 31(20): 48-54. (in Chinese)
- 22 李国利, 姬长英, 顾宝兴, 等. 多末端苹果采摘机器人机械手运动学分析与试验[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(12): 14-29. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?file\\_no=20161203&flag=1](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20161203&flag=1). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.12.003.  
LI Guoli, JI Changying, GU Baoxing, et al. Kinematics analysis and experiment of apple harvesting robot manipulator with multiple end-effectors [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(12): 14-29. (in Chinese)
- 23 高艺, 马国庆, 于正林, 等. 一种六自由度工业机器人运动学分析及三维可视化仿真[J]. 中国机械工程, 2016, 27(13): 1726-1731.  
GAO Yi, MA Guoqing, YU Zhenglin, et al. Kinematics analysis of an 6-DOF industrial and 3D visualization simulation [J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27(13): 1726-1731. (in Chinese)
- 24 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- 25 熊有伦. 机器人技术基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2011.