

# 3T1R 并联机构结构降耦设计与运动学分析

沈惠平 张震 杨廷力 邵国为

(常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

**摘要:** 根据基于方位特征(POC)的并联机构设计理论与方法,提出了一种结构简单、能实现三平移一转动的并联机构,拓扑结构分析后发现其耦合度  $k$  较大( $k=2$ ),其位置正解及动力学计算较复杂;为此,设计了结构降耦后的新机型,证明其耦合度  $k=1$ ,其位置正解易用一维搜索法求出,并给出了基于序单开链法的该机构位置正解求解的一维搜索法及其数值解;同时,基于导出的机构位置反解公式,分析了动平台的工作空间及其转动能力,探讨了该机构发生3种奇异位形的条件。

**关键词:** 并联机构; 方位特征; 耦合度; 结构降耦; 运动学分析; 一维搜索法

**中图分类号:** TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2017)10-0380-10

## Structure Coupling-reducing Design and Kinematics Analysis of 3T1R Parallel Mechanism

SHEN Huiping ZHANG Zhen YANG Tingli SHAO Guowei

(Research Center for Advanced Mechanism Theory, University of Changzhou, Changzhou 213016, Chian)

**Abstract:** There is a wide range of industrial applications for the 4-DOF parallel mechanism which can achieve SCARA type output motion (i. e., three translations and one rotation). However, due to the complex topological structures, the research and development of its new model are still relatively few. Firstly, according to the parallel mechanism design theory and method based on the orientation characteristic (POC), a SCARA type parallel mechanism whose structure was simple was proposed. Because the coupling degree was 2, positive solution of position and dynamics calculation of the parallel mechanism were very complex. So the new model after structure coupling-reducing ( $k=1$ ) was given, its positive solutions can be easily solved by one-dimensional search method. Then the three main topological characteristics of POC set, degree of freedom and the coupling degree were respectively analyzed. The kinematics analysis of the new model whose coupling degree was one after structure coupling-reducing was given, and the solution algorithm for the forward position of this parallel mechanism was established. This method can obtain all the numerical solutions of the forward position by using one-dimensional searching method, and can verify the correctness of the forward position by the derived calculation formula of the inverse position. Finally, based on the inverse position of the mechanism, the working space of this parallel mechanism was obtained and the singularity of the mechanism was discussed, which provided a theoretical foundation for the prototype design and application of this mechanism.

**Key words:** parallel mechanism; orientation characteristic; coupling degree; structure coupling-reducing; kinematics analysis; one-dimensional searching method

### 引言

国内外对实现 SCARA 型(三平移一转动, 3T1R)输出运动的并联机器人进行了一些研究和应用开发<sup>[1-5]</sup>。国内对 3T1R 并联机构的理论研究较

多,样机研制及其应用开发相对迟缓。2000年,赵铁石等<sup>[6]</sup>提出了一种 4-URU 型三平移一转动并联机器人;2001年金琼等<sup>[7]</sup>根据基于单开链的并联机构设计方法,提出了一类三平移一转动并联机器人,并申请了一组 5 个具有单动平台的三平移一转动并

联机构专利<sup>[8]</sup>, 但未研制样机; 黄田等<sup>[9]</sup>于 2010 年开发了具有 2~3 个动平台的四自由度三平移一转动的系列 Cross-IV 型高速搬运机器人; 2012 年刘辛军等<sup>[10]</sup>研制了具有一个动平台的 X<sub>4</sub> 型并联机构样机。

根据基于方位特征集 (Position and orientation characteristics, POC) 和序单开链单元 (Single open chain, SOC) 的并联机构拓扑结构设计理论和方法<sup>[11]</sup>, 作者团队系统综合了 18 种三平移一转动并联机构<sup>[12-15]</sup>。

本文首先对其中之一的三平移一转动并联机构进行 POC 集、自由度、耦合度 3 个主要拓扑结构特征的分析, 发现其耦合度  $k$  较大 ( $k=2$ ); 为此, 对这一机构进行了结构降耦设计, 使耦合度降低为 1, 但其基本功能 (自由度和动平台输出运动) 保持不变; 采用基于序单开链法的位置正解求解原理, 对降耦后的并联机构 ( $k=1$ ) 建立一个仅含一个虚拟变量的位置约束方程, 并采用一维搜索法求得其全部正解数值解; 又通过求解机构的位置反解, 对该机构进行工作空间、转动能力及奇异性分析。

## 1 3T1R 并联机构及其拓扑特性分析

### 1.1 机构设计

本文提出的机构由动平台 1、静平台 0 通过 4 条支链连接而成, 如图 1 所示<sup>[16]</sup>, 其中, 第 I、III 约束支链包含 5 个转动副, 其连接方式表示为  $R_{i1} // R_{i2} // R_{i3} \perp R_{i4} // R_{i5}$  ( $i=1, 3$ ) ( $//$  表示平行,  $\perp$  表示垂直, 下同); 第 II、IV 条为无约束支链, 其连接方式表示为  $R_{j1} - S_{j1} - S_{j2}$  ( $j=2, 4$ )。动平台 1 上转动副  $R_{15}$ 、 $R_{35}$  的轴线和其法线相平行; 静平台 0 上的转动副  $R_{11}$ 、 $R_{21}$ 、 $R_{31}$  和  $R_{41}$  为驱动副, 设转动副  $R_{11}$  与  $R_{31}$  的轴线垂直, 即  $R_{11} \perp R_{31}$ 。

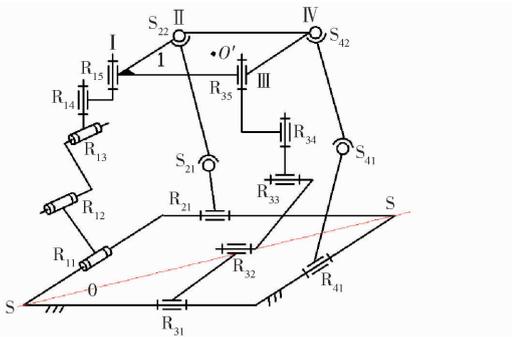


图 1 3T1R 原始并联机构

Fig. 1 Original 3T1R PM

该机构的特点是: ①仅含两条约束支链 (I、III 支链), 且为简单支链; 所含运动副、构件少, 制造、装配工艺性好。②机构仅关于静平台 0 的对角线

SS 对称。

### 1.2 3T1R 机构的拓扑特性分析

#### 1.2.1 机构拓扑特性分析的理论基础

##### (1) 机构的 POC 集

$$M_b = \bigcup_{i=1}^m M_{J_i} = \bigcup_{j=1}^k M_{S_j} \quad (1)$$

$$M_{Pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{b_i} \quad (2)$$

式中  $M_b$ ——支链末端构件的 POC 集

$M_{J_i}$ ——第  $i$  个运动副 (Joint) 的 POC 集 (末端构件上的同一个基点  $O'$ )

$M_{S_j}$ ——当支链含有子 SOC 串联时, 第  $j$  个子 SOC 的 POC 集

$M_{Pa}$ ——机构动平台的 POC 集

$M_{b_i}$ ——第  $i$  条支链末端的 POC 集

##### (2) 自由度

并联机构自由度公式为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \quad (3)$$

$$\text{其中 } \xi_{L_j} = \dim \left\{ \left( \bigcap_{i=1}^j M_{b_i} \right) \cup M_{b_{(j+1)}} \right\} \quad (4)$$

$$v = m - n + 1$$

式中  $F$ ——机构自由度

$f_i$ ——第  $i$  个运动副的自由度

$m$ ——运动副数  $n$ ——构件数

$v$ ——独立回路数

$\xi_{L_j}$ ——第  $j$  个回路的独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}$ ——前  $j$  条支链组成的子并联机构的 POC 集

$M_{b_{(j+1)}}$ ——第  $(j+1)$  条支链末端构件的 POC 集

##### (3) 单开链的约束度

第  $j$  个单开链 ( $SOC_j$ ) 的约束度为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{L_j} \quad (5)$$

式中  $m_j$ ——第  $j$  个  $SOC_j$  的运动副数

$f_i$ ——第  $i$  个运动副自由度 (不含局部自由度)

$I_j$ ——第  $j$  个  $SOC_j$  的驱动副数

##### (4) 耦合度的定义

独立回路为  $v$  的 BKC (Basic kinematics chain) 可分解为  $v$  个单开链  $SOC (\Delta_j)$  ( $j=1, 2, \dots, v$ ), 因此, BKC 的耦合度  $k$  定义为

$$k = \frac{1}{2} \min \left( \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right) \quad (6)$$

式中,  $\min \left( \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right)$  为 BKC 分解为  $v$  个  $SOC (\Delta_j)$ ,

可有多种分配方案,取  $\sum |\Delta_j|$  为最小者。

其物理意义是:耦合度反映了机构各独立回路运动变量之间的关联、依赖程度,也反映了机构运动学、动力学问题求解的复杂性,且已证明: $k$  越大,拓扑结构的复杂度越高;对于  $k=0$  的机构,其每个回路的运动量都能独立求出,最终能得到位置正向解析解;若  $k>0$ ,意味着机构每个回路的运动量不能独立求出,而需多个回路方程联立求解,且耦合度  $k$  恰为机构冗余回路( $\Delta_j>0$ )的虚拟变量数或约束回路( $\Delta_j<0$ )的运动约束方程数,可用  $k$  维搜索法求得其位置正解或动力学逆解的数值解。

### 1.2.2 3T1R 机构的拓扑特性分析

#### 1.2.2.1 机构的 POC 集和自由度

(1) 选定动平台 1 上任意一点  $O'$  为基点

(2) 确定 4 条支链末端构件的 POC 集

由式(1)有

$$M_{bi} = \left[ r^2 \left( // \diamond \begin{matrix} t^3 \\ (R_{i1}, R_{i4}) \end{matrix} \right) \right] \quad (i=1,3)$$

$$M_{bj} = \left[ r^3 \right] \quad (j=2,4)$$

(3) 确定第 1 个独立回路的位移方程数  $\xi_{L1}$

① 第 I、III 条支链组成第 1 个回路,由式(4)有

$$\xi_{L1} = \dim \{ M_{b1} \cup M_{b3} \} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

② 第 I、III 条支链组成的子并联机构的 DOF 和 POC,由式(3)有

$$F_{(1-2)} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^1 \xi_{Lj} = 10 - 6 = 4$$

由式(2)有

$$M_{pa(1-2)} = M_{b1} \cap M_{b3} = \left[ r^1 \left( // R_{14} \right) \right]$$

(4) 确定第 2 个独立回路的位移方程数  $\xi_{L2}$

① 由第 1 子并联机构及第 II 条支链组成第 2 个回路,由式(4)有

$$\xi_{L2} = \dim \{ M_{pa(1-2)} \cup M_{b2} \} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

② 第 1 子并联机构及第 II 条支链组成的第 2 个子并联机构 DOF 和 POC 集,由式(3)有

$$F_{(1-3)} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{Lj} = 16 - (6 + 6) = 4$$

由式(2)有

$$M_{pa(1-3)} = M_{pa(1-2)} \cap M_{b2} = \left[ r^1 \left( // R_{14} \right) \right]$$

(5) 确定第 3 个独立回路的位移方程数  $\xi_{L3}$

由第 2 个回路及第 IV 条支链组成第 3 个回路,

由式(4)有

$$\xi_{L3} = \dim \{ M_{pa(1-3)} \cup M_{b4} \} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

(6) 确定机构自由度

由式(3)有

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^3 \xi_{Lj} = 22 - (6 + 6 + 6) = 4$$

(7) 确定机构的 POC 集

由式(2)有

$$M_{pa} = M_{pa(1-3)} \cap M_{b4} = \left[ r^1 \left( // R_{14} \right) \right]$$

因此,动平台 1 具有 3 个移动和 1 个绕其法线方向的转动输出。

#### 1.2.2.2 机构的耦合度

由上已求得  $\xi_{Li} = 6 (i=1,2,3)$ ,因此由式(5)分别求得其约束度为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = 10 - 2 - 6 = 2$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = 6 - 1 - 6 = -1$$

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{m_3} f_i - I_3 - \xi_{L3} = 6 - 1 - 6 = -1$$

进一步,由式(6)有

$$k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^v |\Delta_j| = \frac{1}{2} (2 + 1 + 1) = 2$$

由此可知,该机构尽管结构简单,但耦合度仍较大,为  $k=2$ ,因此,该机构位置正解还较复杂,但可通过结构降耦设计,使其  $k$  降低为 1,在保持机构的基本功能——POC 和 DOF 不变的前提下,使机构的运动学正解和动力学分析方便求解。

## 2 3T1R 降耦机构的设计

根据作者提出的机构结构降耦方法<sup>[17-18]</sup>,将图 1 中的动平台 1 上的  $R_{15}$  和  $R_{35}$  重合,则成为如图 2 所示的降耦机构<sup>[19]</sup>,即该降耦机构可视为由混合支链 I 及无约束支链 II、III 组成。

混合支链 I: HSOC<sub>1</sub> { -  $R_{11} // R_{12} // R_{13} \perp R_{14} // R_{35} // R_{34} \perp R_{33} // R_{32} // R_{31}$  - }, 支链 II: SOC<sub>2</sub> { -  $R_{15} - S_{22} - S_{21} - R_{21}$  - }, 支链 III: SOC<sub>3</sub> { -  $R_{41} - S_{41} - S_{42}$  - }。

现对该机构进行拓扑分析如下:

### 2.1 降耦机构的 POC 集和自由度

(1) 确定支路末端构件的 POC 集

$$M_{si} = \left[ r^2 \left( // \diamond \begin{matrix} t^3 \\ (R_{i1}, R_{i4}) \end{matrix} \right) \right] \quad (i=1,3)$$

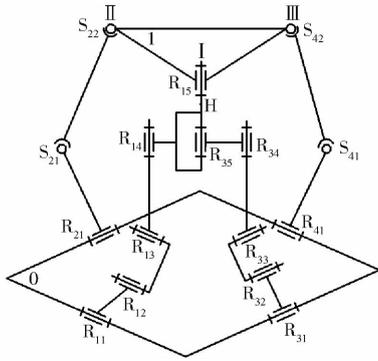


图 2 3T1R 并联机构的降耦设计

Fig. 2 Coupling-reducing design of 3T1R PM

$$M_{bj} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \quad (j=2,4)$$

(2) 确定第 1 个独立回路的位移方程数  $\xi_{L1}$

① 混合支链 I 构成第 1 个回路, 由式(4)知

$$\xi_{L1} = \dim \{ M_{s1} \cup M_{s2} \} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

② 该子并联机构的 DOF 和 POC 集由式(2)、

(3)有

$$F_{(sub-H)} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^1 \xi_{Lj} = 10 - 6 = 4$$

$$M_{(sub-H)} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 (//R_{14}) \end{bmatrix}$$

(3) 确定第 2 个独立回路独立位移方程数  $\xi_{L2}$

① 由混合支链 I、支链 II 组成第 2 个回路, 由式(4)有

$$\xi_{L2} = \dim \{ M_H \cup M_{b2} \} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

② 该子并联机构 DOF 和 POC 集, 由式(2)、

(3) 分别有

$$F_{(1-2)} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{Lj} = 16 - (6 + 6) = 4$$

$$M_{pa(1-2)} = M_H \cap M_{b2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 (//R_{14}) \end{bmatrix}$$

(4) 确定第 3 个独立回路的位移方程数  $\xi_{L3}$

由式(4)有

$$\xi_{L3} = \dim \{ M_{pa(1-2)} \cup M_{b3} \} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

(5) 确定机构自由度 DOF

由式(3)有

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^3 \xi_{Lj} = 22 - (6 + 6 + 6) = 4$$

(6) 确定机构的 POC 集

由式(2)有

$$M_{pa} = M_{pa(1-2)} \cap M_{b3} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 (//R_{14}) \end{bmatrix}$$

可见, 降耦设计后, 机构的自由度仍为  $F=4$ , 动平台输出仍为三平移一转动。

### 2.2 降耦机构的耦合度

同理, 已求得  $\xi_{Li} = 6 (i=1,2,3)$ , 因此, 由式(5)得各回路的约束度分别为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = 9 - 2 - 6 = 1$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = 7 - 1 - 6 = 0$$

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{m_3} f_i - I_3 - \xi_{L3} = 6 - 1 - 6 = -1$$

显然, 该机构只包含一个 BKC, 其耦合度为

$$k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^v |\Delta_j| = \frac{1}{2} (1 + 0 + 1) = 1$$

由此可知, 通过动平台 1 上运动副的复合, 机构的基本功能 (POC 和 DOF) 都没变, 但机构的耦合度已降低为 1, 因此, 机构的位置正解可由基于序 SOC 的一维搜索法较易求得。

## 3 3T1R 降耦机构的位置分析

### 3.1 位置正解分析

#### 3.1.1 坐标系建立及符号标注

机构位置分析求解模型如图 3 所示, 静平台 0 为边长  $2a$  的正方形, 动平台 1 为直角边长为  $2m$  的等腰直角三角形, 4 个主动副  $R_{11}$ 、 $R_{21}$ 、 $R_{31}$ 、 $R_{41}$  均位于各边中点。静坐标系  $OXYZ$  建立在静平台 0 的中心, 且  $X$  轴平行于  $R_{31}$  的轴线,  $Y$  轴平行于  $R_{11}$  的轴线,  $Z$  轴由右手法则确定; 而动坐标系  $Puvw$  位于动平台 1 的中心点  $P$ ,  $u$  轴平行于  $R_{15}S_{42}$  边,  $v$  轴平行于  $R_{15}S_{22}$  边,  $w$  轴同样由右手法则确定。

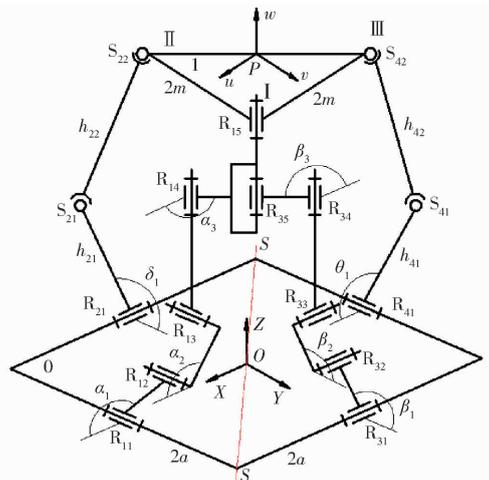


图 3 3T1R 降耦机构的位置分析模型

Fig. 3 Position analysis model of 3T1R coupling-reducing PM

为理解方便, 将图 3 机构展开为平面图, 如图 4 所示, 其中, 直线  $SS$  为正方形静平台 0 的对角线。

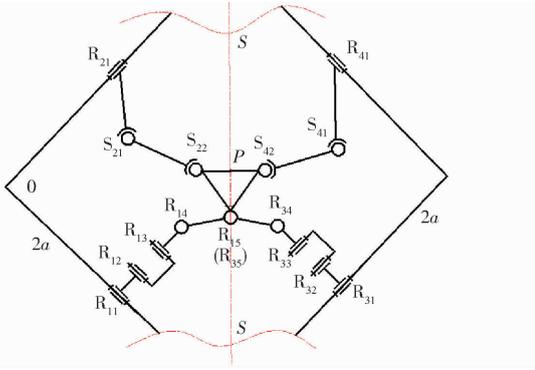


图4 3T1R降耦机构的俯视展开图

Fig.4 Expanding top-view of 3T1R coupling-reducing PM

机构的主要结构参数为:混合支链 I 中,如图 5 所示,  $h_{ij}$  表示 2 个转动副  $R_{ij}$ 、 $R_{i,j+1}$  之间的杆长 ( $i =$

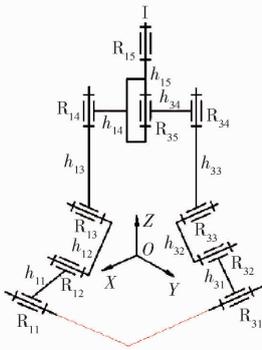


图5 混合支链结构

Fig.5 Structure of hybrid branched chain

1, 3;  $j = 1, 2, 3, 4$ ); 如图 3 所示,  $\alpha_i$  表示转动副  $R_{1i}$  的转角 ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\beta_j$  表示转动副  $R_{3j}$  的转角 ( $j = 1, 2, 3$ )。无约束支链 II、III 中 (图 3),  $h_{1i}$  表示转动副  $R_{1i}$  与球副  $S_{1i}$  之间的杆长,  $h_{12}$  表示球副  $S_{11}$  与球副  $S_{12}$  之间的杆长 ( $i = 2, 4$ );  $\delta_1$ 、 $\theta_1$  分别表示转动副  $R_{21}$ 、 $R_{41}$  的转角。

动平台 1 绕 Z 轴方向的转角为  $\gamma$ , 如图 6 所示。

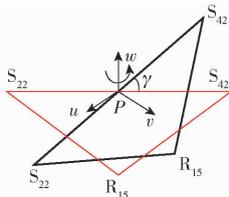


图6 姿态角  $\gamma$  的度量

Fig.6 Measurement of angle  $\gamma$

该机构位置正解可描述为:已知输入角  $\alpha_1$ 、 $\delta_1$ 、 $\beta_1$ 、 $\theta_1$ , 求动平台 1 的位置  $P(x, y, z)$  及转角  $\gamma$ 。

3.1.2 基于序 SOC 的机构位置正解求解原理及算法

根据式(5), 单开链的约束度有正值、零、负值 3 种形式, 其物理意义是:

(1) 约束度为正值  $SOC(\Delta_j^+)$ , 会使机构自由度增加  $\Delta_j^+$ ; 为确定机构的运动, 需在  $SOC(\Delta_j^+)$  上设定  $\Delta_j^+$  虚拟变量。

(2) 约束度为零的  $SOC(\Delta_j^0)$ , 不影响机构自由度, 其运动具有确定性, 即其位置正解能独立求解。

(3) 约束度为负值的  $SOC(\Delta_j^-)$ , 使机构自由度减少  $|\Delta_j^-|$ , 即存在  $|\Delta_j^-|$  个约束方程。

因  $SOC(\Delta_j^+)$  中的虚拟变量数目  $\Delta_j^+$ , 恰等于约束方程数目  $|\Delta_j^-|$ , 因此, 易解出  $\Delta_j^+$  个变量的真实值。特别是当  $\Delta_j^+ = |\Delta_j^-| = 1$  时, 易用一维搜索法求得。

根据上述求解原理, 进一步给出该机构基于序 SOC 的位置正解的求解算法, 如下:

(1) 对于  $\Delta_1 > 0$  的混合支链  $HSOC_1 \{ -R_{11} // R_{12} // R_{13} \perp R_{14} // R_{35} // R_{34} \perp R_{33} // R_{32} // R_{31} - \}$  而言, 若设转动副角  $R_{12}$  的转角  $\alpha_2$  为虚拟初值  $\alpha_2^*$ , 则可由  $HSOC_1$  求得: 转动副  $R_{31}$  的转角  $\alpha_3$  为  $\alpha_2^*$  的函数表达式 (记号 \* 表示该值为虚拟赋值, 下同)。

(2) 由  $\Delta_2 = 0$  的  $SOC_2 \{ -R_{15} - S_{22} - S_{21} - R_{21} - \}$ , 由杆长约束条件  $S_{21}S_{22} = h_{22}$ , 从而可求得动平台 1 的输出转角  $\gamma$ , 也为  $\alpha_2^*$  的函数表达式。

(3) 由  $\Delta_3 < 0$  的  $SOC_3 \{ -R_{41} - S_{41} - S_{42} - \}$ , 建立杆长约束条件  $l_{S_{41}S_{42}} = h_{42}$ , 可得到一个含有虚拟赋值  $\alpha_2^*$  的目标函数。

利用一维搜索法, 从  $0^\circ \sim 360^\circ$  不断改变虚拟赋值  $\alpha_2^*$  的初值, 直到满足该目标函数为止。此时, 对应的  $\alpha_2^*$  即为  $\alpha_2$  真实值, 将其代回步骤(1)~(3)的计算过程, 即可得到该机构位置正解的实数解。下面分别详细阐述各 SOC 的位置分析。

3.1.3 求解  $\Delta_1 > 0$  的  $HSOC_1$  上各运动副位置

由  $HSOC_1$  中的分支链  $\{ -R_{11} - R_{12} - R_{13} - R_{14} - R_{35} - R_{15} - \}$ , 可依次求得点  $R_{11}$ 、 $R_{12}$ 、 $R_{13}$ 、 $R_{14}$ 、 $R_{35}$ 、 $R_{15}$  的坐标, 再由矢量方程  $l_{OP} = l_{OR_{15}} - l_{PR_{15}}$  求出 P 点的坐标为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2 + h_{14} \cos \alpha_3 - \sqrt{2} m \cos \left( \gamma + \frac{\pi}{4} \right) \\ h_{14} \sin \alpha_3 - \sqrt{2} m \sin \left( \gamma + \frac{\pi}{4} \right) \\ h_{11} \sin \alpha_1 + h_{12} \sin \alpha_2 + h_{13} + h_{15} \end{bmatrix} \quad (7)$$

同理, 由  $HSOC_1$  的另一条分支链  $\{ -R_{31} - R_{32} - R_{33} - R_{34} - R_{35} - R_{15} - \}$ , 可依次求得点  $R_{31}$ 、 $R_{32}$ 、 $R_{33}$ 、 $R_{34}$ 、 $R_{35}$ 、 $R_{15}$  的坐标, 再由矢量方程  $l_{OP} = l_{OR_{15}} - l_{PR_{15}}$  求出 P 点的坐标为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_{34} \cos \beta_3 - \sqrt{2} m \cos \left( \gamma + \frac{\pi}{4} \right) \\ a + h_{31} \cos \beta_1 + h_{32} \cos \beta_2 - h_{34} \sin \beta_3 - \sqrt{2} m \sin \left( \gamma + \frac{\pi}{4} \right) \\ h_{31} \sin \beta_1 + h_{32} \sin \beta_2 + h_{33} + h_{15} \end{bmatrix} \quad (8)$$

由式(7)、(8)可得

$$h_{12} \sin \alpha_2 - h_{32} \sin \beta_2 = t_1 \quad (9)$$

$$-h_{34} \sin \beta_3 = t_2 + h_{14} \sin \alpha_3 \quad (10)$$

$$-h_{34} \cos \beta_3 = t_3 + h_{14} \cos \alpha_3 \quad (11)$$

其中  $t_1 = -h_{11} \sin \alpha_1 - h_{13} + h_{31} \sin \beta_1 + h_{33}$

$$t_2 = -a - h_{31} \cos \beta_1 - h_{32} \cos \beta_2$$

$$t_3 = a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2$$

设定转动副  $R_{12}$  的转角  $\alpha_2$  为虚拟变量  $\alpha_2^*$ , 则由

式(9)可知, 转动副  $R_{32}$  的转角  $\beta_2^*$  为  $\alpha_2^*$  的函数, 即

$$\beta_2^* = \arcsin \frac{h_{12} \sin \alpha_2^* - t_1}{h_{32}}$$

从式(10)、(11)中消去  $\beta_3$ , 有

$$A_1 \sin \alpha_3 + B_1 \cos \alpha_3 + C_1 = 0$$

令  $k_1 = \tan \frac{\alpha_3}{2} \quad (12)$

解得  $k_1 = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2 - C_1^2}}{C_1 - B_1} \quad (13)$

其中  $A_1 = 2t_2 h_{14} \quad B_1 = 2t_3 h_{14}$

$$C_1 = t_2^2 + t_3^2 + h_{14}^2 - h_{34}^2$$

因此,  $\alpha_3$  也是虚拟变量  $\alpha_2$  的函数。

### 3.1.4 求解 $\Delta_2 = 0$ 的 SOC<sub>2</sub> 上各运动副位置

由支链 II, 得  $S_{21}$ 、 $S_{22}$  的坐标分别为  $(0, -a + h_{21} \cos \delta_1, h_{21} \sin \delta_1)$ 、 $(a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2 + h_{14} \cos \alpha_3 + 2m \sin \gamma, h_{14} \sin \alpha_3 - 2m \cos \gamma, h_{11} \sin \alpha_1 + h_{12} \sin \alpha_2 + h_{13} + h_{15})$ 。于是, 由杆长约束条件  $l_{S_{21}S_{22}} = h_{22}$ , 整理并化简有

$$A_2 \sin \gamma + B_2 \cos \gamma + C_2 = 0$$

令  $k_2 = \tan \frac{\gamma}{2} \quad (14)$

解得  $k_2 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 + B_2^2 - C_2^2}}{C_2 - B_2} \quad (15)$

其中  $A_2 = 4m(a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2 + h_{14} \cos \alpha_3)$

$$B_2 = -4m(h_{14} \sin \alpha_3 + a - h_{21} \cos \delta_1)$$

$$C_2 = (h_{14} \sin \alpha_3 + a - h_{21} \cos \delta_1)^2 + 4m^2 + (a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2 + h_{14} \cos \alpha_3)^2 + (h_{11} \sin \alpha_1 + h_{12} \sin \alpha_2 + h_{13} + h_{15} - h_{21} \sin \delta_1)^2 - h_{22}^2$$

可见, 输出转角  $\gamma$  同样为虚拟变量  $\alpha_2^*$  的函数。

### 3.1.5 建立 $\Delta_3 < 0$ 的 SOC<sub>3</sub> 上的目标函数

由支链 III, 得  $S_{41}$ 、 $S_{42}$  的坐标分别为  $(-a + h_{41} \cos \theta_1, 0, h_{41} \sin \theta_1)$ 、 $(a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2 + h_{14} \cos \alpha_3 - 2m \cos \gamma, h_{14} \sin \alpha_3 - 2m \sin \gamma, h_{11} \sin \alpha_1 + h_{12} \sin \alpha_2 + h_{13} + h_{15})$ 。同样, 由杆长约束条件  $l_{S_{41}S_{42}} = h_{42}$ , 整理并化简得

$$f(\alpha_2^*) = (h_{14} \sin \alpha_3 - 2m \sin \gamma)^2 + (2a - h_{41} \cos \theta_1 + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2^* + h_{14} \cos \alpha_3 -$$

$$2m \cos \gamma)^2 + (h_{11} \sin \alpha_1 + h_{12} \sin \alpha_2^* + h_{13} + h_{15} - h_{41} \sin \theta_1)^2 - h_{42}^2 \quad (16)$$

通过不断改变  $\alpha_2^*$ , 可使  $f(\alpha_2^*) = 0$ ; 再将满足  $f(\alpha_2^*) = 0$  的真实值  $\alpha_2$  代入式(7), 即可得到动平台 1 的坐标  $P(x, y, z)$ ; 将  $\alpha_2$  代入式(14)、(15), 即可得到动平台 1 的姿态角  $\gamma$ 。

为方便理解, 上述计算过程如图 7 所示。

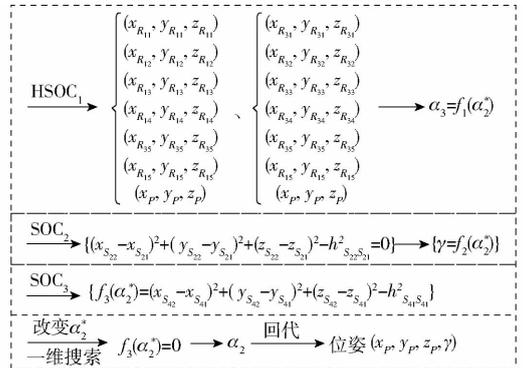


图 7 降耦机构位置正解的流程

Fig. 7 Flow chart of forward position of coupling-reducing PM

## 3.2 位置反解分析

该机构位置反解可描述为: 已知动平台 1 的位置  $P(x, y, z)$  及转角  $\gamma$ , 求输入转角  $\alpha_1$ 、 $\beta_1$ 、 $\delta_1$ 、 $\theta_1$ 。

### 3.2.1 求主动副 $R_{11}$ 的输入角 $\alpha_1$

由式(7)可知

$$y = h_{14} \sin \alpha_3 - \sqrt{2} m \sin \left( \gamma + \frac{\pi}{4} \right)$$

则  $\alpha_3 = \arcsin \frac{\sqrt{2} m \sin \left( \gamma + \frac{\pi}{4} \right) + y}{h_{14}} \quad (17)$

由式(7)中的  $x, z$  坐标, 可得

$$-h_{12} \cos \alpha_2 = P_0 + h_{11} \cos \alpha_1 \quad (18)$$

$$-h_{12} \sin \alpha_2 = P_1 + h_{11} \sin \alpha_1 \quad (19)$$

从式(18)、(19)中消去  $\alpha_2$ , 有

$$P_2 \sin \alpha_1 + P_3 \cos \alpha_1 + P_4 = 0$$

其中  $P_0 = a + h_{14} \cos \alpha_3 - \sqrt{2} m \cos \left( \gamma + \frac{\pi}{4} \right) - x$

$$P_1 = h_{13} + h_{15} - z$$

$$P_2 = 2P_1 h_{11} \quad P_3 = 2P_0 h_{11}$$

$$P_4 = P_0^2 + P_1^2 + h_{11}^2 - h_{12}^2$$

令  $u_1 = \tan \frac{\alpha_1}{2} \quad (20)$

解得  $u_1 = \frac{-P_2 \pm \sqrt{P_2^2 + P_3^2 - P_4^2}}{P_4 - P_3} \quad (21)$

这样, 由式(20)、(21)可直接求出输入角  $\alpha_1$ 。

### 3.2.2 求主动副 $R_{31}$ 的输入角 $\beta_1$

由式(8)可知

$$x = -h_{34} \cos \beta_3 - \sqrt{2} m \cos \left( \gamma + \frac{\pi}{4} \right)$$

即 
$$\beta_3 = \arccos \frac{-\sqrt{2}m\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) - x}{h_{34}} \quad (22)$$

由式(8)中的  $y, z$  坐标, 可得

$$h_{32}\cos\beta_2 = P_5 - h_{31}\cos\beta_1 \quad (23)$$

$$h_{32}\sin\beta_2 = P_6 - h_{31}\sin\beta_1 \quad (24)$$

从式(23)、(24)中消去  $\beta_2$ , 有

$$P_7\sin\beta_1 + P_8\cos\beta_1 + P_9 = 0$$

其中 
$$P_5 = -a + h_{34}\sin\beta_3 + \sqrt{2}m\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) + y$$

$$P_6 = z - h_{33} - h_{15}$$

$$P_7 = -2P_6h_{31} \quad P_8 = -2P_5h_{31}$$

$$P_9 = P_5^2 + P_6^2 + h_{31}^2 - h_{32}^2$$

令 
$$u_2 = \tan \frac{\beta_1}{2} \quad (25)$$

解得 
$$u_2 = \frac{-P_7 \pm \sqrt{P_7^2 + P_8^2 - P_9}}{P_9 - P_8} \quad (26)$$

这样, 由式(25)、(26), 可直接求出输入角  $\beta_1$ 。

### 3.2.3 求主动副 $R_{21}$ 的输入角 $\delta_1$

由支链 II, 易得点  $S_{21}$ 、 $S_{22}$  的坐标分别为

$$\left(0, -a + h_{21}\cos\delta_1, h_{21}\sin\delta_1\right), \left(x + \sqrt{2}m\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right), y - \sqrt{2}m\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right), z\right)。$$

由杆长约束条件  $l_{S_{21}S_{22}} = h_{22}$ , 整理并化简可得

$$Q_1\sin\delta_1 + Q_2\cos\delta_1 + Q_3 = 0 \quad (27)$$

其中 
$$Q_1 = -2zh_{21}$$

$$Q_2 = -2\left[y - \sqrt{2}m\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) + a\right]h_{21}$$

$$Q_3 = \left[x + \sqrt{2}m\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 +$$

$$\left[y - \sqrt{2}m\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) + a\right]^2 + z^2 + h_{21}^2 - h_{22}^2$$

令 
$$\lambda_1 = \tan \frac{\delta_1}{2} \quad (28)$$

解得 
$$\lambda_1 = \frac{-Q_1 \pm \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - Q_3}}{Q_3 - Q_2} \quad (29)$$

根据式(28)、(29), 可直接求出输入角  $\delta_1$ 。

### 3.2.4 求主动副 $R_{41}$ 的输入角 $\theta_1$

由支链 III, 易得  $S_{41}$ 、 $S_{42}$  的坐标分别为  $(-a +$

$$h_{41}\cos\theta_1, 0, h_{41}\sin\theta_1), \left(x - \sqrt{2}m\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right), y + \sqrt{2}m\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right), z\right)。$$

由杆长约束条件  $l_{S_{41}S_{42}} = h_{42}$ , 并整理可得

$$Q_4\sin\theta_1 + Q_5\cos\theta_1 + Q_6 = 0 \quad (30)$$

其中 
$$Q_4 = -2zh_{41}$$

$$Q_5 = -2\left[x - \sqrt{2}m\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) + a\right]h_{41}$$

$$Q_6 = \left[x - \sqrt{2}m\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) + a\right]^2 +$$

$$\left[y + \sqrt{2}m\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 + z^2 + h_{41}^2 - h_{42}^2$$

令 
$$\lambda_2 = \tan \frac{\theta_1}{2} \quad (31)$$

解得 
$$\lambda_2 = \frac{-Q_4 \pm \sqrt{Q_4^2 + Q_5^2 - Q_6}}{Q_6 - Q_5} \quad (32)$$

因此, 根据式(31)、(32), 可直接求出输入角  $\theta_1$ 。

由上可知, 该机构存在  $2^4 = 16$  组反解。

## 3.3 位置正解实验算

### 3.3.1 正解算例

设该并联机构的结构参数为(单位: cm):  $h_{11} = 20; h_{12} = 30; h_{13} = 5; h_{14} = 10; h_{15} = 5; h_{21} = 20; h_{22} = 40; h_{41} = 20; h_{42} = 40; h_{31} = 20; h_{32} = 30; h_{33} = 5; h_{34} = 10; a = 30; m = 10$ 。

设 4 个主动输入角为:  $\alpha_1 = 116.9276^\circ; \beta_1 = 86.1514^\circ; \delta_1 = 99.3268^\circ; \theta_1 = 89.8446^\circ$ 。

对式(7)~(16), 设虚拟变量  $\alpha_2^*$  的搜索范围为  $0 \sim 2\pi$ , 可求得 4 组实数位置正解, 如表 1 所示。

表 1 机构位姿正解数值

Tab. 1 Numerical forward solutions of PM

组数	$x/\text{mm}$	$y/\text{mm}$	$z/\text{mm}$	$\gamma/(\circ)$
1	3.333 6	3.183 4	32.281 4	-23.462 6
2	-1.463 0	4.766 5	38.939 1	-4.016 4
3	5.267 9	1.019 9	36.446 6	8.038 6
4	10.996 3	1.138 2	29.423 4	-7.742 2

### 3.3.2 逆解算例

将表 1 中正解第 2 组数据结果, 代入式(20)、(21)、(25)、(26)、(28)、(29)、(31)、(32), 可得 16 组实数反解, 其中, 一组反解为:  $\alpha'_1 = 116.9264^\circ; \beta'_1 = 86.1564^\circ; \delta'_1 = 99.3264^\circ; \theta'_1 = 90.0051^\circ$ 。

可见, 与给定的 4 个输入角一致, 从而验证了其正反解的正确性。

## 4 降耦机构的工作空间和转动能力分析

### 4.1 工作空间分析

工作空间是衡量并联机器人性能的一个重要指标, 本文采用极限搜索法对该 3T1R 降耦机构的工作空间进行分析, 即先设定该工作空间的搜索范围, 基于导出的运动学逆解, 查找该工作空间内所有满足杆长约束、运动副转角约束、连杆干涉约束的点; 若其中的任一值超出了其允许值, 则对应的点在工作空间外, 表示机构此时的位姿达不到; 反之, 该点

位于工作空间的边界。这些点所构成的三维立体图,即为该机构能够达到的工作空间。

机构的结构参数,已在 3.3 节中给出。为了找到空间中满足要求的点,先确定空间三维搜索范围:  $0 \leq z \leq 50$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \rho \leq 50$  ( $\theta, \rho$  分别为柱坐标系中搜索角度和搜索半径); 约束条件:  $-\pi \leq \alpha_1 (\beta_1, \delta_1, \theta_1) \leq \pi$ ; 于是,通过 Matlab 软件编程,得到该并联机构工作空间的三维立体图及各截面图,分别如图 8、图 9 所示。

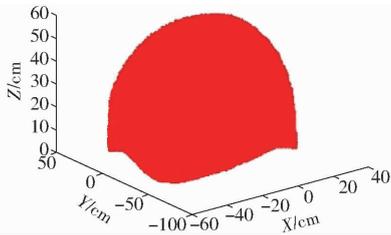


图 8 降耦机构的三维工作空间

Fig. 8 Three-dimensional workspace of coupling-reducing PM

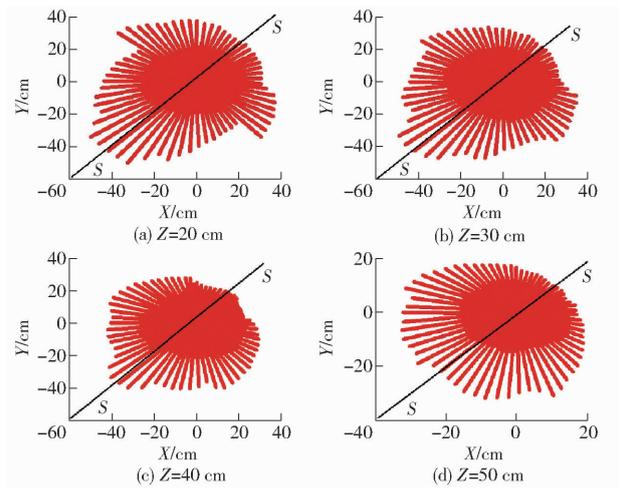


图 9 工作空间的 X-Y 截面图

Fig. 9 X-Y cross-sectional views of workspace

从图 9 可看出:①该并联机构的工作空间连续,且对称于静平台 0 的对角线 SS。②随着 Z 的增加,机构工作空间 X-Y 截面图形的面积逐渐减小,但图形更加规则。

#### 4.2 转动能力分析

动平台转动能力即为末端执行器在工作区域内的转角范围,是衡量并联机构输出转动灵活性能的又一个重要指标。这里同样采用极限边界搜索法,基于导出的位置反解公式,通过固定高度 Z 处的 X-Y 截面来分析该机构动平台的转动能力,即通过改变搜索半径  $\rho$  以及搜索角度  $\theta$ ,分别计算动平台在此 X-Y 截面内转角的最大值 ( $\gamma_{\max}$ ) 和最小值 ( $\gamma_{\min}$ )。

现取高度  $Z = 40$  cm,分别计算该机构动平台在其 X-Y 截面上各点的转角最大值 ( $\gamma_{\max}$ )、最小值

( $\gamma_{\min}$ ) 的分布,如图 10 所示。

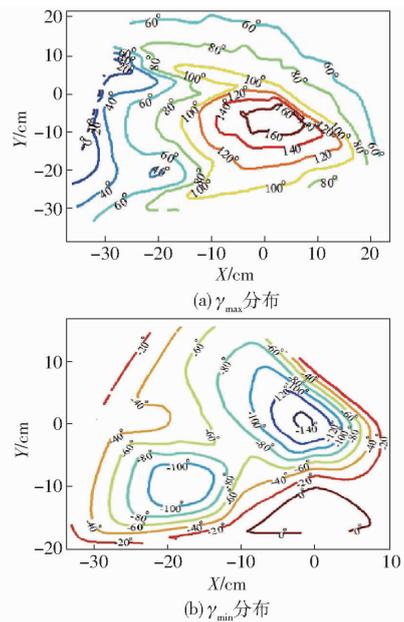


图 10 该 3T1R 降耦机构的转动能力

Fig. 10 Rotation ability of 3T1R coupling-reducing PM

由图 10 可以看出,该并联机构的转角最大值的范围  $\gamma_{\max} \in [0^\circ, 160^\circ]$ ,转角最小值的范围  $\gamma_{\min} \in [-140^\circ, 0^\circ]$ 。

### 5 3T1R 降耦机构的奇异位形分析

3.2 节已导出该机构的位置反解公式,对此直接求导,可获得机构动平台末端执行器的输出速度关于主动关节输入角速度的雅可比矩阵,当雅可比矩阵奇异时,并联机构的奇异位形出现。

#### 5.1 雅可比矩阵求解

(1)由图 3 得矢量方程  $\boldsymbol{l}_{OP} + \boldsymbol{l}_{PR_{15}} + \boldsymbol{l}_{R_{15}R_{35}} = \boldsymbol{l}_{OR_{35}}$ , 易求得点  $R_{35}$  的坐标为  $(x + \sqrt{2}m \cos(\gamma + \frac{\pi}{4}), y + \sqrt{2}m \sin(\gamma + \frac{\pi}{4}), z - h_{15})$ 。

由混合支链 I 中的左、右分支链,可求出点  $R_{14}$ 、 $R_{34}$  的坐标分别为  $(0, a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2, h_{11} \sin \alpha_1 + h_{12} \sin \alpha_2 + h_{13})$ ;  $(b + h_{31} \cos \beta_1 + h_{32} \cos \beta_2, 0, h_{31} \sin \beta_1 + h_{32} \sin \beta_2 + h_{33})$ 。

①由杆长条件  $l_{R_{14}R_{35}} = h_{14}$ ,可得

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = h_{14}^2 \quad (33)$$

其中  $M_1 = x + \sqrt{2}m \cos(\gamma + \frac{\pi}{4})$

$$M_2 = y + \sqrt{2}m \sin(\gamma + \frac{\pi}{4}) - a - h_{11} \cos \alpha_1 - h_{12} \cos \alpha_2$$

$$M_3 = z - h_{15} - h_{11} \sin \alpha_1 - h_{12} \sin \alpha_2 - h_{13}$$

②由杆长条件  $l_{R_{34}R_{35}} = h_{34}$ ,可得

$$M_4^2 + M_5^2 + M_6^2 = h_{34}^2 \quad (34)$$

其中  $M_4 = x + \sqrt{2}m \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) - b - h_{31} \cos\beta_1 - h_{32} \cos\beta_2$

$M_5 = y + \sqrt{2}m \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)$

$M_6 = z - h_{15} - h_{31} \sin\beta_1 - h_{32} \sin\beta_2 - h_{33}$

(2) 由支链 II, 已求得  $S_{21}$ 、 $S_{22}$  坐标 (3.1.4 节)

由杆长条件  $l_{S_{21}S_{22}} = h_{22}$  可得

$N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = h_{22}^2$  (35)

其中  $N_1 = x + \sqrt{2}m \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)$

$N_2 = y - \sqrt{2}m \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) + a - h_{21} \cos\delta_1$

$N_3 = z - h_{21} \sin\delta_1$

(3) 由支链 III, 已求得  $S_{41}$ 、 $S_{42}$  坐标 (3.1.5 节)

由杆长约束  $l_{S_{41}S_{42}} = h_{42}$  可得

$N_4^2 + N_5^2 + N_6^2 = h_{42}^2$  (36)

其中  $N_4 = x - \sqrt{2}m \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) + a - h_{41} \cos\theta_1$

$N_5 = y + \sqrt{2}m \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)$   $N_6 = z - h_{41} \sin\theta_1$

(4) 对式 (33) ~ (36) 的两边, 同时对时间  $t$  求一阶导数, 可得该机构动平台末端执行器的输出速度  $\mathbf{v} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\gamma}]^T$  和主动关节输入角速度  $\boldsymbol{\omega} = [\dot{\alpha}_1 \ \dot{\beta}_1 \ \dot{\delta}_1 \ \dot{\theta}_1]^T$  的关系为

$\mathbf{J}_p \mathbf{v} = \mathbf{J}_q \boldsymbol{\omega}$  (37)

其中

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & K_1 \\ M_4 & M_5 & M_6 & K_2 \\ N_1 & N_2 & N_3 & K_3 \\ N_4 & N_5 & N_6 & K_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} K_5 & & & \\ & K_6 & & \\ & & K_7 & \\ & & & K_8 \end{bmatrix}$$

$K_1 = \sqrt{2}m \left[ M_2 \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) - M_1 \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) \right]$

$K_2 = \sqrt{2}m \left[ M_5 \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) - M_4 \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) \right]$

$K_3 = \sqrt{2}m \left[ N_1 \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) + N_2 \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) \right]$

$K_4 = -\sqrt{2}m \left[ N_4 \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) + N_5 \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) \right]$

$K_5 = h_{11} (M_3 \cos\alpha_1 - M_2 \sin\alpha_1)$

$K_6 = h_{31} (M_6 \cos\beta_1 - M_4 \sin\beta_1)$

$K_7 = h_{21} (N_3 \cos\delta_1 - N_2 \sin\delta_1)$

$K_8 = h_{41} (N_6 \cos\theta_1 - N_4 \sin\theta_1)$

### 5.2 奇异位形分析

当雅可比矩阵行列式值为零时, 机构将出现奇异位形; 即式 (37) 中, 当  $\mathbf{J}_p$  和  $\mathbf{J}_q$  中任何 1 个或 2 个矩阵行列式为零, 机构均会出现奇异位形, 即有: 逆向运动学奇异、正向运动学奇异及组合奇异 3 类。

(1) 逆向运动学奇异

即  $\det(\mathbf{J}_q) = 0$ , 可得  $\mathbf{J}_q$  矩阵行列式解的集合  $D$  为

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

其中  $D_1 = \{M_2 \sin\alpha_1 - M_3 \cos\alpha_1 = 0\}$  (38)

$D_2 = \{M_4 \sin\beta_1 - M_6 \cos\beta_1 = 0\}$  (39)

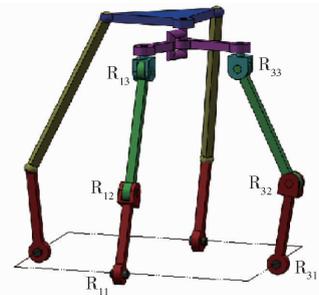
$D_3 = \{N_2 \sin\delta_1 - N_3 \cos\delta_1 = 0\}$  (40)

$D_4 = \{N_4 \sin\theta_1 - N_6 \cos\theta_1 = 0\}$  (41)

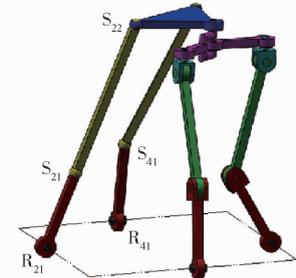
对该机构而言, 满足式 (38) ~ (41) 中的任意一个公式即发生该类奇异。这类奇异一般是指机构处于工作空间边界或者位置反解数目发生变化时的位形。

当式 (38) 或 (39) 成立时, 杆  $R_{11}R_{12}$  与  $R_{12}R_{13}$  或杆  $R_{31}R_{32}$  与  $R_{32}R_{33}$  被拉直或重叠共线; 杆  $R_{11}R_{12}$  与  $R_{12}R_{13}$  拉直共线的情形如图 11a 所示。

当式 (40) 或 (41) 成立时, 杆  $R_{21}S_{21}$  与  $S_{21}S_{22}$  或杆  $R_{41}S_{41}$  与  $S_{41}S_{42}$  被拉直或重叠共线; 杆  $R_{21}S_{21}$  与  $S_{21}S_{22}$  拉直共线的情形如图 11b 所示。



(a) 杆  $R_{11}R_{12}$  与  $R_{12}R_{13}$  被拉直共线



(b) 杆  $R_{21}S_{21}$  与  $S_{21}S_{22}$  被拉直共线

图 11 3T1R 并联机构的逆向运动学奇异位形  
Fig. 11 Inverse kinematics singularity of 3T1R PM

这样, 通过控制驱动副转角, 可使机构的工作位置尽量远离奇异位形点。

(2) 正向运动学奇异

即  $\det(\mathbf{J}_p) = 0$ , 从数学上求解该方程, 并找出所有的正向奇异位形点较为困难, 但可用解析几何法

能较为直观地找出奇异位形点。

具体为,将矩阵  $J_p$  看作 4 个行向量,如式(42)所示,可发现矩阵  $J_p$  各行向量,分别对应从动  $R_{14}R_{35}$ 、 $R_{34}R_{35}$ 、 $S_{21}S_{22}$ 、 $S_{41}S_{42}$  在定坐标系中的空间矢量。当发生该类奇异位形时,尽管驱动杆被锁定,机构的动平台也将具有一定自由度,此时,机构将失去刚度,无法承受任何承载。

$$J_p = [e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4]^T \quad (42)$$

由矢量的几何分析可知,当  $e_1$ 、 $e_2$  两矢量平行,及  $e_3$ 、 $e_4$  两矢量平行并与动平台 1 共面时,该机构出现正向奇异位形,此时,从动杆  $R_{14}R_{35}$  与  $R_{34}R_{35}$  平行;从动杆  $S_{21}S_{22}$  与  $S_{41}S_{42}$  平行,并与动平台 1 共面。

这种奇异位形可通过控制驱动副转角,来避免发生。

### (3) 组合奇异

即  $\det(J_p) = 0$  且  $\det(J_q) = 0$ 。这种奇异位形只有当上述 2 种奇异同时发生时才会产生。此时,杆  $R_{11}R_{12}$  与  $R_{12}R_{13}$  被拉直共线,从动杆  $R_{14}R_{35}$  与  $R_{34}R_{35}$  平行,从

动杆  $S_{21}S_{22}$  与  $S_{41}S_{42}$  平行。当机构处于该奇异位形时,机构将失去自由度,从而失去原有的运动特性。

## 6 结论

(1) 运用基于 POC 和 SOC 的并联机构拓扑结构设计方法,通过并联机构拓扑结构降耦设计,可降低并联机构的耦合度,可设计基本功能(POC 和 DOF)不变的低耦合度并联机构,从而使其位置正解求解大大简化。

(2) 3T1R 降耦机构,动平台结构更简单,还具有较好的对称性;采用基于序单开链法的位置正解求解原理,仅需建立一个含一个虚拟变量的位置约束方程,即可采用一维搜索法求得其全部正解数值解。

(3) 基于位置反解,分别得到了 3T1R 降耦机构的工作空间和转动能力,表明该机构工作空间规则连续,转动能力大;同时还得到了该机构发生奇异位形的条件。

## 参 考 文 献

- 1 CLAVEL R. Device for the movement and positioning of an element in space; US,4976582A[P]. 1990-12-11.
- 2 ABB. IRB 360 flexpicker[EB/OL]. [2015-05-06]. <http://www.new.abb.com/products/robotics/industrials-robots/irb-360>.
- 3 PIERROT F, COMPANY O. H4: a new family of 4-dof parallel robots [C] // 1999 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 1999: 508-513.
- 4 KRUT S, COMPANY O, BENOIT M, et al. I4: a new parallel mechanism for SCARA motions [C] // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2003: 1875-1880.
- 5 NABAT V, COMPANY O, KRUT S, et al. Par4: very high speed parallel robot for pick-and-place [C] // Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005: 1202-1207.
- 6 赵铁石, 黄真. 欠秩空间并联机器人输入选取的理论和应用[J]. 机械工程学报, 2000, 36(10): 81-85.  
ZHAO Tieshi, HUANG Zhen. Theory and application of selecting actuating components of spatial parallel mechanisms [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(10): 81-85. (in Chinese)
- 7 金琼, 杨廷力, 刘安心, 等. 基于单开链单元的三平移-转动并联机器人机构型综合及机构分类[J]. 中国机械工程, 2001, 12(9): 1038-1043.  
JIN Qiong, YANG Tingli, LIU Anxin, et al. Kinematics analysis of a parallel pneumatic and hydraulic linkage based on singleopened-chain [J]. China Mechanical Engineering, 2001, 12(9): 1038-1043. (in Chinese)
- 8 杨廷力, 金琼, 罗玉峰, 等. 用于虚轴机床与机器人等的一类(三平移-转动)并联机构; 中国, 200310106012. 4 [P]. 2004-09-15.  
YANG Tingli, JIN Qiong, LUO Yufeng, et al. A class of 3T1R parallel mechanisms used for virtual axis machine tools and robots; CN, 200310106012. 4 [P]. 2004-09-15. (in Chinese)
- 9 黄田, 刘海涛, 李曦. 五自由度机器人; 中国, 200510014459. 8 [P]. 2005-12-21.  
HUANG Tian, LIU Haitao, LI Meng. The robot with five degree of freedom; CN, 200510014459. 8 [P]. 2005-12-21. (in Chinese)
- 10 刘辛军, 谢福贵, 王立平, 等. 一种可实现 SCARA 运动的四自由度单动平台并联机构; 中国, 201210435375. 1 [P]. 2012-02-03.  
LIU Xinjun, XIE Fugui, WANG Liping, et al. A four freedom of degree parallel mechanism with single moving platform which can achieve scara move; CN, 201210435375. 1 [P]. 2012-02-03. (in Chinese)
- 11 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- 12 沈惠平, 杨廷力, 邵国伟, 等. 一种三平移-转动并联机构机械手; 中国, 201510650394. X [P]. 2015-12-09.  
SHEN Huiping, YANG Tingli, SHAO Guowei, et al. Three translations and one rotation mechanism manipulator; CN, 201510650394. X [P]. 2015-12-09. (in Chinese)
- 13 沈惠平, 杨廷力, 李云峰, 等. 一种三平移-转动并联机器人抓放器; 中国, 201510648948. 2 [P]. 2015-10-09  
SHEN Huiping, YANG Tingli, LI Yunfeng, et al. Three translations and one rotation parallel robot catcher; CN, 201510648948. 2 [P]. 2015-10-09. (in Chinese)

- workspace [J]. Proc. IMech E, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2015, 229(14): 2561–2572.
- 15 黄真,赵永生,赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
- 16 熊有伦,丁汉,刘恩沧. 机器人学[M]. 北京:机械工业出版社,1993:32–44.
- 17 BOUDREAU R, TURKKAN N. Solving the forward kinematics of parallel manipulators with a genetic algorithm[J]. Journal of Robotic Systems, 1996, 13(2): 111–125.
- 18 张利敏. 基于动力学指标的 Delta 高速并联机械手集成优化设计方法研究[D]. 天津:天津大学, 2011:28–30.  
ZHANG Limin. Integrated optimal design of Delta robot using dynamic performance in deices[D]. Tianjin: Tianjin University, 2011:28–30. (in Chinese)
- 19 王唱. 一类折叠式并联机构性能研究[D]. 秦皇岛:燕山大学, 2014:49–52.  
WANG Chang. Performance analysis of a kind of foldable parallel mechanisms[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2014: 49–52. (in Chinese)
- 20 GOSSELIN C, ANGELES J. A global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1991, 113(3): 220–226.
- 21 耿明超,赵铁石,杨建涛,等. 平面弹性欠驱动并联机构刚度特性分析[J/OL]. 农业机械学报, 2015, 46(5): 365–371.  
[http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?file\\_no=20150551&flag=1](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20150551&flag=1). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.05.051.  
GENG Mingchao, ZHAO Tieshi, YANG Jiantao, et al. Stiffness characteristics of planar elastic underactuated parallel mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(5): 365–371. (in Chinese)
- 22 GEN M, CHENG R. Genetic algorithms and engineering optimization[M]. New York: John Wiley & Sons, 2000:30–32.
- 23 章永年,王美思,吴阳,等. 五连杆足式机器人腿部机构多目标优化算法[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(10): 398–404.  
[http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?file\\_no=20161052&flag=1](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20161052&flag=1). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.10.052.  
ZHANG Yongnian, WANG Meisi, WU Yang, et al. Multi-objective optimization algorithm of robot leg based on planar five-bar mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(10): 398–404. (in Chinese)

(上接第 389 页)

- 14 沈惠平,杨廷力,朱伟,等. 一种三平移—转动并联机器人平台:中国,201510566840.9[P]. 2015–12–09.  
SHEN Huiping, YANG Tingli, ZHU Wei, et al. A parallel robot platform with three translations and one rotation: CN, 201510566840.9[P]. 2015–12–09. (in Chinese)
- 15 沈惠平,杨廷力,朱小蓉,等. 一种三平移—转动并联机器人:中国,201510564382.5[P]. 2015–12–09.  
SHEN Huiping, YANG Tingli, ZHU Xiaorong, et al. Three translations and one rotation parallel robot: CN, 201510564382.5[P]. 2015–12–09. (in Chinese)
- 16 沈惠平,邵国为,朱小蓉,等. 基于 POC 法的多环耦合并联机构拓扑特征分析[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(4): 349–354. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?flag=1&file\\_no=20160446&journal\\_id=jcsam](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20160446&journal_id=jcsam). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.04.046  
SHEN Huiping, SHAO Guowei, ZHU Xiaorong, et al. POC method based topology characteristic analysis of multi-loop coupled mechanisms[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(4): 349–354. (in Chinese)
- 17 沈惠平,朱小蓉,尹洪波,等. 并联机构的结构降耦原理及其设计方法[J]. 机械工程学报, 2016, 52(23): 102–113.  
SHEN Huiping, ZHU Xiaorong, YIN Hongbo, et al. Study on the principle and design method for structure coupling-reducing of parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(23): 102–113. (in Chinese)
- 18 SHEN Huiping, YANG Liangjie, MENG Qingmei, et al. Topological structure coupling-reducing of parallel mechanisms[C]//2015 IFToMM World Congress, 2015: OS13–120.
- 19 沈惠平,朱伟,曾氩菲,等. 一种低耦合度三运动副动平台的三平移—转动并联机器人操作手:中国,201610141778.3[P]. 2016–06–08.  
SHEN Huiping, ZHU Wei, ZENG Qingfei, et al. A low coupling degree three translation and one rotation parallel robot device with three joint moving platform: CN, 201610141778.3[P]. 2016–06–08. (in Chinese)
- 20 朱小蓉,宋月月,孙晨,等. 2RRUR–2RSS 并联机构结构特性与运动学分析[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(12): 408–415. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?flag=1&file\\_no=20161252&journal\\_id=jcsam](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20161252&journal_id=jcsam). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.12.052.  
ZHU Xiaorong, SONG Yueyue, SUN Chen, et al. Structural characteristics and kinematic analysis for novel 2RRUR–2RSS parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(12): 408–415. (in Chinese)