

# 基于反向学习模型的多目标进化算法

王亚辉<sup>1</sup> 吴金妹<sup>1</sup> 贾晨辉<sup>2</sup>

(1. 华北水利水电大学机械学院, 郑州 450011; 2. 河南科技大学机电工程学院, 洛阳 471023)

**摘要:** 针对复杂多目标优化问题, 提出一种基于分解机制和反向学习模型的多目标进化算法。该算法在基于分解机制的多目标进行算法的框架下, 引入反向学习模型, 该模型具有较好的局部寻优能力。在种群进化的过程中, 反向学习模型和差分进化机制自适应的相互配合, 能够较好地平衡算法的全局搜索与局部寻优能力。采用国际公认的具有复杂 Pareto Set 的 LZ09 系列测试问题进行实验验证, 并与 MOEA/D-DE、GDE3、NSGA-II 和 SPEA2 等方法比较, 实验结果表明, 所提方法能够获得收敛性、分布性及延展性较好的 Pareto 最优解集。为了研究算法在求解约束问题的性能, 将其应用于减速器多目标优化设计问题中, 结果表明了该算法获得 Pareto 前端较均匀, 说明其算法具有求解约束问题的能力和工程有效性。

**关键词:** 多目标优化; MOEA/D; 反向学习模型; 减速器; 优化设计

**中图分类号:** TP18      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-1298(2016)04-0326-07

## Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Opposition-based Learning Model

Wang Yahui<sup>1</sup> Wu Jinmei<sup>1</sup> Jia Chenhui<sup>2</sup>

(1. College of Mechanical Engineering, North China University of Water Resources and Electric, Zhengzhou 450011, China

2. College of Mechanical Engineering, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471023, China)

**Abstract:** A multi-objective evolutionary algorithm cooperated with decomposition mechanism and opposition-based learning model was proposed for solving complex multi-objective optimization problems. Under the framework of multi-objective evolutionary algorithm based on decomposition, the opposition-based learning model was introduced into the algorithm. The model improved the algorithm's exploitation. During the evolution process, the opposition-based learning model facilitated the local optimization and the differential evolution strategy enhanced the global research for the new algorithm. The opposition-based learning strategy and differential evolution were in coordination to balance its exploration and exploitation. The benchmark LZ09 series of internationally recognized with complicated Pareto sets were adopted to verify its effectiveness. The proposed multi-objective evolutionary algorithm based on opposition-based learning model was compared with MOEA/D based on DE (MOEA/D-DE), the third evolution step of generalized differential evolution (GDE3), fast and elitist multi-objective genetic algorithm (NSGA-II) and improving strength Pareto evolutionary algorithm (SPEA2), the results showed that the proposed algorithm can obtain Pareto fronts with good convergence, diversity and wild coverage. In order to analyze the algorithm to solve the problem of performance constraints, the proposed algorithm was applied to solve the multi-objective optimization design of speed reducer. The results showed that the Pareto front obtained by the algorithm was uniform, which demonstrated its good performance in solving practical problem with constraints and engineering effectiveness.

**Key words:** multi-objective optimization; MOEA/D; opposition-based learning model; speed reducer; optimization design

## 引言

在科学研究和工程应用领域许多问题中在决策过程中需考虑多个目标,而多个目标之间往往存在相互冲突,因此难以满足多个目标同时最优,对于这类问题属于多目标问题(Multi-objective optimization problem, MOP)。对于求解 MOP,进化算法(Evolutionary algorithm, EA)具有其独特的优点:①对所求问题的性质没有特别的假设。②基于群体迭代搜索,具有很好的并行性,一次求解可获得多个 Pareto 解。基于此,EA 应用于求解 MOP 中,出现了众多优异多目标进化算法(Multi-objective evolutionary algorithm, MOEA),张青富等<sup>[1]</sup>于 2007 年提出了一种基于分解技术的多目标进化算法(MOEA based on decomposition, MOEA/D),该算法采用传统的分解技术将 MOP 分解为一系列的子问题,将这些子问题有机组织进行求解,获得逼近的 Pareto 解集。MOEA/D 算法是一类新的 MOEA 算法框架,可以同各类优化方法和搜索机制进行融合,其很好地将传统的数学规划方法与 EA 联系起来,因其优异的性能和包容性引起越来越多研究者的关注。

对于 MOEA/D 算法的研究,主要有 4 个方面的探索:①将 MOEA/D 算法同其他启发式算法相结合<sup>[2-5]</sup>。②将新的分解机制融入到 MOEA/D 框架<sup>[6-8]</sup>。③新的权重向量方法<sup>[9-12]</sup>。④在 MOEA/D 中加入新重组或变异算子<sup>[13-17]</sup>。本文提出一种基于分解机制和精英反向学习模型的 MOEA/D 算法(Multi-objective evolutionary algorithm based on decomposition and opposition-based learning model, MOEA/D-OLM)。MOEA/D-OLM 采用反向学习模型能提高算法的局部寻优能力,该模型同差分进化策略相互配合,平衡算法的勘探与开采能力。通过具有复杂的 PS(Pareto set)的 LZ09 系列函数<sup>[18]</sup>进行对比测试。

## 1 基于反向学习模型的多目标进化算法

### 1.1 基于分解机制的多目标进化算法框架

传统的多目标进化算法是以 Pareto 支配为主来进行进化从而获得对 Pareto 前端的逼近。MOEA/D<sup>[1]</sup>算法先将 MOP 分解为一组单目标优化问题,每个单目标问题称为子问题;各子问题之间相互协作同时优化这组子问题,从而获得对 Pareto 最优解集的逼近。

#### (1) 分解机制

将一个 MOP 问题,分解为一系列的子问题

$\text{ming}^i(x), i = 1, 2, \dots, N$ , 每个子问题的最优解对应于 MOP 问题的一个 Pareto 最优解。其中,每个子问题的目标值是各个目标分量的聚合函数,每个子问题对应一个权重向量  $\lambda^i = (\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_m^i), i = 1, 2, \dots, N$ , 通过权重向量来获取每个子问题的邻居,每个子问题的优化被限定为只能通过与其邻域内的子问题来进行进化操作完成。常用的分解方法有权重向量法、切比雪夫法以及边界插入法,其中以切比雪夫法应用最为广泛,其分解机制为:

设种群规模为  $N$ , 目标个数为  $m, \Lambda = \{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N\}$  为一个权重向量集合,其中  $\lambda^i = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_m^i\}$  且满足  $\sum_{j=1}^m \lambda_j^i = 1$ , 则第  $i$  个子问题的表达式为

$$g^{ie}(x|\lambda^i, z^*) = \min_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j^i |f_j(x) - z_j^*|\}$$

subject to  $x \in \Omega$

其中,  $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*)$  为最优参考点,通常很难获取最优参考点,一般利用  $z_i^* = \min\{f_i(x) | x \in \Omega\} (i = 1, 2, \dots, m)$  来作为最优参考点的近似参考点。对于 MOP 中的每一个 Pareto 最优解  $x^*$ , 一定存在一个对应的权重向量  $\lambda$ , 使得  $x^*$  对应单目标问题  $g^{ie}(x|\lambda, z^*)$  的一个最优解。反之,单目标问题  $g^{ie}(x|\lambda, z^*)$  的每个最优解也对应 MOP 的一个 Pareto 最优解<sup>[14]</sup>。本文中的  $N$  个权重向量是事先在权重向量空间中均匀选择的,具体算法见文献[1]。

#### (2) 邻居分配

每个子问题对应一个权重向量,子问题的邻居是通过计算每个权重向量与其欧氏距离最小的  $T$  个权重向量来确定的,如图 1 所示。

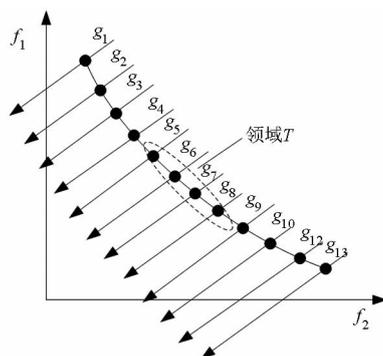


图 1 邻域示意图

Fig. 1 Illustration of neighborhood

每一代种群由每个子问题的当前最优解构成,对每个子问题的进化操作被限制在邻居内进行。对于产生的新个体不仅更新其父代个体而且会更新其邻域个体,使得更优的新个体尽可能地保留到下一代。正因为子问题在重组和更新操作中的相互合作,MOEA/D 算法能够同时优化所有子问题。

## 1.2 反向学习模型

反向学习的概念由 TIZHOOSH<sup>[19]</sup> 于 2005 年提出,其主要思想是同时搜索当前解和反向解,择优选取候选解。根据 RAHNAMAYAN 等<sup>[20-21]</sup> 的研究表明,随机模型的寻优过程比反向学习寻优的过程长,且同时评估一个候选解的正反解,更有利于加速算法收敛。

反向学习的基本概念为,令  $X_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,D})$  为当前的一个可行解,则其对应的反向解  $\bar{X}_i = (\bar{x}_{i,1}, \bar{x}_{i,2}, \dots, \bar{x}_{i,D})$  可以定义为

$$\bar{x}_{i,j} = k(a_j + b_j) - x_{i,j}$$

其中,  $D$  为决策空间大小,  $x_{i,j} \in [a_j, b_j]$ ,  $[a_j, b_j]$  为第  $j$  维决策空间的动态边界值,  $k \in (0, 1)$ 。

假设反向解  $\bar{X}_i$  超出了边界  $[a_j, b_j]$ , 变为不可行解, 则采用随机生成的方法重新生成一个反向解:  $\bar{x}_{i,j} \in \text{rand}(a_j, b_j)$ 。其中,  $\text{rand}()$  函数为区间  $[a_j, b_j]$  内的随机数。

对于生成的  $\bar{X}_i$  和可行解  $X_i$  进行评估, 选择其中较优的一个作为候选解, 参与后续的进化, 即

$$V_i = \begin{cases} \bar{X}_i & (f(\bar{X}_i) < f(X_i)) \\ X_i & (\text{其他}) \end{cases}$$

将反向学习模型融入 MOEA/D 算法框架中, 需要对现有的反向学习策略进行改进。在 MOEA/D 框架中, 对于当前个体  $X_i$ , 其对应的权重向量为  $\lambda^i$ , 令  $B(i) = \{i_1, i_2, \dots, i_T\}$ , 其中  $\Lambda = \{\lambda^{i_1}, \lambda^{i_2}, \dots, \lambda^{i_T}\}$  为  $\lambda^i$  的  $T$  个邻居向量, 由于权重向量与个体一一对应, 则其邻居个体为  $N_i = \{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_T}\}$ , 其边界范围从其邻居中产生即

$$\begin{cases} a_j = \min(X_{k,j}) \\ b_j = \max(X_{k,j}) \end{cases}$$

其中  $k \in B(i) \quad j \in [1, 2, \dots, D]$

以图 2 所示决策空间 PS 为 2 维为例, 其中圆形点为邻居个体, 长方形表示为邻居的边界, 即所有邻居个体都在长方形范围内; 五角星表示为反向个体; 七角星为 DE 算子产生的个体; 黑色实线为 PS。由图中可知, 采用反向学习模型, 可以在一个小的区域内更多的搜索最优解, 由此能够说明反向学习模型具有局部寻优能力, 尤其在算法的进化后期, 对于算法的局部寻优能力的提升尤为明显。差分进化策略, 生产的个体能够较广泛的分布于决策空间内, 能够起到很好的全局勘探的作用。

对于反向学习个体与当前个体选择时, 根据其子问题  $g^{te}(x|\lambda, z^*)$  进行评价, 即

(1) 若  $g^{te}(\bar{X}_i|\lambda^i, z) \leq g^{te}(X_i|\lambda^i, z)$ , 则  $V = \bar{X}$ 。

(2) 若  $g^{te}(\bar{X}_i|\lambda^i, z) > g^{te}(X_i|\lambda^i, z)$ , 则  $V = X$ ; 如

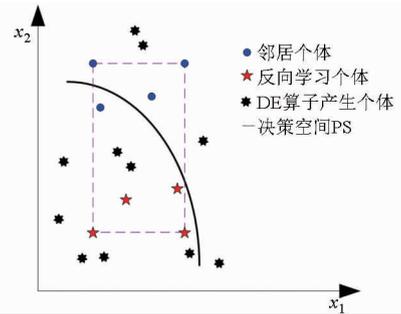


图 2 反向学习模型示意图

Fig. 2 Schematic diagram of opposition-based learning model

果  $g^{te}(\bar{X}_i|\lambda^n, z) \leq \max \{g^{te}(X_k|\lambda^n, z)\}, k \in B(i)$ , 则  $X_i = \bar{X}$ 。

## 1.3 基于精英反向学习模型的 MOEA/D 算法

算法输入: 停止判据;  $N$ : MOEA/D-OLM 种群大小(子问题个数);  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N$ : 分布均匀的  $N$  个权重向量;  $T$ : 权重向量的邻域规模; 最大更新子问题个数  $n_r$ ; 交叉概率  $p_{cmin}, p_{cmax}$ ; 变异概率  $p_m$ ; 多项式变异算子参数  $\eta$ ; 差分交叉概率  $CR$ ; 变异因子  $F$ 。

步骤 1: 初始化

(1) 设置  $EP = \emptyset$ 。

(2) 计算任意 2 个权重向量的欧氏距离, 为每个权重向量选出最近的  $T$  个向量作为它的邻居。设  $B(i) = \{i_1, i_2, \dots, i_T\}, i = 1, 2, \dots, N$ , 其中  $\lambda^{i_1}, \lambda^{i_2}, \dots, \lambda^{i_T}$  为距离  $\lambda^i$  最近的  $T$  个权重向量。

(3) 初始化种群  $x^1, x^2, \dots, x^N$ , 设  $FV^i = F(x^i), i = 1, 2, \dots, N$ 。

(4) 采用基于问题的特点方法初始化  $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ 。

(5) 迭代计时器  $gen = 0$ 。

步骤 2: 主循环

如果  $\text{rand} < p_{cmin} + (p_{cmax} - p_{cmin}) e^{-2\frac{gen}{\text{MaxGen}}}$ , 进行 DE 交叉算子。

(1) 从邻域中随机选择 3 个个体  $X_{r1,gen}, X_{r2,gen}, X_{r3,gen}$ , 生产新的个体  $V_{i,gen}$ , 即

$$V_{i,gen} = X_{r1,gen} + F(X_{r2,gen} - X_{r3,gen})$$

$$u_{j,i,gen} = \begin{cases} v_{j,i,gen} & (\text{rand}_j \leq CR \text{ 且 } j = j\text{rand}) \\ x_{j,i,gen} & (\text{其他}) \end{cases}$$

其中  $i = 1, 2, \dots, N \quad i \in \{1, 2, \dots, D\}$

(2) 进行多项式变异操作, 产生子代个体  $y$ 。

(3) 利用新解  $y$  更新邻域内的子问题。

否则, 进行反向学习模型, 由 1.2 节所述, 生产新个体  $y$ , 并更新邻域内的子问题, 替换邻居中最差解。

步骤 3: 停止判断

判断  $gen > \text{MaxGen}$ 。如果是, 则停止算法并输

出结果；否则返回步聚2。

## 2 实验仿真及分析

### 2.1 Benchmark 函数和性能指标

为了测试算法 MOEA/D-OLM 的有效性,实验中采用由 Zhang<sup>[18]</sup> 在 2009 年提出的一组具有复杂 PS 的测试函数 LZ09\_F1 ~ F9 进行求解。其中, F1 ~ F5 和 F7 ~ F9 为 2 目标函数, F6 为 3 目标函数, F6 和 F9 为非凸 PF, 其他函数为凸 PF 函数, F7 和 F8 为多峰问题, 具有多个局部最优解。

由于采用的测试函数均可得到其理论最优值, 本文选取 HV<sup>[22]</sup> 与 IGD<sup>[23]</sup> 2 个评价函数对算法性能进行综合评价。

#### (1) HV 性能指标

HV 是用来计算获得的 Pareto 解集个体在真实目标域所覆盖的体积, 即

$$HV = \text{volume} \left( \bigcup_{i=1}^{|Q|} v_i \right)$$

式中  $Q$ ——所获得的 Pareto 前端的个数

$v_i$ ——由参考点  $w = (0, \dots, 0)$  和个体  $i$  所形成的超体积

HV 值越大表明所得的 Pareto 解集, 能宽广地覆盖在真实 PF 前端上。

#### (2) IGD 性能指标

IGD 计算所求解的 Pareto 解集与真实的 PF 解集之间的距离, 其评价函数为

$$IGD = 1/N_{true} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{true}} d_i^2}$$

式中  $d_i$ ——真实 PF 解集中向量与所得 PF 解集中每个向量之间的最短距离

IGD 不仅能评价解集收敛性, 也能评价均匀性。

### 2.2 算法对比实验

为了比较本文算法 MOEA/D-OLM 的性能, 选取 4 种常用于比较多目标优化的对等算法: MOEA/D-DE<sup>[18]</sup>、GDE3<sup>[24]</sup>、NSGA-II<sup>[25]</sup>、SPEA2<sup>[26]</sup>。所有算法的共同参数设置为, 在求解 2 目标问题时, 种群规模为 300, 对于 F6 的 3 目标问题, 种群规模设定为 500。对于 MOEA/D-OLM 算法中的 DE 算子控制参数  $CR = 1.0$ ,  $F = 0.5$ , 变异算子参数  $\eta = 20$ ,  $P_m = 1/n$ , 邻居大小为 20, 子问题更新数目  $n_r = 2$ , 本文所选取的 4 个对比算法的实验参数都按照对应的参考文献设置。将 5 种算法用于求解具有复杂 PS 的 LZ09 系类函数进行测试, 独立运行 30 次, 每种算法迭代 250 次后停止运行。结果如表 1、2。所获得值在括号外的值为标准差, 括号内的值为方差。

表 1 HV 标准平均值及方差

Tab.1 HV mean and standard deviation

HV	MOEA/D-OLM	MOEA/D-DE	GDE3	NSGA-II	SPEA2
F1	6.65 × 10 <sup>-1</sup> (2.1 × 10 <sup>-5</sup> ) *	6.65 × 10 <sup>-1</sup> (9.7 × 10 <sup>-5</sup> )	6.60 × 10 <sup>-1</sup> (3.1 × 10 <sup>-4</sup> )	6.62 × 10 <sup>-1</sup> (1.3 × 10 <sup>-4</sup> )	6.61 × 10 <sup>-1</sup> (8.2 × 10 <sup>-4</sup> )
F2	6.41 × 10 <sup>-1</sup> (2.8 × 10 <sup>-2</sup> ) *	5.54 × 10 <sup>-1</sup> (2.6 × 10 <sup>-2</sup> )	5.27 × 10 <sup>-1</sup> (3.0 × 10 <sup>-3</sup> )	5.46 × 10 <sup>-1</sup> (1.8 × 10 <sup>-2</sup> )	5.31 × 10 <sup>-1</sup> (2.7 × 10 <sup>-2</sup> )
F3	6.23 × 10 <sup>-1</sup> (2.7 × 10 <sup>-2</sup> )	6.28 × 10 <sup>-1</sup> (1.8 × 10 <sup>-2</sup> ) *	5.83 × 10 <sup>-1</sup> (3.7 × 10 <sup>-3</sup> )	6.15 × 10 <sup>-1</sup> (6.7 × 10 <sup>-3</sup> )	5.96 × 10 <sup>-1</sup> (4.8 × 10 <sup>-3</sup> )
F4	6.54 × 10 <sup>-1</sup> (2.6 × 10 <sup>-3</sup> ) *	6.35 × 10 <sup>-1</sup> (8.4 × 10 <sup>-3</sup> )	5.89 × 10 <sup>-1</sup> (1.7 × 10 <sup>-3</sup> )	6.27 × 10 <sup>-1</sup> (3.2 × 10 <sup>-3</sup> )	6.09 × 10 <sup>-1</sup> (2.1 × 10 <sup>-3</sup> )
F5	6.42 × 10 <sup>-1</sup> (1.4 × 10 <sup>-2</sup> ) *	6.30 × 10 <sup>-1</sup> (1.4 × 10 <sup>-2</sup> )	5.99 × 10 <sup>-1</sup> (4.0 × 10 <sup>-3</sup> )	6.29 × 10 <sup>-1</sup> (5.3 × 10 <sup>-3</sup> )	6.18 × 10 <sup>-1</sup> (4.0 × 10 <sup>-3</sup> )
F6	4.16 × 10 <sup>-1</sup> (2.3 × 10 <sup>-3</sup> ) *	3.42 × 10 <sup>-1</sup> (1.7 × 10 <sup>-2</sup> )	2.45 × 10 <sup>-1</sup> (1.9 × 10 <sup>-2</sup> )	3.15 × 10 <sup>-1</sup> (1.2 × 10 <sup>-2</sup> )	3.28 × 10 <sup>-1</sup> (1.3 × 10 <sup>-2</sup> )
F7	6.41 × 10 <sup>-1</sup> (2.2 × 10 <sup>-2</sup> ) *	4.60 × 10 <sup>-1</sup> (6.3 × 10 <sup>-2</sup> )	1.31 × 10 <sup>-1</sup> (5.3 × 10 <sup>-2</sup> )	4.92 × 10 <sup>-1</sup> (3.6 × 10 <sup>-2</sup> )	4.75 × 10 <sup>-1</sup> (4.6 × 10 <sup>-2</sup> )
F8	4.37 × 10 <sup>-1</sup> (7.0 × 10 <sup>-2</sup> )	4.47 × 10 <sup>-1</sup> (4.1 × 10 <sup>-2</sup> )	1.60 × 10 <sup>-1</sup> (3.4 × 10 <sup>-2</sup> )	4.74 × 10 <sup>-1</sup> (2.4 × 10 <sup>-2</sup> )	4.81 × 10 <sup>-1</sup> (2.2 × 10 <sup>-2</sup> ) *
F9	3.13 × 10 <sup>-1</sup> (8.6 × 10 <sup>-3</sup> ) *	1.71 × 10 <sup>-1</sup> (6.0 × 10 <sup>-2</sup> )	1.83 × 10 <sup>-1</sup> (4.9 × 10 <sup>-2</sup> )	1.82 × 10 <sup>-1</sup> (5.1 × 10 <sup>-2</sup> )	2.00 × 10 <sup>-1</sup> (2.8 × 10 <sup>-2</sup> )

注: \* 为最优值, 下同。

表 2 IGD 标准平均值及方差

Tab.2 IGD mean and standard deviation

IGD	MOEA/D-OLM	MOEA/D-DE	GDE3	NSGA-II	SPEA2
F1	7.64 × 10 <sup>-5</sup> (1.1 × 10 <sup>-5</sup> ) *	7.93 × 10 <sup>-5</sup> (2.7 × 10 <sup>-6</sup> )	1.90 × 10 <sup>-4</sup> (1.3 × 10 <sup>-5</sup> )	1.47 × 10 <sup>-4</sup> (3.9 × 10 <sup>-6</sup> )	2.41 × 10 <sup>-4</sup> (8.1 × 10 <sup>-5</sup> )
F2	1.41 × 10 <sup>-3</sup> (2.1 × 10 <sup>-3</sup> ) *	4.25 × 10 <sup>-3</sup> (9.3 × 10 <sup>-4</sup> )	4.77 × 10 <sup>-3</sup> (1.3 × 10 <sup>-4</sup> )	4.74 × 10 <sup>-3</sup> (8.7 × 10 <sup>-4</sup> )	5.32 × 10 <sup>-3</sup> (9.9 × 10 <sup>-4</sup> )
F3	3.94 × 10 <sup>-3</sup> (3.4 × 10 <sup>-3</sup> )	4.66 × 10 <sup>-3</sup> (3.0 × 10 <sup>-3</sup> )	3.14 × 10 <sup>-3</sup> (3.0 × 10 <sup>-4</sup> )	2.60 × 10 <sup>-3</sup> (4.5 × 10 <sup>-4</sup> ) *	3.29 × 10 <sup>-3</sup> (4.2 × 10 <sup>-4</sup> )
F4	9.06 × 10 <sup>-4</sup> (2.5 × 10 <sup>-4</sup> ) *	4.48 × 10 <sup>-3</sup> (1.5 × 10 <sup>-3</sup> )	3.60 × 10 <sup>-3</sup> (1.1 × 10 <sup>-4</sup> )	2.71 × 10 <sup>-3</sup> (6.2 × 10 <sup>-4</sup> )	3.26 × 10 <sup>-3</sup> (5.3 × 10 <sup>-4</sup> )
F5	1.80 × 10 <sup>-3</sup> (1.8 × 10 <sup>-3</sup> )	4.38 × 10 <sup>-3</sup> (2.5 × 10 <sup>-3</sup> )	2.61 × 10 <sup>-3</sup> (2.8 × 10 <sup>-4</sup> )	1.75 × 10 <sup>-3</sup> (3.6 × 10 <sup>-4</sup> ) *	2.22 × 10 <sup>-3</sup> (2.6 × 10 <sup>-4</sup> )
F6	1.24 × 10 <sup>-3</sup> (9.2 × 10 <sup>-5</sup> ) *	3.10 × 10 <sup>-3</sup> (4.4 × 10 <sup>-4</sup> )	5.53 × 10 <sup>-3</sup> (9.7 × 10 <sup>-4</sup> )	3.09 × 10 <sup>-3</sup> (2.4 × 10 <sup>-4</sup> )	2.79 × 10 <sup>-3</sup> (2.1 × 10 <sup>-4</sup> )
F7	1.37 × 10 <sup>-3</sup> (1.5 × 10 <sup>-3</sup> ) *	1.38 × 10 <sup>-2</sup> (5.9 × 10 <sup>-3</sup> )	1.93 × 10 <sup>-2</sup> (1.9 × 10 <sup>-3</sup> )	7.73 × 10 <sup>-3</sup> (2.9 × 10 <sup>-3</sup> )	9.51 × 10 <sup>-3</sup> (4.2 × 10 <sup>-3</sup> )
F8	7.24 × 10 <sup>-3</sup> (2.0 × 10 <sup>-3</sup> )	1.18 × 10 <sup>-2</sup> (5.0 × 10 <sup>-3</sup> )	1.91 × 10 <sup>-2</sup> (1.6 × 10 <sup>-3</sup> )	6.57 × 10 <sup>-3</sup> (2.0 × 10 <sup>-3</sup> )	6.25 × 10 <sup>-3</sup> (1.2 × 10 <sup>-3</sup> ) *
F9	7.51 × 10 <sup>-4</sup> (2.8 × 10 <sup>-4</sup> ) *	6.07 × 10 <sup>-3</sup> (2.2 × 10 <sup>-3</sup> )	6.73 × 10 <sup>-3</sup> (3.1 × 10 <sup>-3</sup> )	7.16 × 10 <sup>-3</sup> (2.5 × 10 <sup>-3</sup> )	6.26 × 10 <sup>-3</sup> (1.5 × 10 <sup>-3</sup> )

从表 1 可以看出, MOEA/D-OLM 在 9 个测试问题中获得了 7 个最优的 HV 值, MOEA/D-DE 获得了 1 个最好的 HV 值, SPEA2 也获得了 1 个最好

的 HV 值, GDE3 未获得。对于次优值, 即第 2 优的值, MOEA/D-OLM 获得了 1 个, MOEA/D-DE 获得了 5 个, NSGA-II 有 2 个次优值, SPEA2 获得了 1

个。由此表明,本文算法在所有测试问题中获得的总体 HV 性能要显著优于另外 4 种对比算法,其中 MOEA/D-DE 算法位列第 2。当然,根据没有免费午餐定律,不可能期待本文算法在每个测试函数上都获得最好的 HV 值,由于 HV 性能函数是一个综合指标,其更能反映算法的分布性,因此,说明 MOEA/D-OLM 算法在分布性上表现较为突出。

表 2 给出了 5 种对等比较算法在 F1 ~ F9 测试问题上的 IGD 性能对比结果。从表 2 可以看出,

MOEA/D-OLM 算法获得了 6 个最优值,NSGA-II 获得 2 个最优值,SPEA2 算法获得了 1 个最优值,GDE3 算法获得 0 个。MOEA/D-OLM 算法在 F5 问题上获得了 1 个次优解,MOEA/D-DE 算法获得 3 个次优解,NSGA-II 获得 3 个次优解,GDE3 获得 1 个次优解。总体上表明,本文算法在 9 个测试问题上具有很好的综合性能。

图 3 为 6 种算法在求解 F1 ~ F9 时 30 次独立运行实验盒状图。图 3 中,矩形条代表指标的四分位

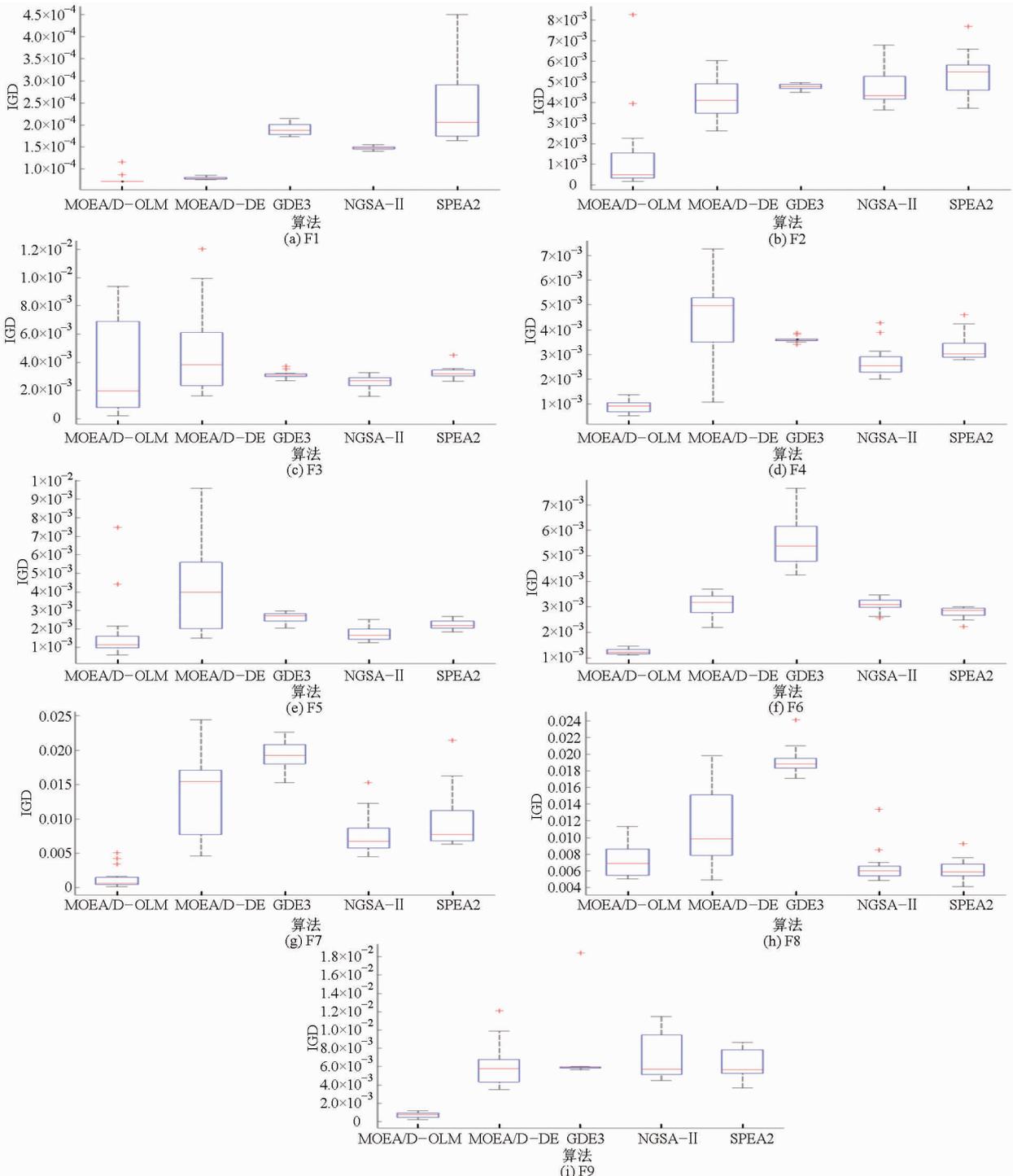


图 3 5 种算法对 F1 ~ F9 测试问题的统计分布

Fig. 3 Statistical distribution of F1 ~ F9 test problems by five algorithms

差,数学意义是指标的主要分布区域,矩形条越短,就意味着数据越集中,也就越好矩形条中的红色横线代表数据的中位数,对于指标 IGD,中位数越小越好。矩形条两端的虚线表示统计学中的最大值和最小值,超出虚线的数据用“+”表示,该数据为异常点。图 3 可以从统计学的角度对算法的性能进行分析,由图可知,在 F1、F2、F4、F6、F7 和 F9 问题解的分布具有较明显的优势,与表 2 中的数据能够相互印证。

从表 1、2 和图 3 可得,在进化过程中,通过反向学习模型和差分进化策略相互作用,能够很好地平衡算法的全局搜索和局部寻优能力,尤其是随着进化的进行,反向学习模型更多的参与进化,有利于算法的局部搜索,从而使得算法的解更均匀。综上所述,MOEA/D-OLM 算法在分布性、收敛性和多样性都优于其他 4 种算法,而且从盒图中解的分布范围可知,算法的稳定性较好。

### 3 工程实例

为了进一步分析 MOEA/D-OLM 算法在求解约束问题的能力,将其应用于某轻型飞机齿轮箱优化设计问题<sup>[27]</sup>,如图 4 所示。其中,优化问题为 3 目标函数,目标分别为齿轮箱的质量最小和轴 1 与轴 2 的应力最小,并满足齿的弯曲应力、接触应力、轴的扭转变形以及应力等约束。问题的设计变量为齿宽( $x_1$ )、齿轮模数( $x_2$ )、小齿轮齿数( $x_3$ )、轴承 1 之间的距离( $x_4$ )、轴承 2 之间的距离( $x_5$ )、轴 1 的直径( $x_6$ )、轴 2 的直径( $x_7$ )。数学模型如下

$$f_1 = 0.7485x_1x_2^2(10x_3^2/3 + 14.933x_3 - 43.0934) - 1.508(x_6^2 + x_7^2) + 7.477(x_6^3 + x_7^3) + 0.7458(x_4x_6^2 + x_5x_7^2)$$

$$f_2 = \sqrt{(745x_4/x_2x_3)^2 + 1.69 \times 10^7/(0.1x_6^3)}$$

$$f_3 = \sqrt{(745x_5/x_2x_3)^2 + 1.575 \times 10^8/(0.1x_7^3)}$$

约束:

弯曲应力约束

$$\frac{1}{x_1x_2^2x_3} - \frac{1}{27} \leq 0$$

齿的接触应力约束

$$\frac{1}{x_1x_2^2x_3^2} - \frac{1}{397.5} \leq 0$$

轴的变形约束

$$\frac{x_4^3}{x_2x_3x_6^4} - \frac{1}{1.93} \leq 0$$

$$\frac{x_5^3}{x_2x_3x_7^4} - \frac{1}{1.93} \leq 0$$

几何约束

$$x_2x_3 - 40 \leq 0$$

$$x_1/x_2 - 12 \leq 0$$

$$5 - x_1/x_2 \leq 0$$

设计条件

$$1.9 - x_4 + 1.5x_6 \leq 0$$

$$1.9 - x_5 + 1.1x_7 \leq 0$$

轴的应力约束

$$f_2 \leq 1300$$

$$f_3 \leq 1100$$

设计变量上下限为:  $2.6 \leq x_1 \leq 3.6, 0.7 \leq x_2 \leq 0.8, 17 \leq x_3 \leq 28, 7.3 \leq x_4 \leq 8.3, 7.3 \leq x_5 \leq 8.3, 2.9 \leq x_6 \leq 3.9, 5.0 \leq x_7 \leq 5.5$ 。

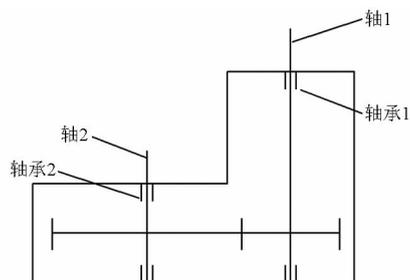


图 4 减速器结构简图

Fig. 4 Schematic diagram of speed reducer

由于减速器优化设计问题含有约束问题,本文采用如下方法处理约束<sup>[25]</sup>:当在两个比较的个体中,一个个体为可行解,另外一个个体为不可行解时,选择可行解;当两个比较的个体均为可行解时,选择非支配的个体占优;当两个比较的个体均为不可行解时,选择违反约束条件程度小的个体。设置算法的参数为,种群规模为 500,  $CR = 1.0, F = 0.5, \eta = 20, P_m = 1/n, T = 20, n_r = 2$ 。MOEA/D-OLM 算法获得 Pareto 前端解集同文献[27]相当,如图 5 所示,说明了算法在求解含有约束的实际工程问题的实用性。

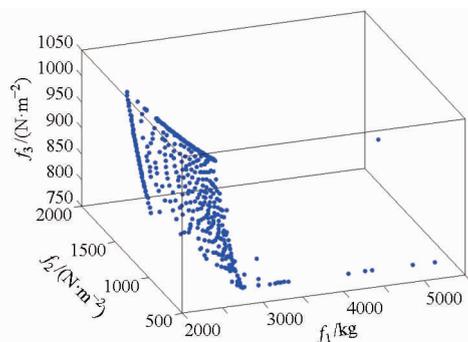


图 5 Pareto 曲线

Fig. 5 Pareto curve

### 4 结束语

在 MOEA/D 算法框架下,将反向学习模型融入

框架中,提出了一种基于反向学习模型和分解机制的多目标进化算法(MOEA/D-OLM)。将反向学习模型和差分进行策略联合,其中反向学习模型有利于算法的局部寻优的能力,而差分进化策略对全局搜索有较好的效果,随着算法的进行,能自适应地调整算法的全局搜索和局部寻优能力。将 MOEA/D-OLM 算法同 MOEA/D-DE、GDE3、NSGA-II 和

SPEA2 算法,在与具有复杂 PS 的 LZ09 系列函数进行对比测试,实验结果表明 MOEA/D-OLM 算法整体性能明显优于其他几种对比算法。为了分析 MOEA/D-OLM 算法在解决含有约束问题的能力,将其应用于减速器多目标优化设计问题中,结果显示该算法获得 Pareto 前端较均匀,表明算法解决含有约束问题的能力和工程有效性。

#### 参 考 文 献

- ZHANG Q F, LI H. MOEA/D: a multi-objective evolutionary algorithm based on decomposition [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2007, 11(6):712-731.
- LI H, LANDA-SILVA D. An adaptive evolutionary multi-objective approach based on simulated annealing [J]. Evolutionary Computation, 2011, 19(4):561-595.
- KE L, ZHANG Q F, BATTITI R. MOEA/D-ACO: a multiobjective evolutionary algorithm using decomposition and ant colony [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2013, 43(6):1845-1859.
- MARTINEZ Z, COELLO COELLO C. A multi-objective particle swarm optimizer based on decomposition [C]// Genetic and Evolutionary Computation Conference, New York: ACM, 2011:69-76.
- 王亚辉,贾晨辉,赵仁鹏.基于分解机制的多目标蝙蝠算法[J].农业机械学报,2015,46(4):316-324.  
WANG Yahui, JIA Chenhui, ZHAO Renpeng. Multi-objective bat algorithm based on decomposition [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015,46(4):316-324. (in Chinese)
- ZHANG Q F, LI H, MARINGER D, et al. MOEA/D with NBI-style Tchebycheff approach for portfolio management [C]//2010 IEEE Congress on Evolutionary Computation, Barcelona: IEEE, 2010:1-8.
- ISHIBUCHI H, SAKANE Y, TSUKAMOTO N, et al. Adaptation of scalarizing functions in MOEA/D: an adaptive scalar zing function-based multi-objective evolutionary algorithm [C]//International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Heidelberg: Springer, 2009:438-452.
- ISHIBUCHI H, SAKANE Y, TSUKAMOTO N, et al. Simultaneous use of different scalarizing functions in MOEA/D [C]// Genetic and Evolutionary Computation Conference, New York: ACM, 2010:519-526.
- TAN Y, JIAO Y, LI H, et al. MOEA/D + uniform design: a new version of MOEA/D for optimization problems with many objectives[J]. Computers & Operations Research,2013, 40(6):1648-1660.
- MA X, QI Y, LI L, et al. MOEA/D with uniform decomposition measurement for many-objective problems [J]. Soft Computing, 2014, 18(12):2541-2564.
- GU F, LIU H. A novel weight design in multi-objective evolutionary algorithm [C]//2010 International Conference on Computational Intelligence and Security, 2010:137-141.
- QI Y, MA X, LIU F, et al. MOEA/D with adaptive weight adjustment [J]. Evolutionary Computation, 2014, 22(2):231-264.
- 周爱民,张青富,张桂成.一种基于混合高斯模型的多目标进化算法[J].软件学报,2014,25(5):913-928.  
ZHOU Aimin, ZHANG Qingfu, ZHANG Guixu. Multi-objective evolutionary algorithm based on mixture Gaussian models [J]. Journal of Software, 2014, 25(5):913-928. (in Chinese)
- 张冬梅,龚小胜,戴光明,等.求解复杂多目标优化问题 MOEA/D-GEP 算法[J].华中科技大学学报:自然科学版,2012,40(4):33-36.  
ZHANG Dongmei, GONG Xiaosheng, DAI Guangming, et al. MOEA/D-GEP algorithm solving expensive multi-objective optimization problems [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2012,40(4):33-36. (in Chinese)
- CHEN C, CHEN C, ZHANG Q. Enhancing MOEA/D with guided mutation and priority update for multi-objective optimization [C]//2009 IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2009:209-216.
- HUANG W, LI H. On the differential evolution schemes in MOEA/D [C]//2010 International Conference on Natural Computation, IEEE, 2010:2788-2792.
- LI H, LANDA-SILVA D. An adaptive evolutionary multi-objective approach based on simulated annealing [J]. Evolutionary Computation, 2011, 19(4):561-595.
- LI H, ZHANG Q. Multiobjective optimization problems with complicated Pareto sets, MOEA/D and NSGA-II [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2009, 13(2):284-302.
- TIZHOOSH H. Opposition-based reinforcement learning [J]. Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, 2006, 20(4):578-585.

- 15 王学林,姬长英,周俊,等. 基于灰色预测控制的果蔬抓去系统设计与实验[J]. 农业工程学报,2010,26(3):112-117.  
WANG X L, JI C Y, ZHOU J, et al. Design and experiment of fruit and vegetable grasping system based on grey prediction control[J]. Transactions of the CSAE, 2010, 26(3): 112-117. (in Chinese)
- 16 张广立,付莹,杨汝清. 一种新型自适应灰色预测控制器[J]. 控制与决策,2004,19(2):212-215.  
ZHANG Guangli, FU Ying, YANG Ruqing. Novel self-adjustable grey prediction controller[J]. Control and Decision, 2004, 19(2): 212-215. (in Chinese)
- 17 WANG Z X, DANG Y G, ZHAO J J. Optimized GM(1,1) power model and its application[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(9): 1973-1978.
- 18 WANG Z X, DANG Y G, LIU S F, et al. Solution of GM(1,1) power model and its properties[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(10): 2380-2383.
- 19 ZHANG B, XI G Q. GM(1,1) model optimization based on the background value and boundary value correction[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2013, 33(3): 682-688.
- 20 LU Jianshan, XIE Weidong, ZHANG Aijun, et al. Chaos-based modified GM(1,1) power model in time series prediction[J]. The Journal of Grey System, 2014, 26(4): 32-43.
- 21 WEI L S, FEI M R. Research on stability and simulation of adaptive grey predictive control[J]. Journal of System Simulation, 2009, 21(10): 3009-3013.
- 22 李秋影,李文. 分数阶干扰观测器在电机调速系统中的应用[J]. 大连交通大学学报,2009,30(3):79-82.  
LI Qiuying, LI Wen. Application of fractional-order disturbance observer in motor timing system [J]. Journal of Dalian Jiaotong University, 2009, 30(3): 79-82. (in Chinese)
- 23 ALAIN Oustaloup, FRANÇOIS Levron, BENOÎT Mathieu, et al. Nanot. frequency-band complex noninteger differentiator; characterization and synthesis [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2000, 47(1): 25-39.
- 24 齐乃明,秦昌茂,王威. 分数阶系统的最优 Oustaloup 数字实现算法[J]. 控制与决策,2010,25(10):1588-1600.  
QI Naiming, QIN Changmao, WANG Wei. Optimal Oustaloup digital realization of fractional order systems[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1588-1600. (in Chinese)
- 25 赵慧敏,李文,邓武. 一类分数阶滤波器逼近阶次的选择[J]. 电机与控制学报,2010,14(1):90-94.  
ZHAO Huimin, LI Wen, DENG Wu. Approximation degree selection for one kind of fractional-order filter[J]. Electric Machines and Control, 2010, 14(1): 90-94. (in Chinese)
- 26 韩萌. 并联式稳定平台技术研究[D]. 南京:南京理工大学,2015.  
HAN Meng. Research on the parallel stabilized platform technology [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2015. (in Chinese)

~~~~~

(上接第 332 页)

- 20 RAHNAMAYAN S, TIZHOOSH H R, SALAMA M M A. Opposition-based differential evolution [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2008, 12(1):64-79.
- 21 RAHNAMAYAN S, WANG G, VENTRESCA M. An intuitive distance-based explanation of opposition-based sampling [J]. Applied Soft Computing, 2012, 12(9):2828-2839.
- 22 ZITZLER E, THIELE L. Multi-objective evolutionary algorithms; a comparative case study and the strength Pareto approach [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3(4):257-271.
- 23 BOSMAN T, THIERENS D. The balance between proximity and diversity in multi-objective evolutionary algorithms[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2003, 7(2):174-188.
- 24 KUKKONEN S. GDE3: the third evolution step of generalized differential evolution[C]//2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2005:443-450.
- 25 DEB K, PRATAP A, AGARWAL S, et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.
- 26 ZITZLER E, LAUMANN S, THIELE L. SPEA2: improving the strength Pareto evolutionary algorithm for multi-objective optimization[C]//Proceedings of the Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control, 2002:95-100.
- 27 安伟刚. 多目标优化方法研究及其工程应用[D]. 西安:西北工业大学,2005.  
AN Weigang. Research on multi-objective optimization method and its engineering application [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2005. (in Chinese)