

基于 Matlab 的水田平地机运动学模型数值解求解\*

赵祚喜<sup>1,2</sup> 施 垒<sup>1</sup> 刘 雄<sup>1</sup> 可欣荣<sup>1</sup> 赵殴娅<sup>1</sup> 靳俊栋<sup>1</sup>

(1. 华南农业大学南方农业机械与装备关键技术教育部重点实验室, 广州 510642;

2. 南方粮油作物协同创新中心, 长沙 410128)

**摘要:** 利用 Matlab 提供的数学函数 ode45,对基于水田平地机调平系统运动学模型的方程组,以正弦输入电流为例,进行数值解求解,得到平地机平地铲倾角、角速度、扭簧扭转角度等状态变量与输入电流的数值关系。该方法可以准确地求解数值解,且能方便分析方程组中任意变量与已知变量的关系。该方法对于其他多输入多输出的农机具机械液压系统运动学模型的数值解求解与特性分析具有借鉴意义。

**关键词:** 水田平地机 运动学模型 微分代数方程组 数值解

**中图分类号:** S11<sup>+</sup>2; S222.5<sup>+</sup>1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2015)S0-0063-06

Numerical Solution of Kinematics Model for Leveling System  
of Paddy Field Leveler Based on Matlab

Zhao Zuoxi<sup>1,2</sup> Shi Lei<sup>1</sup> Liu Xiong<sup>1</sup> Ke Xinrong<sup>1</sup> Zhao Ouya<sup>1</sup> Jin Jundong<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Key Technology on Agricultural Machine and Equipment, Ministry of Education, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China

2. Southern Regional Collaborative Innovation Center for Grain and Oil Crops in China, Changsha 410128, China)

**Abstract:** Kinematics model of mechanical hydraulic system usually involves the speed, acceleration and geometric constraint, which will contain one or two and even higher order differential equations. The number of differential-algebraic equations (DAEs) increases with the increase of system complexity. In order to find a suitable control arithmetic, it is needed to figure out the relationship of different state variables. However, it's always impossible to get analytical solution. Thus it is needed to find the numerical solution of DAEs system, especially when it has too many state variables. Solving this problem with computer software is a common way; there are several helpful softwares, such as Matlab, Maple, Simulink and Mathematica. The mathematical function provided by the Matlab ode45 was used to solve the kinematics model of leveling system of paddy field leveler with sinusoidal input current. Firstly, the real paddy field leveler was simplified to kinematics model and showed in DAEs form based on theoretical mechanics and hydraulic theory. Secondly, the DAEs were changed into ODEs (ordinary differential equations). Finally, the ode45 was used to get numerical solution and show the relationship of state variables. The input current and output state variables were showed in figure. The method can help to get accurate numerical solution for DAEs system, and it also can display the relationship between the random input with known equations and other state variables. It will help to forecast the state variables at the next moment and design an efficient control algorithm for paddy field leveler.

**Key words:** Paddy field leveler Kinematics model Differential-algebraic equations Numerical solution

收稿日期: 2015-10-28 修回日期: 2015-11-19

\* 国家自然科学基金资助项目(61175081)、广东省联合培养研究生示范基地人才培养资助项目(2013JDXM13)和广东省教育厅示范课程资助项目(2013SFKC04)

作者简介: 赵祚喜,教授,博士生导师,主要从事农业机械与装备自动控制设计研究,E-mail: zhao\_zuoxi@hotmail.com

引言

农业机械设计中,常常涉及到齿轮减速器驱动的旋转机构;液压缸驱动的平动、旋转;杆件的弹性变形等<sup>[1-2]</sup>。这些运动包含了速度、加速度、角速度、角加速度,液压油压强变化等,为掌握系统在动态工作过程中状态变量的规律,需要对基于理论力学、液压原理等建立的运动学模型进行求解。可是由于涉及变量多(通常多达 10 个,甚至更多)、高阶数(二阶、三阶)的微分方程、代数方程约束、边界条件,通过高等数学中提供的常微分方程求解等方法,往往解决不了这些问题。

对于复杂大型的微分代数方程组(简称 DAE)模型求解,Matlab 提供了丰富的数学求解函数,如 ode15i、ode45、ode113、ode23s、ode23tb 等<sup>[3]</sup>。ode15i 是专门用于求解隐式微分代数方程组的求解函数,建立的方程组不需要变形即可直接使用,缺点是相比 ode45 求解复杂,且容易出错。ode45 适合求解非刚性 ode,运算精度较高,变步长且计算速度快,适应性强,是求解代数微分方程组的首选。此外,专业数学求解软件 Maple、Mathematica 也有丰富的数学函数,是数学计算常用工具软件<sup>[4-5]</sup>。为了将模型的分析、传递函数的拟合等在 Matlab 上集成实现,本文以 Matlab 为平台<sup>[6-7]</sup>,对基于水田激光平地机的调平系统运动学模型进行数值解求解。

1 运动学模型与解析方法

1.1 平地机机械液压系统的运动学模型

本文建立的运动学模型是基于华南农业大学研制的 1JP3.0 型水田激光平地机的平地铲水平调节物理系统。系统由一个液压驱动缸、水平铲、安装台、平行连杆、车身组成,见图 1。通过液压缸的伸

缩调节平地铲与水平位置的夹角(简称水平倾角),可是平行连杆有变形、液压缸两端的铰链及平行连杆连接车身与安装台之间的铰链有安装间隙,这些都导致水平倾角不单独由液压缸的伸缩所决定。该文重点研究模型的求解,建模过程可参照文献<sup>[1,8]</sup>。

图 1b 是由实际物理系统简化得到的运动学模型,该简化模型的建立基于以下几个假设条件:①车身固定不动。②平行连杆视为一个扭簧。③水平铲、液压缸、安装台视为刚性杆件。④液压油不可压缩。⑤各安装铰链视为理想铰链。得到图 1b 的简化模型之后基于理论力学和液压系统相关原理,对杆件的运动进行分解,根据牛顿基本定理,以及针对杆件的质心动量矩定理、质心运动定理,则可以建立一组微分代数方程组(Differential-algebraic equation, DAE)<sup>[9-10]</sup>。该模型具有 11 个变量,涉及到一阶微分方程 8 个,二阶微分方程 6 个。这里定义  $Q$  是时间的函数,作为输入变量,其他变量作为输出变量。由于 daeFunction 句柄函数是 2015 年 Matlab 函数库新增的针对隐式微分代数方程组数值解求解的辅助函数,适用性相对 ode45 小,故本文重点介绍 ode45 的求解计算。

比例流量换向阀阀环节视作单纯的比例关系

$$Q = I_s K_q \tag{1}$$

假设液压油体积弹性模量系数不变,则有

$$P' = \frac{\beta_e}{V_1 + A d} (Q - A d') \tag{2}$$

将安装台和平地铲独立拆分对其做受力分析(图 2), $M_e$  是安装台受到的扭矩,与扭簧扭转刚度和阻尼系数有关; $F_x$  是平地铲在  $C$  点处水平方向的受力; $N$ ;  $F_y$  是平地铲在  $C$  点处垂直方向的受力; $N$ ;  $l_1$  是点  $B$ 、 $E$  间的距离, $m$ ;  $l_2$  是点  $B$ 、 $C$  间的距离, $m$ ;  $l_3$

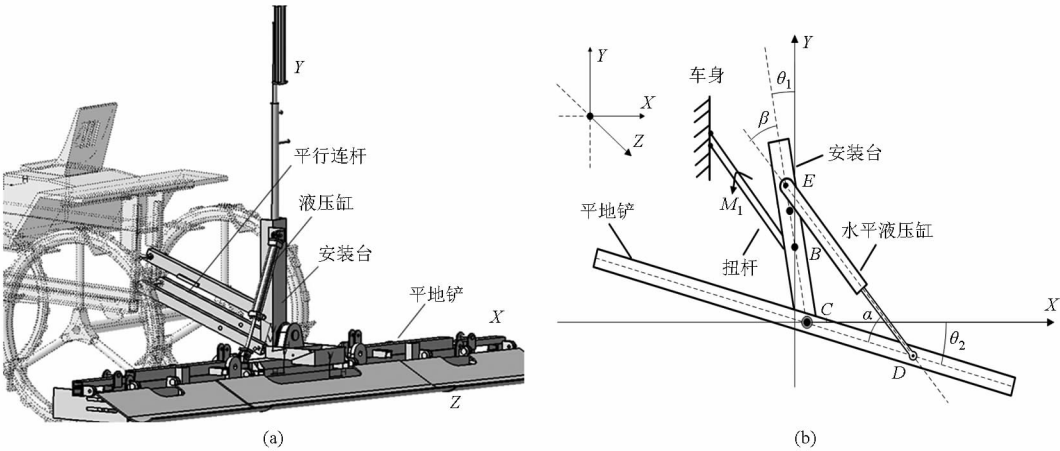


图 1 水田激光平地机

Fig. 1 Paddy field laser leveling machine

(a) 水田激光平地机三维图 (b) 水田激光平地机运动分析简图

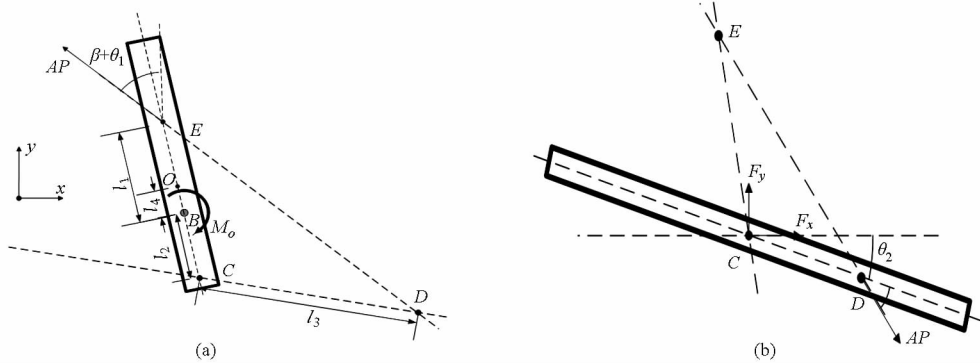


图2 安装台与平地铲受力分析

Fig. 2 Force diagram for mounting platform and land-leveling plow

是点  $C$ 、 $D$  间的距离,  $m$ ;  $l_4$  是点  $O$ 、 $B$  间的距离,  $m$ 。

根据刚体转动与平动的原理, 由  $B$  点加速度和刚体绕  $B$  的转动角速度, 可以得出刚体上任意一点加速度, 为此质心  $O$  在  $x$  轴和  $y$  轴方向的加速度为

$$a_{Ox} = x'' + l_4 \theta_1'^2 \sin \theta_1 - l_4 \theta_1'' \cos \theta_1 \quad (3)$$

$$a_{Oy} = y'' - l_4 \theta_1'^2 \cos \theta_1 - l_4 \theta_1'' \sin \theta_1 \quad (4)$$

式中  $x''$ 、 $y''$ —— $B$  点在竖直平面内  $x$  轴和  $y$  轴方向的加速度

所以, 对安装台运用质心运动定理, 可得

$$-AP \sin(\beta + \theta_1) - F_x = m_1 a_{Ox} \quad (5)$$

$$AP \cos(\beta + \theta_1) - F_y = m_1 a_{Oy} \quad (6)$$

式中  $m_1$ ——安装台质量,  $kg$

同时, 对安装台运用质心动量矩定理, 可得

$$AP(l_1 - l_4) \sin \beta - F_x(l_2 + l_4) \cos \theta_1 - K_t \theta_1 - C_t \theta_1' - F_y(l_2 + l_4) \sin \theta_1 = J_1 \theta_1'' \quad (7)$$

式中  $J_1$ ——安装台转动惯量,  $kg \cdot m^2$

$K_t$ ——平行连杆的扭簧系数,  $N/m$

$C_t$ ——平行连杆黏性摩擦系数,  $N \cdot m \cdot s$

平地铲的受力来自  $C$  点铰链的反作用力和  $D$  点液压缸作用力  $AP$ 。为此,  $C$  点的加速度可由基点  $B$  的加速度与  $C$  点相对于点  $B$  的加速度叠加得出, 为此,  $C$  点在  $x$  轴和  $y$  轴方向的加速度表示为

$$a_{cx} = x'' - l_2 \theta_1'^2 \sin \theta_1 + l_2 \theta_1'' \cos \theta_1 \quad (8)$$

$$a_{cy} = y'' + l_2 \theta_1'^2 \cos \theta_1 + l_2 \theta_1'' \sin \theta_1 \quad (9)$$

所以, 对平地铲质心  $C$  运用质心运动定理, 可得

$$F_x + AP \cos(\alpha + \theta_2) = m_2 (x'' - l_2 \theta_1'^2 \sin \theta_1 + l_2 \theta_1'' \cos \theta_1) \quad (10)$$

$$F_y - AP \sin(\alpha + \theta_2) = m_2 (y'' + l_2 \theta_1'^2 \cos \theta_1 + l_2 \theta_1'' \sin \theta_1) \quad (11)$$

式中  $m_2$ ——平地铲质量,  $kg$

同时, 对平地铲运用质心动量矩定理, 可得

$$AP l_3 \sin \alpha - c_2 \theta_2' = J_2 \theta_2'' \quad (12)$$

式中  $J_2$ ——平地铲转动惯量,  $kg \cdot m^2$

$c_2$ ——活塞与平地铲粘性阻尼系数,  $N \cdot m \cdot s$

最后, 利用三角函数关系, 可得出以下方程关系式

$$(d_0 + d)^2 = (l_1 + l_2)^2 + l_3^2 + 2(l_1 + l_2)l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (13)$$

$$(d_0 + d)d' = (l_1 + l_2)l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\theta_1' + \theta_2') \quad (14)$$

$$\alpha + \beta + \theta_1 + \theta_2 = \pi/2 \quad (15)$$

式中  $d_0$ ——平地铲水平时  $E$ 、 $D$  间距离,  $m$

$d$ ——液压杆伸缩位移,  $m$

其中式(14)是式(13)两边微分所得。由上述分析可得, 微分代数方程组(1)~(11), 构成平地机调平系统运动学 DAE 模型。

## 1.2 ode45 函数

在常微分方程组是否是刚性的未知条件下, 用 ode45 求解成功率高; ode45 求解结果为中等精度, 满足工程要求, 且无需各状态变量一阶初值; 使用广泛, 是求解数值解最常用的方法<sup>[11-12]</sup>。

### 1.2.1 ode45 函数数值解原理——龙格库塔积分原理

龙格库塔方法的理论基础来源于“泰勒公式”和“使用斜率近似表达微分”。它在积分区间内多计算几个点的斜率, 然后进行加权平均, 用作下一点的依据, 从而构造出了精度更高的数值积分。

### 1.2.2 计算方法

如预先求两个点的斜率则使用二阶龙格库塔法, 如预先取 4 个点则使用四阶龙格库塔法<sup>[13]</sup>。ode45 表示采用四阶、五阶 Runge-Kutta 单步算法, 截断误差为  $(\Delta x)^3$ 。适合解决的是 Nonstiff (非刚性) 的常微分方程。一阶常微分方程可以写作:  $y' = f(x, y)$ , 使用差分概念。  $(Y_n + 1 - Y_n)/h = f(X_n, Y_n)$  推出 (近似等于, 极限为  $Y_n'$ ), 即  $Y_n + 1 = Y_n + hf(X_n, Y_n)$ 。另外根据微分中值定理, 存在  $0 < t < 1$ , 使得  $Y_n + 1 = Y_n + hf(X_n + th, Y(X_n + th))$ 。

这里  $K = f(X_n + th, Y(X_n + th))$  称为平均斜率,

龙格库塔方法就是求得  $K$  的一种算法。利用这样的原理,经过复杂的数学推导,可以得出截断误差为步长  $h$  的 3 次方的四阶龙格库塔公式

$$\begin{aligned} K_1 &= f(X_n, Y_n) \\ K_2 &= f(X_n + h/2, Y_n + (h/2)K_1) \\ K_3 &= f(X_n + h/2, Y_n + (h/2)K_2) \\ K_4 &= f(X_n + h, Y_n + hK_3) \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{6}h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{aligned}$$

1.2.3 ode45 的调用

ODE 是常微分方程的简称,DAE 是微分代数方程组的简称。在 1.1 节得到的运动学模型是 DAE,为使用 ode45 函数,需要对 DAE 的形式进行变换。

首先,ode45 要求方程组必须等号左边是一阶微分变量,右边包含变量但不包括微积分的代数表达,即  $w' = f(w, t)$ ,  $w$  是列向量的形式。为此,该文在使用 ode45 时必须将 1.1 节中的含有二阶微分的变量化成为一阶,同时用等效替换法将所有的代数方程消去,得到目标格式的方程组<sup>[14]</sup>。

1.2.4 运动学模型方程组的格式变换

微分方程降阶方法:该方法参照文献[7],对于更高阶仍然可以这样处理。这里举例说明

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 10 \end{aligned}$$

得到该方程组可求解的格式。

通过假设新变量来实现降阶

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

1.2.5 平地机调平系统模型的降阶转化

借鉴 1.2.4 节的降阶方法,化简变形得到如下常微分方程组格式

$$d' = \frac{1}{d_0 + d}(l_1 + l_2)l_3[\cos(\theta_1 + \theta_2)](\theta_{12} + \theta_{22}) \tag{16}$$

$$p' = \frac{1}{v_1 + Ad} \left[ Q - A \frac{1}{d_0 + d} \cdot (l_1 + l_2)l_3[\cos(\theta_1 + \theta_2)](\theta_{12} + \theta_{22}) \right] \tag{17}$$

$$\theta_2' = \frac{1}{c_2}(APl_3\sin\alpha - J_2\theta_{22}') \tag{18}$$

$$\theta_{22}' = \frac{1}{J_2}(APl_3\sin\alpha - C_2\theta_{22}) \tag{19}$$

$$\theta_1' = \theta_{12} \tag{20}$$

$$\theta_{12}' = \frac{C_{11}B_{11} + A_{00}(m_1 + m_2) + C_{12}A_{11}}{B_{12}C_{11} + C_{12}A_{12} + B_{00}(m_1 + m_2)} \tag{21}$$

$$x_1' = \frac{B_{11} - B_{12}\theta_{12}'}{m_1 + m_2} \tag{22}$$

$$y_1' = \frac{A_{11} - A_{12}\theta_{12}'}{m_1 + m_2} \tag{23}$$

$$\theta_2' = \theta_{22} \tag{24}$$

$$x' = x_1 \tag{25}$$

$$y' = y_1 \tag{26}$$

$$\begin{aligned} A_{00} &= [m_2l_2\theta_{12}^2\sin\theta_1 + AP\cos(\alpha + \theta_2)] \cdot \\ &\quad (l_2 + l_4)\cos\theta_1 + AP\sin\beta(l_1 - l_4) - \\ &\quad k_t\theta_1 - c_t\theta_{12} - A_{01} \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} A_{01} &= [m_2l_2\theta_{12}^2\cos\theta_1 + AP\sin(\alpha + \theta_2)] \cdot \\ &\quad (l_2 + l_4)\sin\theta_1 \end{aligned} \tag{28}$$

$$B_{00} = J_1 + m_2(l_2 + l_4)l_2 \tag{29}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= AP\cos(\beta + \theta_1) - AP\sin(\alpha + \theta_2) - k_yy - \\ &\quad c_yy_1 - m_2l_2\theta_{12}^2\cos\theta_1 + m_1l_4\theta_{12}^2\cos\theta_1 \end{aligned} \tag{30}$$

$$A_{12} = m_2l_2\sin\theta_1 - m_1l_4\sin\theta_1 \tag{31}$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= -AP\sin(\beta + \theta_1) - k_x x - c_x x_1 + \\ &\quad m_2l_2\theta_{12}^2\sin\theta_1 + AP\cos(\alpha + \theta_2) - \\ &\quad m_1l_4\theta_{12}^2\sin\theta_1 \end{aligned} \tag{32}$$

$$B_{12} = m_2l_2\cos\theta_1 - m_1l_4\cos\theta_1 \tag{33}$$

$$C_{11} = -(l_2 + l_4)\cos\theta_1 m_2 x_1' \tag{34}$$

$$C_{12} = -(l_2 + l_4)\sin\theta_1 m_2 y_1' \tag{35}$$

$$\alpha = \arccos \frac{l_3 + (d_0 + d)^2 - (l_1 + l_2)^2}{2l_3(d_0 + d)} \tag{36}$$

$$\beta = \arccos \frac{(l_1 + l_2)^2 + (d_0 + d)^2 - l_3}{2(l_1 + l_2)(d_0 + d)} \tag{37}$$

经过以上变形的方程(16)~(35)所组成的常微分方程组,ode45 可求解。所生成函数,保存为与函数名同名的 m 文件,下一步即可使用 ode45 调用求解。研究中发现,将高阶微分方程已经代数约束化简为常微分方程较繁琐,Matlab 的 daeFunction 函数可以实现任意形式的 DAEs 求解,通过定义状态变量和参数和状态初值求解,降阶和代数方程转换由 Matlab 完成求解。缺点是 daeFunction 函数容易出错。本文中尝试了用该方法求解,可是出现错误提示:矩阵奇异,未得到结果,需要进一步研究。

2 基于 ode45 函数的运动学模型数值求解

ode45 作为常用的数值解求解函数,由于其方法简单、适用性广而被广泛接受<sup>[4]</sup>。本文的求解流程图如图 3 所示,也可以看出该方法的优点。在 Matlab 中 function 可以用来定义生成一个函数,本文中通过 function 生成步骤建立的调平系统运动学

模型方程组,在下一步利用 ode45 求解数值解时,当给定状态变量初始值、仿真求解时间后即可调用该函数。这里需要注意的是函数名和保存的 m 文件名须一致。

得到 1.2 节中生成 function.m 文件之后,按照图 3 流程图,求解 DAE。由于微分代数方程组有刚性和非刚性之分,相应的求解函数也不一样,对于非刚性微分代数方程组,多数条件下即可求出数值解。

求解函数名为 function 的例子。设置  $t$  的取值范围  $0 \sim 4\text{ s}$ ,  $y$  包含 6 个状态变量,6 个变量的初始值都是 0,平地铲水平倾角和时间的数值解关系通过 plot 绘制。对于本文中的平地机调平系统运动学模型,绘制了一组电流与平地铲倾角、平地铲倾角角

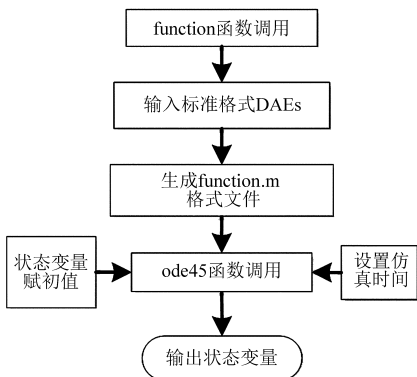


图 3 平地机调平系统运动学模型求解流程图  
Fig. 3 Kinematic model of leveling system for leveling machine

速度、安装台角度 3 个状态变量的定量关系<sup>[15-16]</sup>,如图 4 所示。

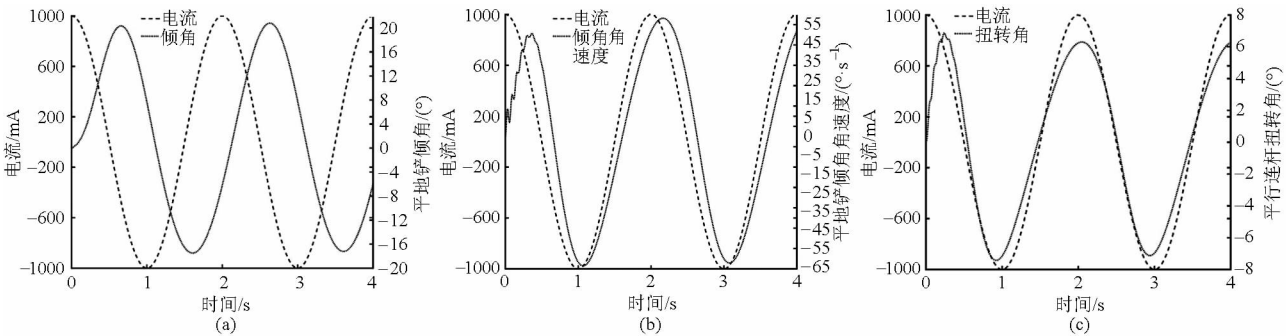


图 4 正弦电流输入条件下的各状态变量数值解  
Fig. 4 Numerical solution of state variables under sinusoidal input current

图 4 中的正弦输入的电流幅值是 1 A,频率是 0.5 Hz,平地机的调平驱动液压缸配备的是比例流量换向阀,这里近似认为电流与流量是比例关系。由图 4a 可以看出第一个正弦周期结束,电流为零时,平地铲倾角继续增加,这是由于扭簧的扭转引起的,与实际现象吻合。随着时间的累计,倾角与输入电流的相位误差有变大趋势,这 and 实际试验观察到的现象也是一致的。图 4b 中输入电流与平地铲倾角角速度的关系可以看出角速度相位相比电流存在延迟。图 4c 中可以看出平行连杆的扭转角幅值最大可以达到 6°,这也说明假设安装台固定不动,对于实现精度是  $\pm 1^\circ$  的精确控制是不合理的。同时,

该方法可方便改变模型参数,输入信号类型,对模型分析更为方便可靠。

3 结束语

阐述了基于 Matlab 的 ode45 求解平地机调平系统运动学模型输入与多个状态变量的数值解关系,证明了该方法的可行性与便利性,为其他机械液压系统运动学模型或者 DAE 模型的分析提供了一种有效途径。此外,该方法还可以实现模型参数变化对系统影响、任意输入信号下系统响应的分析,可以发现和指导改进系统机械结构的不足以及建立基于过程的动态控制。

参 考 文 献

1 陈嘉琪,赵祚喜,施垒,等. 水田激光平地机调平系统动力学建模 [J]. 农业工程学报, 2015, 31(7): 18-23.  
Chen Jiaqi, Zhao Zuoxi, Shi Lei, et al. Dynamic modeling of leveling system of paddy field laser leveler[J]. Transactions of the CSAE, 2015, 31(7): 18-23. (in Chinese)

2 胡炼,罗锡文,林潮兴,等. 1PJ-4.0 型水田激光平地机设计与试验[J]. 农业机械学报, 2014, 45(4): 146-151.  
Hu Lian, Luo Xiwen, Lin Chaoxing, et al. Development of 1PJ-4.0 laser leveler installed on a wheeled tractor for paddy field [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(4): 146-151. (in Chinese)

3 王学彬. 基于 MATLAB 求解常微分方程 [J]. 武夷学院学报, 2010, 29(5): 19-22.  
Wang Xuebin. Solving ordinary differential equation based on MATLAB [J]. Journal of Wuyi University, 2010, 29(5): 19-22. (in Chinese)

4 Jaan Kiusalaas. Numerical methods in engineering with Matlab[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

5 翁云杰,孙海娜. MAPLE 在微积分教学中的应用[J]. 玉林师范学院学报, 2006,27(增刊): 65 – 67.  
Weng Yunjie, Sun Haina. MAPLE in calculus teaching application [J]. Journal of Yulin Teachers College, 2006,27(Supp.): 65 – 67. (in Chinese)

6 朱春蓉,郑群珍. MAPLE 在常微分方程教学中的应用 [J]. 河南教育学院学报,2009, 18(3): 63 – 64.  
Zhu Chunrong, Zheng Qunzhen, Application of maple software to the teaching of ordinary differential equations [J]. Journal of Henan Institute of Education, 2009, 18(3): 63 – 64. (in Chinese)

7 胡庆婉. 常微分方程初值问题的数值求解及 Matlab 实现[J]. 科技信息, 2012(7): 34 – 35.  
Hu Qingwan. Initial value problem of ordinary differential equation is numerical solution and Matlab[J]. Science & Technology Information, 2012(7): 34 – 35. (in Chinese)

8 陈君梅,赵祚喜,陈嘉琪. 水田激光平地机非线性水平控制系统[J]. 农业机械学报,2014,45(7):79 – 84.  
Chen Junmei, Zhao Zuoxi, Chen Jiaqi. Design of nonlinear leveling control system for paddy land leveler[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(7): 79 – 84. (in Chinese)

9 Shadpour A, Unger A. Numerical DAE approach for solving a system dynamics problem [J]. Journal of Computing in Civil Engineering, 2015, 29(3):22 – 25.

10 Navarro A K W, Vassiliadis V S. Computer algebra systems coming of age: dynamic simulation and optimization of DAE systems in Mathematica TM[J]. Computers and Chemical Engineering, 2014,62: 125 – 138.

11 Peter Kunkel, Mehrmann V. Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution [J]. Ems Textbooks in Mathematics,2006,19(8):1218 – 1228.

12 Sebastian S, Andreas B, Michael G, et al. Progress in differential-algebraic equations[M]. Heidelberg: Springer, 2014.

13 张春慧,吴简彤,何昆鹏,等. 四阶龙格-库塔法在捷联惯导系统姿态解算中的应用 [J]. 声学 & 电子工程, 2005,32(6): 37 – 38, 48.  
Zhang Chunhui, Wu Jiantong, He Kunpeng, et al. Attitude algorithm of strapdown inertial navigation system using 4\_order Runge – Kutta[J]. Applied Science and Technology,2005, 32(6): 37 – 38, 48. (in Chinese)

14 唐家德. 基于 MATLAB 的非线性曲线拟合[J]. 计算机与现代化, 2008(6): 15 – 19.  
Tang Jiade. Nonlinear curve fitting based on MATLAB [J]. Computer and Modernization, 2008(6): 15 – 19. (in Chinese)

15 Janssen M, Lennartz B. Water through paddy bunds: methods, experimental data, and simulation studies [J]. Journal of Hydrology, 2009, 369(1 – 2): 142 – 153.

16 Peter Chapple. Principles of hydraulic system design[M]. London: Coxmoor Publishing Company, 2003:124 – 126.