

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.10.008

离心泵混合网格优化算法研究^{*}

刘厚林¹ 肖佳伟¹ 明加意¹ 董亮¹ 刘明明²

(1. 江苏大学流体机械工程技术研究中心, 镇江 212013;

2. 中交疏浚技术装备国家工程研究中心有限公司, 上海 201208)

摘要: 针对现有离心泵混合网格优化算法, 分别对四面体网格和三棱柱网格进行优化, 会出现优化质量不高且效率较低的问题, 建立一种同时考虑三角形形状和棱柱侧面正交性的三棱柱网格质量优化目标函数, 并结合已有四面体网格质量优化目标函数, 建立了能够在优化的同时考虑四面体和三棱柱网格质量的目标函数。此外, 对比分析了6种不同求最优值方法在迭代次数以及需求精度等因素变化情况下对混合网格优化效果的影响。数值验证结果表明, 共轭梯度法和二分法相结合且权重系数取0.2的求最优值方法, 其优化效果和效率最好; 对比分析本优化算法与某商业软件中的优化算法, 最差网格单元质量和整体网格的质量均有所提高, 且本算法优化后得到的最差网格单元质量要高于某商业软件。所提算法的优化效果优于已有算法。

关键词: 离心泵 混合网格 目标函数 最优值算法

中图分类号: TH311; O242.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2015)10-0049-07

Algorithm Optimization of Hybrid Grid for Centrifugal Pump

Liu Houlin¹ Xiao Jiawei¹ Ming Jiayi¹ Dong Liang¹ Liu Mingming²

(1. Research Center of Fluid Machinery Engineering and Technology, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China

2. CCCC National Engineering Research Center of Dredging Technology and Equipment Co., Ltd., Shanghai 201208, China)

Abstract: The algorithm optimization of hybrid grid for centrifugal pump optimizes tetrahedral mesh and tri-prism grid separately, which will lead to low quality and efficiency. To solve this problem, a tri-prism grid quality optimization objective function balancing triangle shape and orthogonality of prismatic side was established. Besides, the effects of six different methods of solving optimal solution on the results of optimizing hybrid grids were compared. Moreover, the impact of weight coefficient on optimization was also studied and the optimization results between the algorithm and a commercial software were compared. Results showed that the optimization results and efficiency were better when the conjugate gradient method and dichotomy were combined and weight coefficient value was 0.2. With the optimization algorithm, the quality of the worst grid cell and the whole grid was increased, comparing with the commercial software. In addition, the quality of the worst grid cell with the optimization algorithm was also increased compared with the commercial software. It indicates that the optimization algorithm is better than the existing algorithms.

Key words: Centrifugal pump Hybrid grid Objective function Optimal solution algorithm

引言

网格生成是离心泵 CFD 数值模拟的前提与关键, 是数值计算的首要条件^[1-2]。网格质量直接影

响 CFD 数值计算的收敛性、数值计算的精度及计算效率^[3]。网格可分为结构网格、非结构网格以及混合网格3大类, 结构网格具有计算精度高、效率高以及稳定性好等优点, 但它难以处理复杂外形且耗时

收稿日期: 2015-03-02 修回日期: 2015-04-03

^{*} 国家自然科学基金资助项目(51309119)、“十二五”国家科技支撑计划资助项目(2013BAK06B02)、江苏省重点研发计划资助项目(BE2015001-1)和江苏高校优势学科建设工程资助项目(PAPD)

作者简介: 刘厚林, 研究员, 博士生导师, 主要从事泵现代设计理论与方法研究, E-mail: liuhoulin@ujs.edu.cn

较长。非结构网格几何灵活性好,能够处理复杂几何外形,但是计算收敛速度慢,网格单元数量较多,且需要较大的计算机内存和较长的计算时间。混合网格生成技术^[4]结合了非结构网格生成技术和结构网格生成技术的优点,它不仅能够处理诸如离心泵这样的复杂模型,还能对离心泵内的湍流流动和边界层的粘性流动进行准确计算。

Coirier 等^[5]选用包含 4 种单元(即四面体、三棱柱、金字塔以及六面体)的混合网格对 Euler 方程和 N-S 方程进行数值计算;Luo 等^[6]使用三棱柱/四面体网格来计算高雷诺数粘性流动,并验证算法的有效性;Kallinderis 等^[7-8]提出了一种新的生成三棱柱网格的方法,它把代数和椭圆方法相耦合,该方法计算成本低、网格平滑,且能直接控制网格正交性和间距;Khawaja 等^[9]使用三棱柱/四面体混合网格处理三维复杂区域,并成功将其运用于飞行器和涡轮机械领域中;刘学强等^[10]采用代数方法和 Delaunay 方法分别生成三棱柱网格和四面体网格,并对三维可压雷诺平均 N-S 方程进行了求解,验证了算法的有效性;陈坚强等^[11]利用混合网格技术模拟粘性绕流,数值结果与结构网格得到的结果吻合较好。

以上各种网格技术在离心泵的数值模拟中发挥了积极作用,但是现有的方法生成离心泵混合网格时存在着边界处生成的三棱柱网格质量较差、层推进矢量设计不合理、没有专门针对混合网格优化的目标函数等问题。本文通过建立一种混合网格优化目标函数,结合高效的最优值方法,最终达到提高混合网格质量的目的。

1 混合网格目标函数的建立

1.1 基于三棱柱网格的目标函数

为准确有效地进行数值计算,三棱柱网格必须有很高的质量。其中三角形的形状和侧边的正交性非常重要,前者影响边界层棱柱和内部四面体的长宽比(图 1a),而后者影响棱柱的曲率(图 1b)。

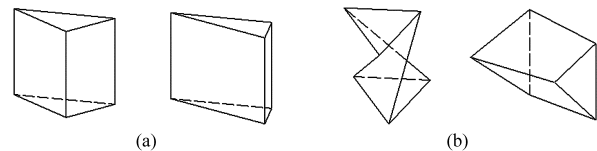


图 1 劣质三棱柱网格单元
Fig. 1 Tri-prism grid element of poor quality
(a) 三角形形状较差 (b) 正交性较差

为了增加算法的灵活性,通过对两个分别控制三角形形状和侧边正交性的目标函数进行加权运算。对棱柱的相关信息如下定义,具体标号如

图 2 所示。

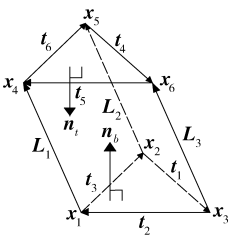


图 2 三棱柱单元顶点、边、面法向的命名
Fig. 2 Naming of normal vertex, edge and surface to tri-prism grid element

其中, $x_j(j=1,2,\cdots,6)$ 为棱柱的顶点, $x_1x_2x_3$ 和 $x_4x_5x_6$ 为上、下三角形, t_j 是 x_j 相对应的边。 $L_i(i=1,2,3)$ 为棱柱侧边, n_i 和 n_b 分别为三棱柱上、下底面的法向量, L_i, n_i, n_b, t_j 和 x_i 满足

$$L_i = x_{i+3} - x_i$$

定义
$$i_+ = \begin{cases} i+1 & (i < 3) \\ 1 & (i = 3) \end{cases} \quad i_- = \begin{cases} i-1 & (i > 1) \\ 3 & (i = 1) \end{cases}$$

则
$$t_i = x_{i_-} - x_{i_+} \quad t_{i+3} = x_{i_-+3} - x_{i_++3}$$

$$n_i = t_3 \times t_4 \quad n_b = t_1 \times t_2$$

定义 $a_i = |n_i|, a_b = |n_b|, l_j = |t_j|$ 。

1.1.1 基于三角形形状的质量衡量准则

参照文献[12],建立衡量棱柱上、下底面的质量衡量准则,分别用 $E_{\theta,b}$ 和 $E_{\theta,t}$ 表示,即

$$E_{\theta,b} = \frac{2\sqrt{3}a_b}{\max\{l_i\} \sum_{i=1}^3 l_i} \quad E_{\theta,t} = \frac{2\sqrt{3}a_t}{\max\{l_{i+3}\} \sum_{i=1}^3 l_{i+3}}$$

则基于三角形形状的质量衡量准则 E_θ 为

$$E_\theta = \frac{1}{2}(E_{\theta,b} + E_{\theta,t}) = \frac{\frac{\sqrt{3}a_b}{\max\{l_i\} \sum_{i=1}^3 l_i} + \frac{\sqrt{3}a_t}{\max\{l_{i+3}\} \sum_{i=1}^3 l_{i+3}}}{2}$$

其中 $0 \leq E_\theta \leq 1$,当上、下底面三角形都为正三角形时, E_θ 的值为 1,而上、下底面三角形形状偏离正三角形越来越远时, E_θ 的值逐渐趋于 0。

1.1.2 基于正交性的质量准则

为了建立棱柱侧边正交性的质量衡量准则,定义 ϕ_i 和 ϕ_{i+3} 分别为 L_i 与 n_b 以及 L_i 与 n_i 之间的夹角,则

$$\phi_i = \arccos \frac{L_i^T \cdot n_b}{|L_i| |n_b|}$$

$$\phi_{i+3} = \arccos \frac{-L_i^T \cdot n_i}{|L_i| |n_i|}$$

正交性的质量准则表示为

$$E_\perp = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \left(\arccos \frac{L_i^T \cdot n_b}{|L_i| |n_b|} - \arccos \frac{-L_i^T \cdot n_i}{|L_i| |n_i|} \right) \frac{2}{\pi}$$

当棱柱侧边垂直于上、下底面时, $E_{\perp}$ 的值为 1, 当棱柱侧边与上、下底面平行, $E_{\perp}$ 的值为 0。

1.1.3 三棱柱网格的总体目标函数

本文结合三角形形状和侧边正交性来对三棱柱网格进行控制,对两者的质量衡量准则进行加权运算。为使得求解目标函数最小值时,网格质量最大,可得到基于三棱柱网格的总体目标函数 E ,即

$$E = 1 - [\mu E_{\theta} + (1 - \mu) E_{\perp}]_{\min}$$

式中 μ ——权重系数

1.2 基于四面体网格的目标函数

对于四面体,它的节点、边等信息定义如图 3 所示。

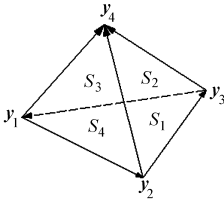


图 3 四面体单元顶点、边、面法向的命名
Fig. 3 Naming of normal vertex, edge and surface to tetrahedron grid element

$y_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 为四面体的顶点, L_{ij} 为顶点 y_i 和 y_j 连接的边。 S_i 为顶点 y_i 相对的三角形面的面积, V 为四面体的体积, 则

$$L_{ij} = y_j - y_i$$

定义 $d_{ij} = |L_{ij}|$, 参照文献 [13] 建立控制四面体网格质量的目标函数

$$F = 1 - Q_{\min}$$

其中

$$Q = V \left\{ 3.842\,35 \left[\sum_{k=1}^4 S_k / \left(\sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} S_i S_j d_{ij}^2 + 6 V_{\max_i} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq 4 \\ j \neq i}} S_j d_{ij} \right) \right]^{-\frac{3}{4}} + 1.450\,67 S_{rms}^{-\frac{3}{2}} \right\}^{-1}$$
$$S_{rms} = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 S_i^2}$$

2 方案确定

2.1 最优值优化算法组合

混合网格优化过程中如何获取目标函数最优值是决定算法优劣的重要因素,一般将获取优化节点目标函数最优值转化为求解目标函数最小值问题,即反复地求解一系列无约束条件下单变量函数的最优问题,在具体实施过程中需要考虑以下两个问题:一是如何获得目标函数最优下降方向;二是确定每次迭代的步长。不同探寻目标函数最优下降方向方法和一维搜索方法的组合就形成了不同的求解目标函数最优值的方法。将 3 种求解目标函数最优下降

方向的方法(最速下降法、共轭梯度法^[14]和变尺度法)与 3 种一维搜索方法(黄金分割法^[15]、抛物线法^[16]和二分法^[17])组合成 6 种求目标函数最优值的方法(表 1),并比较这些方法对于混合网格优化算法优化效果的影响。

表 1 不同组合的优化算法

Tab. 1 Optimization algorithm of different combinations

优化算法序号	求解目标函数 下降方向方法	一维搜索方法
1	最速下降法	黄金分割法
2	最速下降法	抛物线法
3	共轭梯度法	抛物线法
4	共轭梯度法	二分法
5	变尺度法	抛物线法
6	变尺度法	黄金分割法

2.2 优化结果对比

为分析比较不同求最优值方法对于三棱柱网格优化效果的影响,选择某一离心泵混合网格的局部网格(图 4,包括 21 个节点)进行优化。

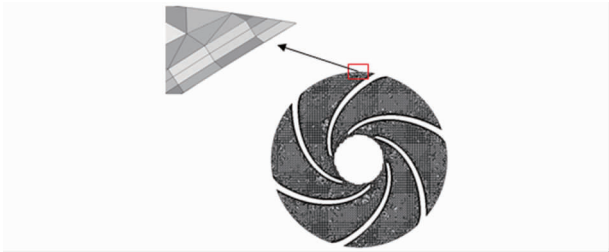


图 4 离心泵局部网格

Fig. 4 Partial grid for centrifugal pump

该区域节点坐标以及三棱柱单元拓扑连接方式如表 2 和表 3 所示,优化过程中仅移动一个节点(本文仅以移动节点 20 为例说明)来提高该区域的整体网格质量。在采用不同求最优值方法时,同时需考虑需求精度(即允许误差)对优化效果的影响,本文选取 5 个需求精度 (10^{-2} 、 10^{-3} 、 10^{-4} 、 10^{-5} 和 10^{-6}),优化过程中保持迭代次数不变(设置为 10 000),优化过程中采用现有的质量衡量准则及其对应的目标函数。

不同需求精度不同优化方法下优化所耗费时间、最终迭代次数以及优化后目标函数最优值如图 5 所示。从图 5a、5b 中可以看出,相同的需求精度下,不同的优化方法的耗费时间及迭代次数不尽相同,其中第 1 种算法和第 4 种算法耗费时间最短,第 2 种算法和第 4 种算法迭代次数最少,这也间接地说明了各个优化算法的收敛速度不同;随着需求精度的增加,优化耗费时间及优化迭代次数逐渐增加,且在不同需求精度之间的耗费时间曲线及迭代次数曲线的变化趋势相同。从图 5c 中可以看出,需

表 2 所选区域节点坐标

Tab.2 Node coordinates of selected area			
节点序号	坐标		
	X	Y	Z
1	-0.55	1.15	1.04
2	0.45	1.16	1.04
3	0.75	1.75	0.45
4	0.33	2.16	0.03
5	0.35	2.14	0.06
6	-0.69	1.68	0.51
7	0.56	2.01	1.53
8	0.43	2.01	1.53
9	0.74	2.60	0.94
10	0.32	3.02	0.52
11	-0.38	3.02	0.52
12	-0.7	2.53	1.01
13	-0.58	2.60	2.31
14	0.41	2.59	2.28
15	0.72	3.19	1.71
16	0.31	3.61	1.31
17	-0.41	3.58	1.27
18	-0.73	3.09	1.81
19	0.12	1.68	0.51
20	0.11	2.53	1.01
21	0.09	3.12	1.79

表 3 所选区域单元连接方式

Tab.3 Connection types of selected area	
单元序号	连接方式
1	1-2-19-7-8-20
2	2-3-19-8-9-20
3	3-4-19-9-10-20
4	4-5-19-10-11-20
5	5-6-19-11-12-20
6	6-1-19-12-7-20
7	7-8-20-13-14-21
8	8-9-20-14-15-21
9	9-10-20-15-16-21
10	10-11-20-16-17-21
11	11-12-20-17-18-21
12	12-7-20-18-13-21

求精度越高,目标函数最优值越小,这是因为随着精度的提高,网格质量的最小值得到了提高,从而导致目标函数值变小,但是当需求精度达到 10^{-5} 时,继续增加需求精度,函数优化值已经几乎不发生变化;相同需求精度下,不同优化算法的目标函数最优值相差不大,综上结果,第 4 种求最优值的组合算法即共轭梯度法和二分法相结合的求最优值法优化效果最好,优化需求精度选取 10^{-5} 。

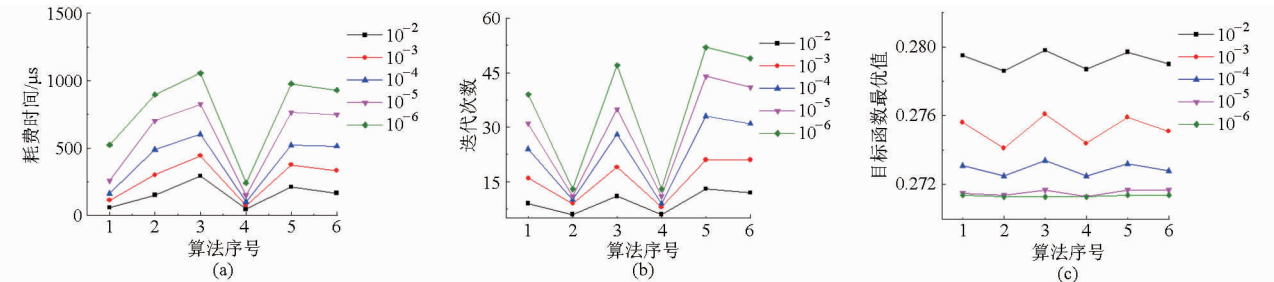


图 5 需求精度对优化效果的影响
Fig.5 Effects of demanding accuracy on optimization

2.3 权重系数的确定

为确定优化三棱柱网格的目标函数,需要对不同权重系数时目标函数的优化效果进行分析,采用第 4 种优化算法对不同 μ (μ 从 0.1 变化到 0.9) 情况下的目标函数进行求解,优化过程采用已有的衡量三棱柱网格准则即角度扭曲率来判断劣质单元,基于角度扭曲率的质量衡量准则定义为

$$\theta = 1 - \max \left(\frac{Q_{\max} - Q_e}{180 - Q_e}, \frac{Q_e - Q_{\min}}{Q_e} \right)$$

其中, $Q_{\max}$ 和 $Q_{\min}$ 表示单元中两条边夹角的最大值和最小值,对于三角形 Q_e 为 60° ,而对于四边形 Q_e 取 90° ; $0 < \theta < 1$,当 θ 为 1 时,表示网格单元为正三棱柱,当 θ 为 0 时,表示网格单元是劣质单元。

设置需求精度为 10^{-5} ,不同权重系数 μ 下网格优化所需的时间如图 6 所示,从图中可以看出,不同

权重的耗费时间变化并没有一定的规律,其中 μ 为 0.7 时耗时最短, μ 为 0.2 时次之。

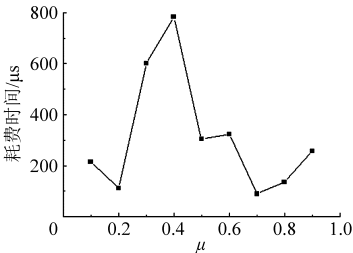


图 6 μ 对优化时间的影响
Fig.6 Effects of μ on optimization time

为更好地比较不同权重对网格优化效果的影响,设置需求精度为 10^{-5} ,比较不同权重下求解目标函数的最优值(目标函数最优值越小优化效果越好),如图 7 所示。从图中可以看出,当权重系数 μ 较大时,求解目标函数的最优值较大,而权重系数 μ 较小时,目标函数的最优值较小,且 μ 的取值为 0.2

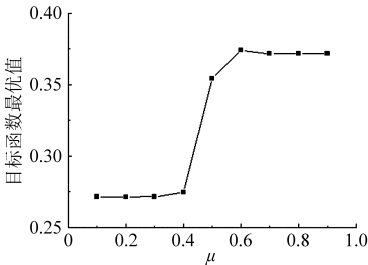


图 7 μ 对目标函数最优值的影响

Fig. 7 Effects of μ on optimal value of objective function

时目标函数最优值最小。

综上所述,综合考虑优化效果及优化效率,选取 0.2 作为权重系数 μ 的值。

3 算例验证

为验证本文优化算法的有效性,对离心泵模型

中的叶轮和蜗壳分别进行混合网格的划分和优化,模型叶轮和蜗壳如图 8 所示。表 4 为模型泵初始划分的网格数据,不同网格质量范围初始网格单元数的统计结果如图 9 所示。

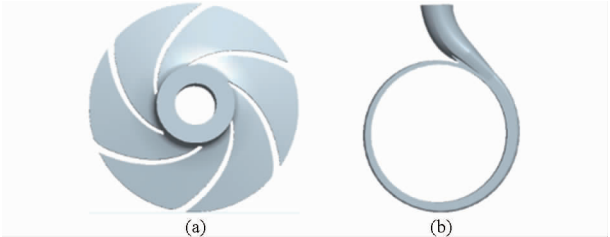


图 8 模型

Fig. 8 Model

(a) 叶轮 (b) 蜗壳

将本文算法与某商业软件中的优化算法进行对

比分析,表 5 为优化后的网格数据,从数据可以看

表 4 初始网格数据

Tab. 4 Initial grid data

模型	三棱柱		四面体		总体网格	
	单元数	最差网格质量	单元数	最差网格质量	单元数	最差网格质量
叶轮	113 532	0. 132 4	261 217	0. 122 1	374 749	0. 122 1
蜗壳	72 396	0. 104 7	256 037	0. 124 1	328 433	0. 104 7

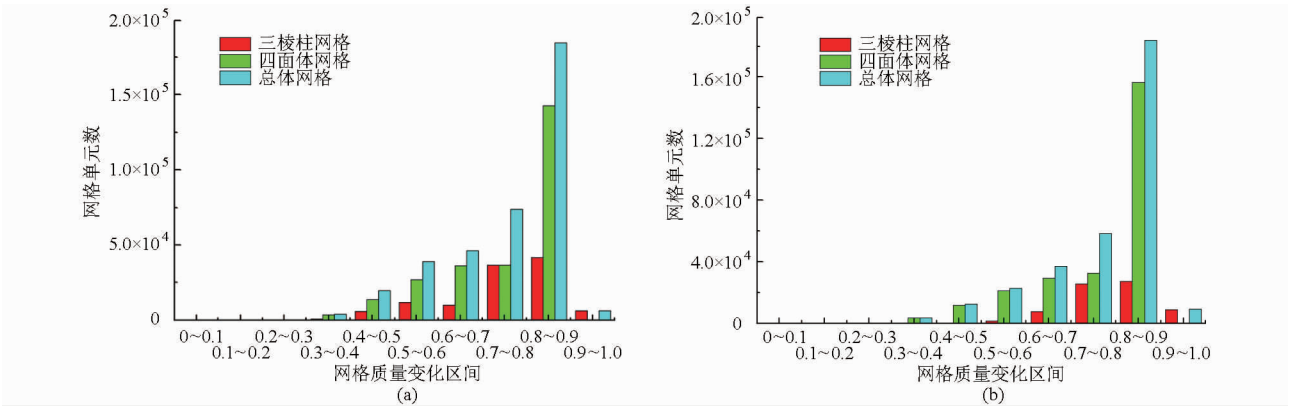


图 9 初始网格质量

Fig. 9 Initial grid quality

(a) 叶轮 (b) 蜗壳

表 5 优化后网格数据

Tab. 5 Grid data after optimization

优化算法	模型	三棱柱		四面体总体网格		单元数	最差单元质量
		单元数	最差单元质量	单元数	最差单元质量		
本文算法	叶轮	113 532	0. 311 4	261 226	0. 308 7	374 758	0. 308 7
	蜗壳	723 96	0. 303 9	256 045	0. 311 6	328 441	0. 303 9
某商业软件	叶轮	113 532	0. 167 8	261 221	0. 245 3	374 753	0. 167 8
	蜗壳	723 96	0. 115 2	256 044	0. 235 7	328 440	0. 115 2

出,优化后最差网格单元质量都有所提高,且本文算法的最差单元质量要高于该商业软件。图 8、图 9 分别为叶轮和蜗壳优化后的网格质量分布情况,由于网格质量在 0 ~ 0.2 之间的单元数较少,因此把

0 ~ 0.2 区间的网格进行分开单独处理。从图 10a 和图 11a 中可以看出,该商业软件和本文算法都能很好地提高整体网格的质量,相较而言,在网格质量较高的区间(如 0.8 ~ 0.9 区间),本文算法优化后

的网格单元数更多一些,而网格质量适中的区间(如 0.5~0.6 区间),本文算法优化后的网格单元数较该商业软件要少些。从图 10b 和图 11b 中可以看出,采用商业软件对混合网格优化时,难处理网格

质量介于 0.1~0.3 的三棱柱单元和四面体单元,而采用本文算法对网格进行优化时,能够较好地提高劣质三棱柱和四面体网格单元质量,即最差单元网格质量得到了提高,从而验证了本文算法的有效性。

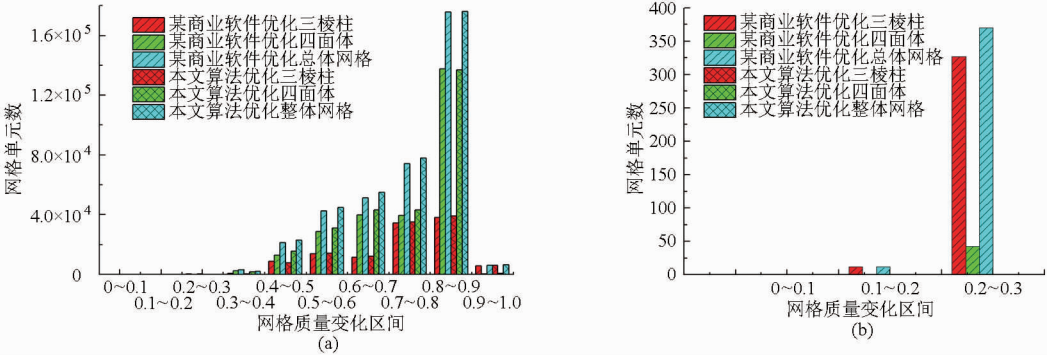


图 10 叶轮网格优化结果
Fig. 10 Optimization results of impeller grid
(a) 总体网格 (b) 局部网格

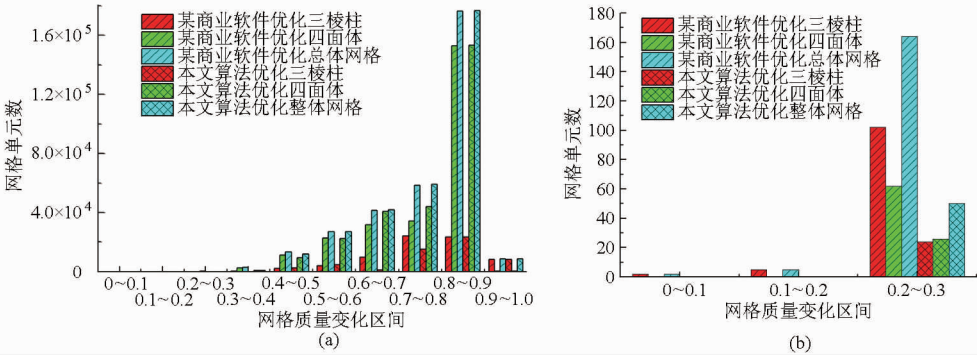


图 11 蜗壳网格优化结果
Fig. 11 Optimization results of volute grid
(a) 总体网格 (b) 局部网格

4 结论

- (1) 通过建立一种新的基于三棱柱网格的目标函数,并结合已有的基于四面体网格的目标函数,实现了三维混合网格的优化。
- (2) 对比分析 6 种组合的求解最优值算法,共轭梯度法和二分法相结合的求最优值算法优化效果以及优化效率最好;对比分析不同权重系数 μ 下网格优化结果,综合考虑网格优化效果和优化效率,选

- 取权重系数 μ 为 0.2。
- (3) 对比分析本文优化算法与某商业软件中的优化算法,最差网格单元质量和整体网格的质量均有所提高,且本文算法优化后得到的最差网格单元质量要高于该商业软件。
- (4) 采用某商业软件对混合网格优化时,很难处理网格质量介于 0.1~0.3 的单元,而采用本文算法能够较好地提高该区间的网格质量。

参 考 文 献

1 王昊利,王元,岳斌佑.非结构四面体网格生成方法及改进[J].西安建筑科技大学学报,2006,38(1):58-62.
Wang Haoli, Wang Yuan, Yue Binyou. The method and improvement of unstructured tetrahedral mesh generation[J]. Journal of Xi'an University of Architecture & Technology: Natural Science Edition, 2006, 38(1): 58-62. (in Chinese)

2 王晓宏,施安峰,郑晓磊,等.地下水源热泵地下水渗流场自适应网格法[J].排灌机械工程学报,2012,30(6):621-626.
Wang Xiaohong, Shi Anfeng, Zheng Xiaolei, et al. Adaptive mesh refinement technique for seepage flow field in groundwater source heat pump system[J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2012, 30(6): 621-626. (in Chinese)

3 刘厚林,董亮,王勇,等.流体机械 CFD 中的网格生成方法进展[J].流体机械,2010,38(4):32-37.
Liu Houlin, Dong Liang, Wang Yong, et al. Overview of mesh generation methods in CFD of fluid machinery[J]. Fluid Machinery, 2010, 38(4): 32-37. (in Chinese)

4 Ito Y, Nakahashi K. Improvements in the reliability and quality of unstructured hybrid mesh generation[J]. International Journal for

- Numerical Methods in Fluids, 2004, 45(1): 79 – 108.
- 5 Coirier W J, Jorgenson P C E. A mixed volume grid approach for the Euler and Navier-Stokes equations[C] // Proceedings of the 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 1996.
- 6 Luo H, Baum J D, Lohner R. High-Reynolds number viscous flow computations using an unstructured-grid method[J]. Journal of Aircraft, 2005, 42(2): 483 – 492.
- 7 Kallinderis Y, Ward S. Prismatic grid generation for three-dimensional complex geometries[J]. AIAA Journal, 1993, 31(10): 1850 – 1856.
- 8 Kallinderis Y, Khawaja A, McMorris H. Hybrid prismatic/tetrahedral grid generation for complex geometries [J]. AIAA Journal, 1996, 34(2): 291 – 298.
- 9 Khawaja A S. General semi-structured grid generation for complex 3-D geometries with disparate length scales [D]. Austin, TX: The University of Texas at Austin, 1998.
- 10 刘学强, 伍贻兆, 夏健. 用混合网格求解三维可压雷诺平均 Navier – Stokes 方程[J]. 计算力学学报, 2002, 19(3): 265 – 269. Liu Xueqiang, Wu Yizhao, Xia Jian. Solution of the 3D turbulence Navier – Stokes equations using hybrid grids[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(3): 265 – 269. (in Chinese)
- 11 陈坚强, Mack A. 用混合网格模拟绕 X – 38 粘性流动[J]. 空气动力学学报, 2002, 20(1): 96 – 101. Chen Jianqiang, Mack A. Hypersonic viscous flow computation over X – 38 with hybrid meshes[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2002, 20(1): 96 – 101. (in Chinese)
- 12 Pébay P, Baker T. Analysis of triangle quality measures [J]. Mathematics of Computation, 2003, 72(244): 1817 – 1839.
- 13 Borouchaki H, George, Paul Louis. Parametric surface meshing. Part I: theoretical aspects [J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series I Mathematics, 1997, 324(7): 833 – 837.
- 14 Hestenes M R, Stiefel E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems[J]. Journal of Research of the National Bureau Standards, 1952, 49: 409 – 436.
- 15 裴雪重, 唐韶华, 夏一天. 黄金分割律在中医学理论中有重要表现[J]. 中国中医基础医学杂志, 1996, 2(4): 13 – 14.
- 16 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- 17 王海涛, 朱洪. 改进的二分法查找[J]. 计算机工程, 2006, 32(10): 61 – 63. Wang Haitao, Zhu Hong. Modified binary search[J]. Computer Engineering, 2006, 32(10): 61 – 63. (in Chinese)
- 18 李晓俊, 袁寿其, 潘中永, 等. 基于结构化网格的离心泵全流场数值模拟[J]. 农业机械学报, 2013, 44(7): 50 – 54, 49. Li Xiaojun, Yuan Shouqi, Pan Zhongyong, et al. Numerical simulation of whole flow field for centrifugal pump with structured grid [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(7): 50 – 54, 49. (in Chinese)
- ~~~~~

(上接第 48 页)

- 7 李志峰, 吴大转, 王乐勤, 等. 离心泵启动过程瞬态特性的试验[J]. 排灌机械工程学报, 2010, 28(5): 390 – 393. Li Zhifeng, Wu Dazhuan, Wang Leqin, et al. Experiment on instantaneous characteristics in centrifugal-pump during startup period[J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2010, 28(5): 390 – 393. (in Chinese)
- 8 许斌杰, 李志峰, 吴大转, 等. 离心泵启动过程瞬态特性的研究[J]. 中国科技论文在线, 2009, 4(9): 645 – 647. Xu Binjie, Li Zhifeng, Wu Dazhuan, et al. Numerical simulation for transient turbulence flow of centrifugal pump during starting period[J]. Sciencepaper Online, 2009, 4(9): 645 – 647. (in Chinese)
- 9 阎超, 于剑, 徐晶磊, 等. CFD 模拟方法的发展成就与展望[J]. 力学发展, 2011, 41(5): 562 – 589. Yan Chao, Yu Jian, Xu Jinglei, et al. On the achievements and prospects for the methods of computational fluid dynamics[J]. Advances in Mechanics, 2011, 41(5): 562 – 589. (in Chinese)
- 10 任芸, 刘厚林, 舒敏骅, 等. 考虑旋转和曲率影响的 SST $k - \omega$ 湍流模型改进[J]. 农业机械学报, 2012, 43(11): 120 – 124. Ren Yun, Liu Houlin, Shu Minhua, et al. Improvement of SST $k - \omega$ turbulence model and numerical simulation in centrifugal pump[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(11): 120 – 124. (in Chinese)
- 11 Majidi K. Numerical study of unsteady flow in a centrifugal pump[J]. ASME Journal of Turbo Machinery, 2005, 127(2): 363 – 371.
- 12 张玉良, 朱祖超, 林慧超, 等. 关死点处离心泵启动过程的数值模拟[J]. 力学季刊, 2012, 33(3): 437 – 440. Zhang Yuliang, Zhu Zuchao, Lin Huichao, et al. Numerical simulation of unsteady flow in centrifugal pump during startup period at shut-off condition[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2012, 33(3): 437 – 440. (in Chinese)
- 13 Jose G, Jesus M, Fernandez O, et al. Unsteady flow patterns for a double suction centrifugal pump[J]. ASME Journal of Fluid Engineering, 2009, 131(7): 749 – 757.
- 14 丛国辉, 王福军. 双吸离心泵隔舌区压力脉动特性分析[J]. 农业机械学报, 2008, 39(6): 61 – 63. Cong Guohui, Wang Fujun. Numerical investigation of unsteady pressure fluctuations near volute tongue in a double-suction centrifugal pump[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(6): 61 – 63. (in Chinese)
- 15 Barrio R, Parrondo J, Blanco E. Numerical analysis of the unsteady flow in the near-tongue region in a volute-type centrifugal pump for different operating points[J]. Computers and Fluids, 2010, 39(5): 859 – 870.