

基于微分模型的空间圆弧与椭圆弧插补研究*

刘 焕^{1,2} 刘 强^{1,2} 周胜凯^{1,2} 李传军^{1,2} 袁松梅^{1,2}

(1. 北京航空航天大学机械工程及自动化学院, 北京 100191;

2. 北京市高效绿色数控加工工艺及装备工程技术研究中心, 北京 100191)

摘要: 针对目前圆弧插补与椭圆弧插补在适用范围、计算效率与精度方面的问题,通过引入微分模型表达空间圆弧与椭圆弧,提出了基于微分模型的空间圆弧与椭圆弧插补方法,能实现空间任意圆弧与椭圆弧的插补。在空间圆弧插补中能实现零径向误差与零速度波动。在空间椭圆弧插补中能实现零径向误差与较低的速度波动。同时,该方法插补过程统一了圆弧和椭圆弧的正逆插补,无需象限判断,因此插补流程简单高效。另外,该方法采用的插补点递推公式能转换为一系列简单的四则运算,因此插补计算效率高。仿真对比分析表明了该方法相对于目前的方法具有很大的优越性。最后,在自主开发的数控平台上实现了该方法并完成了试件的加工。

关键词: 数控系统 微分模型 圆弧插补 椭圆弧插补

中图分类号: TP272; TG659 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2015)08-0338-06

Spatial Circular Arc and Elliptic Arc Interpolation Based on Differential Model

Liu Huan^{1,2} Liu Qiang^{1,2} Zhou Shengkai^{1,2} Li Chuanjun^{1,2} Yuan Songmei^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Beihang University, Beijing 100191, China

2. Beijing Engineering Technological Research Center of High-efficient & Green CNC Machining Process and Equipment, Beijing 100191, China)

Abstract: To improve the application range, computational efficiency and accuracy of current circular arc and elliptic arc interpolation, the differential model was introduced to represent the spatial circular arc and elliptic arc, and the corresponding interpolation methods were proposed with the ability of interpolating arbitrary spatial circular arcs and elliptic arcs. In spatial circular arc interpolation, zero radial error and zero feedrate fluctuation can be achieved. In spatial elliptic arc interpolation, zero radial error and relative low feedrate fluctuation can be achieved. Meanwhile, the method unified the clockwise and anticlockwise interpolation of circular arc and elliptic arc interpolation with no quadrant judgment process, thus the algorithm flows were very simple and efficient. The recursion formulas for generating sampling points in the proposed methods can be deformed to a series of simple arithmetics, thus high computational efficiency can be obtained. The simulation and comparison analysis demonstrated the proposed methods were superior to other methods. Finally, the methods were implemented on a self-developed open CNC platform, which were successfully applied to workpiece machining. The feasibility and applicability of the proposed methods were verified by simulation and experimental results.

Key words: Computer numerical control system Differential model Circular arc interpolation Elliptic arc interpolation

收稿日期: 2014-10-19 修回日期: 2014-12-09

* 国家自然科学基金资助项目(11290144)

作者简介: 刘焕, 博士生, 主要从事数控技术研究, E-mail: liuhuanbuaa@126.com

通讯作者: 刘强, 教授, 博士生导师, 主要从事数控加工仿真优化与虚拟加工和数控技术研究, E-mail: qliusmea@buaa.edu.cn

引言

在复杂自由曲线曲面的数控加工中,一般使用连续微线(弧)段去逼近原曲线曲面,由CAD/CAM软件通过后处理生成加工文件,然后通过外部存储介质向数控系统传输数据,由直线(圆弧)插补器完成刀轨指令的生成实现加工控制。这种方法会产生几个问题^[1]:①使用微段离散曲线造成路径的一阶导数不连续,降低了加工表面的光滑性。②当要求高的逼近精度时,会生成大量的数控程序,降低插补效率。解决问题有两个途径:二次曲线逼近和参数曲线直接插补。

目前有很多研究工作在参数曲线直接插补方面做出了贡献^[2-17],但依然没有解决参数曲线直接插补中精度与效率的矛盾,难以满足实时应用,并且可能需要额外的硬件资源,不适合经济型机床应用。已有研究工作表明了二次曲线逼近加工方式的优越性^[18-19],不仅能提高逼近精度与轨迹光滑性,并且能大幅降低代码数量。在二次曲线逼近加工方式中,高性能的圆弧与椭圆弧插补是必不可少的技术。Hu^[20]提出了基于圆心角分割的圆弧和椭圆弧插补方法,在当时具有较高的计算效率与插补精度。但是该方法在计算插补点时为了提高计算效率使用了三角函数的近似计算,导致插补点偏离原轨迹,造成了较大的轮廓误差,同时该方法未考虑空间圆弧与椭圆弧的插补。随着数控系统计算能力的提高,在插补方法中采用直接三角函数和反三角函数计算,可以有效减小径向误差与速度波动,但是复杂的函数计算导致系统实时性变差,从而必须加大插补周期,因此限制了加工速度的提高。

针对以上这些问题,本文提出一种基于微分模型的空间圆弧与椭圆弧插补方法,使用一阶微分系统描述空间圆弧与椭圆弧,给出插补点的递推计算公式,并通过仿真与加工实验验证方法的有效性与可行性。

1 空间圆弧的微分表达及插补

1.1 空间圆弧的微分模型建立

定义空间圆弧所在平面的单位法矢为 $N = (n_x, n_y, n_z)^T$,圆弧的圆心为 C ,圆上任意一点为 $X(\theta)$,则该点处切矢可表示为

$$X'(\theta) = N \times (X(\theta) - C) = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} (X(\theta) - C) \quad (1)$$

其中符号“ \times ”为向量的向量积计算, θ 为圆心角。式(1)即为空间圆弧的微分表达,令系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

1.2 空间圆弧插补算法

图1所示为空间圆弧插补原理图,点 X_i 与 X_{i+1} 为相邻的2个插补点, X'_i 与 X'_{i+1} 为对应的切矢, θ_i 与 θ_{i+1} 为对应的圆心角参数,且 $\Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$ 。由式(1)有

$$\begin{cases} X'_i = N \times (X_i - C) \\ X'_{i+1} = N \times (X_{i+1} - C) \end{cases} \quad (3)$$

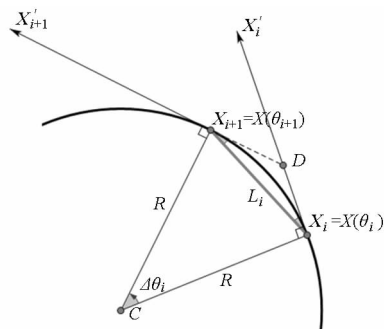


图1 空间圆弧插补

Fig. 1 Spatial circular arc interpolation

联立式(1)与式(3)可得

$$(X_{i+1} - X_i) \times (X'_{i+1} + X'_i) = ((X_{i+1} - C) - (X_i - C)) \times (N \times ((X_{i+1} - C) + (X_i - C))) \quad (4)$$

联立拉格朗日公式 $a \times b \times c = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle$ 与式(4),可得

$$(X_{i+1} - X_i) \times (X'_{i+1} + X'_i) = N (\|X_{i+1} - C\| - \|X_i - C\|) - (X_{i+1} + X_i) (\langle N, X_{i+1} - C \rangle - \langle N, X_i - C \rangle) \quad (5)$$

因为 $N \perp (X_{i+1} - C)$, $N \perp (X_i - C)$ 且 $\|X_{i+1} - C\| = \|X_i - C\| = R$, 则

$$(X_{i+1} - X_i) \times (X'_{i+1} + X'_i) = O \quad (6)$$

其中, O 为零向量,符号“ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ”为向量的数量积计算, R 为圆弧半径。根据式(6),可以得到在圆上有几何关系

$$(X_{i+1} - X_i) \parallel (X'_{i+1} + X'_i) \quad (7)$$

根据式(1)与式(7)可以得到插补点递推式

$$X_{i+1} = (E - hA)^{-1} (E + hA) (X_i - C) + C \quad (8)$$

其中 $h = \frac{\|X_{i+1} - X_i\|}{\|X'_{i+1} + X'_i\|}$ (9)

式中 E ——三阶单位矩阵

h ——插补参数增量

在图1的圆弧中, $\Delta X_i D X_{i+1}$ 为等边三角形,

$$\begin{aligned} \| \mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i \| & \text{ 等于插补步长 } L_i。 \text{ 由式(1)可知} \\ \| \mathbf{X}'(\theta) \| & = \| \mathbf{N} \times (\mathbf{X}(\theta) - \mathbf{C}) \| = \\ & \| \mathbf{X}(\theta) - \mathbf{C} \| = R \end{aligned} \quad (10)$$

因此

$$\| \mathbf{X}'_{i+1} + \mathbf{X}'_i \| = 2R \cos \frac{\Delta\theta_i}{2} = 2R \sqrt{1 - \frac{L_i^2}{4R^2}} \quad (11)$$

联立式(9)与式(11)可得插补点递推参数为

$$h = \frac{L_i}{2R \sqrt{1 - \frac{L_i^2}{4R^2}}} \quad (12)$$

2 空间椭圆弧的微分表达及插补

2.1 空间椭圆弧的微分模型建立

定义空间椭圆弧的长轴长为 a , 长轴方向单位向量为 \mathbf{U} , 短轴长为 b , 短轴方向单位向量为 \mathbf{V} , 椭圆弧的中心为 \mathbf{C} , 椭圆上圆心角参数 θ 处的点 $\mathbf{X}(\theta)$ 为

$$\mathbf{X}(\theta) = a\mathbf{U}\cos\theta + b\mathbf{V}\sin\theta + \mathbf{C} \quad (13)$$

其中 \mathbf{U} 与 \mathbf{V} 均为三维向量。对式(13)进行对圆心角参数 θ 的求导为

$$\mathbf{X}'(\theta) = -a\mathbf{U}\sin\theta + b\mathbf{V}\cos\theta \quad (14)$$

联立式(13)与式(14)得空间椭圆弧的微分表达式为

$$\mathbf{X}'(\theta) = \left(-\frac{a}{b}\mathbf{U}\mathbf{V}^T + \frac{b}{a}\mathbf{V}\mathbf{U}^T \right) (\mathbf{X}(\theta) - \mathbf{C}) \quad (15)$$

令系数矩阵为

$$\mathbf{A} = -\frac{a}{b}\mathbf{U}\mathbf{V}^T + \frac{b}{a}\mathbf{V}\mathbf{U}^T \quad (16)$$

2.2 空间椭圆弧插补算法

图2所示为空间椭圆弧插补原理, 点 \mathbf{X}_i 与 \mathbf{X}_{i+1} 为相邻的2个插补点, \mathbf{X}'_i 与 \mathbf{X}'_{i+1} 为对应的切矢, θ_i 与 θ_{i+1} 为对应的圆心角参数, 且 $\Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$ 。由式(14)有

$$\begin{cases} \mathbf{X}'_i = -a\mathbf{U}\sin\theta_i + b\mathbf{V}\cos\theta_i \\ \mathbf{X}'_{i+1} = -a\mathbf{U}\sin\theta_{i+1} + b\mathbf{V}\cos\theta_{i+1} \end{cases} \quad (17)$$

则联立式(13)与式(17)可得

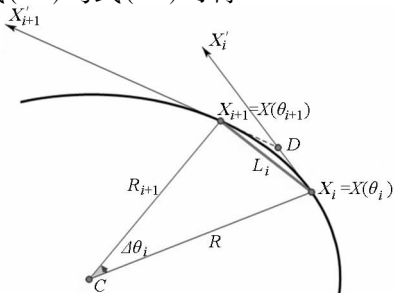


图2 空间椭圆弧插补

Fig.2 Spatial elliptic arc interpolation

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i) \times (\mathbf{X}'_{i+1} + \mathbf{X}'_i) & = \\ ab [(\cos^2\theta_{i+1} + \sin^2\theta_{i+1}) - \\ & (\cos^2\theta_i + \sin^2\theta_i)] (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \mathbf{O} \end{aligned} \quad (18)$$

因此在椭圆弧中, 几何关系式(7)也成立, 同样使用式(8)作为空间椭圆弧插补点递推式, 关键是递推参数的计算。在图2中, $\| \mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i \|$ 等于插补步长 L_i , 将 $\Delta\mathbf{X}_i D\mathbf{X}_{i+1}$ 近似看作为等边三角形, 则有

$$\begin{aligned} \| \mathbf{X}'_{i+1} + \mathbf{X}'_i \| & \approx 2 \| \mathbf{X}'_i \| \cos \frac{\Delta\theta_i}{2} \approx \\ 2 \| \mathbf{X}'_i \| & \sqrt{1 - \frac{L_i^2}{4 \| \mathbf{X}_i - \mathbf{C} \|^2}} \end{aligned} \quad (19)$$

由式(14)可知

$$\begin{aligned} \| \mathbf{X}'(\theta) \| & = \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} = \\ \sqrt{\frac{b^2}{a^2} \langle \mathbf{X}(\theta) - \mathbf{C}, \mathbf{U} \rangle^2 + \frac{a^2}{b^2} \langle \mathbf{X}(\theta) - \mathbf{C}, \mathbf{V} \rangle^2} \end{aligned} \quad (20)$$

联立式(9)、(19)、(20)可得插补点递推参数的近似值为

$$h = \frac{L_i}{2R_1 \sqrt{1 - \frac{L_i^2}{4R_2^2}}} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} R_1 = \| \mathbf{X}'_i \| & = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} \langle \mathbf{X}_i - \mathbf{C}, \mathbf{U} \rangle^2 + \frac{a^2}{b^2} \langle \mathbf{X}_i - \mathbf{C}, \mathbf{V} \rangle^2} \\ R_2 = \| \mathbf{X}_i - \mathbf{C} \| & \end{aligned}$$

3 仿真分析

3.1 插补指令及对比

根据以上研究的空间圆弧插补与椭圆弧插补, 开发了对应的插补器, 并定义插补指令格式为:

空间圆弧插补: G02.1 $X_Y_Z_I_J_K_NX_NY_NZ_F_$ 。其中 X, Y, Z 为终点绝对值坐标; I, J, K 为圆心相对坐标; (NX, NY, NZ) 为圆平面法矢, 单位化后即式(1)中的矢量 \mathbf{N} ; F 为进给速度; 规定绕矢量 (NX, NY, NZ) 逆时针插补。

空间椭圆弧插补: G03.1 $X_Y_Z_I_J_K_AL_BL_UX_UY_UZ_VX_VY_VZ_F_$ 。其中 X, Y, Z 为终点绝对值坐标; I, J, K 为椭圆中心相对坐标; AL, BL 为椭圆长短轴长, 即式(13)中的 a, b ; (UX, UY, UZ) 为椭圆长轴方向矢量, 单位化后即式(13)中的 \mathbf{U} ; (VX, VY, VZ) 为椭圆短轴单位方向矢量, 单位化后即式(13)中的 \mathbf{V} ; F 为进给速度; 规定绕矢量 $(UX, UY, UZ) \times (VX, VY, VZ)$ 逆时针插补。

表1对传统插补方式与本文提出的插补方式进行了对比。传统插补中规定了圆弧的正逆插补代码

格式,不包括椭圆弧插补。在传统的圆弧插补中,正逆插补分别采用 G02 与 G03 指令,通过 G17/18/19 代码指定插补平面,只能实现平面圆弧的插补,而且在插补过程中需要时刻进行象限判断,流程复杂。而本文提出的空间圆弧与椭圆弧插补中,使用一个

指令统一了正逆插补,通过矢量确定圆弧和椭圆弧的空间位置,实现空间任意的圆弧和椭圆弧插补,并且在插补计算过程中,无需进行象限判断,因此流程简单。

表 1 不同插补方式对比

Tab.1 Comparison between different interpolation methods

插补方法	代码类型	正逆插补	插补范围	象限判断	插补流程
传统圆弧插补	G02/G03	分离	XY/XZ/YZ 平面圆弧插补	需要	复杂
本文空间圆弧插补	G02.1	统一	空间任意圆弧插补	不需要	简单
本文空间椭圆弧插补	G03.1	统一	空间任意椭圆弧插补	不需要	简单

3.2 平面圆弧与椭圆弧插补对比

以文献[15]中的方法为对比,分析本文提出的插补方法在圆弧插补与椭圆弧插补中的优越性。以一个圆心在坐标原点、半径为 10 mm 的整圆以及一个中心在坐标原点、长短轴与 X、Y 轴平行、长短轴长分别为 10、5 mm 的整椭圆为仿真对象,分析 2 种方法下的径向误差、速度波动与插补效果。仿真过程采用进给速度 100 mm/s 下的恒速插补,插补周期为 1 ms。

图 3 是仿真结果,表 2 是数据分析结果。图 3a 是 Hu 的圆弧插补方法的插补结果,可以看出,所生产的插补轨迹偏离原曲线,在终点处产生的径向误差最大,为 0.32 mm,这样的误差是不可忽视的,对于目前的加工来说也是不可接受的。图 3c 是本文提出的圆弧插补方法的插补结果,可以看出,插补轨迹与原曲线重合,在任何插补点处的径向误差为零。

图 3b 是 Hu 的椭圆弧插补方法的插补结果,与圆弧插补结果一样,插补轨迹偏离原曲线,在终点处产生的最大径向误差为 0.43 mm。图 3d 是本文提出的椭圆弧插补方法的插补结果,可以看出,插补轨迹同样与原曲线重合,在任何插补点处的径向误差为零。

从插补过程中的速度波动对比看,本文的圆弧插补方法产生的速度波动为零,而 Hu 的圆弧插补方法产生的速度波动最大值为 3.2%,这也是一个较差的结果。本文的椭圆弧插补产生的最大速度波动为 0.6%,Hu 的椭圆弧插补产生的速度波动为零。以上分析可知,在圆弧插补方面,本文的圆弧插补方法既能保持零径向插补,又能保持零速度波动,优越性突出。在椭圆弧插补方面,本文的椭圆弧插补方法为了保证零径向误差而牺牲了速度精度,但总体来说还是优于 Hu 的方法。

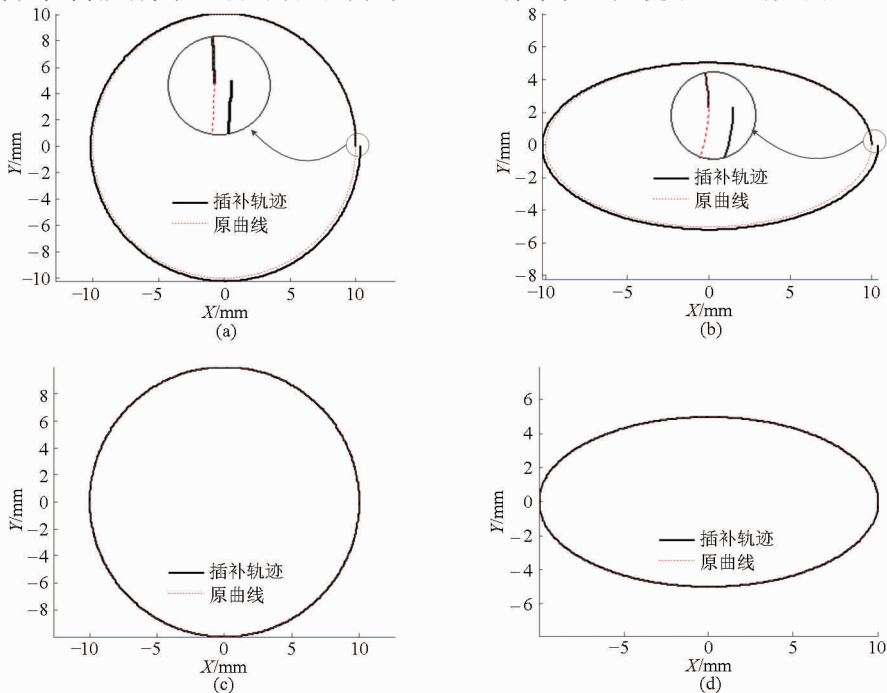


图 3 仿真结果

Fig.3 Simulation results

(a) Hu 的圆弧插补方法 (b) Hu 的椭圆弧插补方法 (c) 本文的圆弧插补方法 (d) 本文的椭圆弧插补方法

表2 仿真结果分析

Tab. 2 Analysis of simulation results

插补方法	最大径向误差/mm	最大速度波动/%
Hu 的圆弧插补	0.32	3.2
本文的圆弧插补	0	0
Hu 的椭圆弧插补	0.43	0
本文的椭圆弧插补	0	0.6

不可忽视的对比是,本文的圆弧和椭圆弧方法可以完成空间任意圆弧和椭圆弧的插补,而 Hu 的方法只是针对平面圆弧和椭圆弧,具有较大的局限性。另外,随着数控系统计算能力的提高,在圆弧插补和椭圆弧插补方法中可以采用直接三角函数和反三角函数计算,可以有效减小图 3a、3b 中较大的径向误差以及表 2 中的速度波动,但是复杂的函数计算导致实时性变差,从而必须加大插补周期,因此限制了加工速度的提高。而本文提出的算法中,式(8)可以简单的转换为一系列基本的四则运算,没有复杂的函数计算,而且径向误差为零,产生的速度波动也比较理想,因此即使相比于目前数控系统中使用的圆弧和椭圆弧插补算法,本文所提方法也

有很大的优越性。

3.3 空间圆弧与椭圆弧插补验证

以空间圆弧:圆心(0,0,0),起点(30,40,0),终点(30,40,0),圆弧平面法矢(4,-3,5),与空间椭圆弧:中心(0,0,0),起点(24,32,0),终点(24,32,0),长轴长40,短轴长20,长轴方向向量(3,4,0),短轴方向向量(-4,3,5)作为插补对象来验证本文算法的空间圆弧与椭圆弧插补能力,插补结果如图4所示。根据图4的直观感受与前述的理论推导,本文所提算法具有插补空间任意圆弧与椭圆弧的能力。

4 实验验证

为了验证本文提出的空间圆弧与椭圆弧插补方法的有效性与可行性,作者课题组开发了基于 TwinCAT 的开放式三轴数控铣削平台。分别以平面圆弧与椭圆弧以及空间圆弧与椭圆弧为加工对象,其中平面圆弧与椭圆弧在 XY 平面上加工,空间圆弧与椭圆弧在一个倾斜的平面上加工,实际加工的机床以及结果如图5所示。

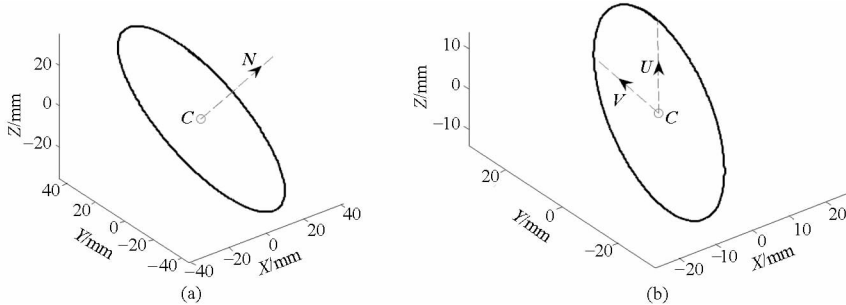


图4 空间圆弧与椭圆弧插补结果

Fig. 4 Interpolation results of spatial circular arc and elliptic arc

(a) 空间圆弧插补 (b) 空间椭圆弧插补

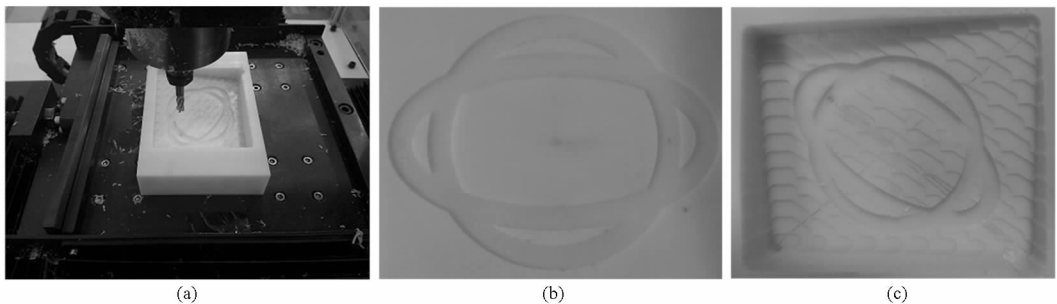


图5 实验验证结果

Fig. 5 Experimental verification results

(a) 加工机床 (b) 平面圆弧与椭圆弧加工结果 (c) 空间圆弧和椭圆弧加工结果

图5表明,本文提出的空间圆弧与椭圆弧插补算法成功应用于课题组开发的数控平台,并成功完成了平面上的圆弧与椭圆弧以及某一空间平面上的圆弧与椭圆弧加工,因此本文提出的基于微分模型的空间圆弧与椭圆弧插补算法有效且可行的。

5 结论

(1) 提出了基于微分模型的空间圆弧和椭圆弧插补方法,可以实现空间任意圆弧和椭圆弧的插补,并且统一了圆弧和椭圆弧插补过程中的正逆插补,

无需象限判断,简化了插补流程。

(2) 提出的空间圆弧插补算法能实现零径向误差与零速度波动,提出的空间椭圆弧插补算法能实现零径向误差与较低的速度波动,并且计算简单高

效。

(3) 开发了空间圆弧与椭圆弧插补对应的插补指令,在自主开发的数控平台上实现,并且成功完成了对应的加工实验。

参 考 文 献

- 1 Koren Y, Lo C, Shpitalni M. CNC interpolators: algorithms and analysis [J]. ASME PED-Vol 64, Manufacturing Science and Engineering, 1993, 64: 83 - 92.
- 2 Lo C. Feedback interpolators for CNC machine tools [J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 1997, 119(4A): 587 - 592.
- 3 Erkorkmaz K, Altintas Y. Quintic spline interpolation with minimal feed fluctuation [J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2005, 127(2): 339 - 349.
- 4 Zhao H, Zhu L, Ding H. A parametric interpolator with minimal feed fluctuation for CNC machine tools using arc-length compensation and feedback correction [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2013, 75: 1 - 8.
- 5 Wu J, Zhou H, Tang X, et al. Fast NURBS interpolation based on the biarc guide curve [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2012, 58(5 - 8): 597 - 605.
- 6 Lee A, Lin M, Pan Y, et al. The feedrate scheduling of NURBS interpolator for CNC machine tools [J]. Computer-Aided Design, 2011, 43(6): 612 - 628.
- 7 Lei W, Sung M, Lin L, et al. Fast real-time NURBS path interpolation for CNC machine tools [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2007, 47(10): 1530 - 1541.
- 8 Lin M, Tsai M, Yau H. Development of a dynamics-based NURBS interpolator with real-time look-ahead algorithm [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2007, 47(15): 2246 - 2262.
- 9 董伯麟, 王治森, 韩江. 高速高精度加工中 NURBS 曲线混合插补算法 [J]. 农业机械学报, 2008, 39(6): 174 - 178.
Dong Bolin, Wang Zhisen, Han Jiang. NURBS curve hybrid interpolator in high speed and high accuracy machining [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(6): 174 - 178. (in Chinese)
- 10 Sun Y, Zhao Y, Bao Y, et al. A novel adaptive-feedrate interpolation method for NURBS tool path with drive constraints [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2014, 77: 74 - 81.
- 11 Sun Y, Zhao Y, Xu J, et al. The feedrate scheduling of parametric interpolator with geometry, process and drive constraints for multi-axis CNC machine tools [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2014, 85: 49 - 57.
- 12 Zhao H, Zhu L, Xiong Z, et al. Development of FPGA based NURBS interpolator and motion controller with multiprocessor technique [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2013, 26(5): 940 - 947.
- 13 Liu H, Liu Q, Zhou S, et al. A NURBS interpolation method with minimal feedrate fluctuation for CNC machine tools [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2015, 78(5 - 8): 1241 - 1250.
- 14 Beudaert X, Lavernhe S, Tournier C. Feedrate interpolation with axis jerk constraints on 5-axis NURBS and G1 tool path [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2012, 57: 73 - 82.
- 15 Yuen A, Zhang K, Altintas Y. Smooth trajectory generation for five-axis machine tools [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2013, 71: 11 - 19.
- 16 Liang S, Zhao W, Xi X. Design of a real-time NURBS interpolator with constant segment length for milling EDM [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2013, 67(1 - 4): 427 - 440.
- 17 Li J, Zhang T, Li Z. An adaptive off-line NURBS interpolator for CNC machining [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2012, 63(5 - 8): 719 - 729.
- 18 Qiu H, Cheng K, Li Y. Optimal circular arc interpolation for NC tool path generation in curve contour manufacturing [J]. Computer-Aided Design, 1997, 29(11): 751 - 760.
- 19 Yang X. Efficient circular arc interpolation based on active tolerance control [J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(13): 1037 - 1046.
- 20 Hu W. Interpolation algorithm based on central angle division [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2002, 42(4): 473 - 478.