

# 矢量推进解耦球面并联机构动力学研究\*

张荣敏 陈原 高军

(山东大学(威海)机电与信息工程学院,威海 264209)

**摘要:**为实现水下机器人的矢量推进,提出了一种2自由度解耦球面并联机构。基于螺旋理论计算了机构的自由度,分析了机构的运动学,获取了机构的运动学正逆解。利用一阶运动影响系数法推导出了机构的雅可比矩阵,并在旋量形式的牛顿-欧拉方程基础上,运用船舶水动力学的螺旋桨推进理论,建立了机构的动力学方程,并给出了相应的数值算例。

**关键词:** 矢量推进 球面并联机构 螺旋理论 运动影响系数

**中图分类号:** TH113 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2015)06-0319-08

## Dynamic Analysis of Decoupled Spherical Parallel Mechanism for Vectored Thruster

Zhang Rongmin Chen Yuan Gao Jun

(School of Mechanical, Electrical & Information Engineering, Shandong University, Weihai 264209, China)

**Abstract:** The thrust vectoring technology is becoming a research hotspot for underwater vehicle. Combination of spherical parallel mechanism with propeller makes an approach to the above technology. A new type of decoupled 2-DOF spherical parallel mechanism was proposed for vectored thruster of underwater vehicle. Based on the screw theory, the degree of freedom was calculated, and the direct and inverse kinematics solutions were obtained by using analytic geometry. The first-order kinematic influence coefficient was employed to deduce the Jacobian matrix. The detailed dynamic model was got by the Newton-Euler equation and hydrodynamic of ship propulsors. Corresponding numerical examples were finally given to verify the effectiveness of all above methods. The proposed spherical parallel mechanism is simple in construction, convenient to control and has good decoupling performance. In conclusion, it shows superiority for vectored thruster in engineering application.

**Key words:** Thrust vectoring Spherical parallel mechanism Screw theory Kinematic influence coefficient

### 引言

水下机器人在航行过程中,需要进行不同方向的导向操纵运动,比如俯仰、偏航和横滚等。绝大多数的水下机器人通过安装多个螺旋桨推进器来进行多维导向操纵,这样会增加机器人的航行阻力,降低

水下定位能力<sup>[1]</sup>。螺旋桨矢量推进器除了能提供前进推进力外,还能根据机器人导向操纵任务需求产生其他多维方向上的推进力,大大提高了水下机器人的灵活性和敏捷性<sup>[2]</sup>。然而,目前的矢量推进并联机构仅局限于 Stewart 6 自由度并联机构,其工作空间小、结构和控制较复杂,很难应用于工程实

收稿日期:2015-03-13 修回日期:2015-04-10

\*国家自然科学基金资助项目(51375264)、山东省优秀中青年奖励基金资助项目(BS2013ZZ008)、中国博士后特别资助项目(2014T70632)和中国博士后面资助项目(2013M530318)

作者简介:张荣敏,博士生,主要从事并联机器人技术研究,E-mail:zhangrongmin@mail.sdu.edu.cn

通讯作者:高军,教授,博士生导师,主要从事流体机械动力学和塑性成形研究,E-mail:shdgc@sdu.edu.cn

际。而基于少自由度并联机构的矢量推进机构具有结构简单、控制方便的特点,为矢量推进方式提供了新的设计理念。

球面并联机构作为一种少自由度并联机构,已经广泛应用于医疗设备、航空航天以及工业机器人的定位及转向装置<sup>[3-7]</sup>。球面并联机构能够灵活的实现空间多维转动,将其应用于水下机器人的矢量推进机构具有极大的可行性。现阶段对球面并联机构的研究主要包括构型综合、运动学和动力学等<sup>[8-10]</sup>。文献[11-19]中球面并联机构存在结构复杂、难以加工,或者解耦性差、难以控制的缺点,所以很难应用于工程实际中。另外,在这些球面并联机构的动力学建模中,很少考虑实际应用中的外部载荷变化情况,也就很难与实际工程结合。本文根据水下机器人矢量推进的运动特性,提出一种结构简单、解耦性好的2自由度球面并联机构。利用螺旋理论分析机构的运动学正逆解,基于旋量形式的牛顿-欧拉方程建立机构的动力学模型,并给出相应的数值算例。

## 1 2自由度球面并联机构的构型分析

### 1.1 结构与坐标系变换

提出的用于矢量推进的球面2自由度并联机构如图1所示,该机构为2-RP<sub>c</sub>&2-RP<sub>c</sub>RU型并联机构,包含4条分支运动链,其中分支1(RP<sub>c</sub>)和分支2(RP<sub>c</sub>RU)为驱动分支,分支3和4分别为与分支1、2对称的过约束被动分支。4个分支依次间隔90°布置于同一球面。每个分支均包含一个弧形伸缩杆形式的移动副P,其运动实际上为绕圆弧中心的一维转动位移子群,其实质为转动副Re。图中虚线部分为螺旋桨推进器,其主轴并不为球面机构提供驱动力和力矩,但会作为球面机构的外部负载。

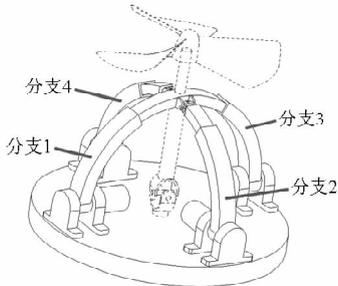


图1 矢量推进球面并联机构  
Fig.1 Spherical parallel mechanism (SPM) for vectored thruster

如图2所示为该球面并联机构的结构简图及坐标系变换,固定坐标系{A}建立在球心O<sub>A</sub>处,与定平台固联的4个转动副R1、R2、R3和R4分别位于x轴和y轴,另外将分支2及分支4中的运动副R+

U等效为图中的两球副S1和S2,连同4个曲线副P共同位于球面上。运动坐标系{B}固联于最上方的连杆中心点O<sub>B</sub>处。机构初始位置如图2中虚线所示,各分支均与水平面x<sub>A</sub>O<sub>A</sub>y<sub>A</sub>垂直,此时运动坐标系和固定坐标系的坐标轴相互平行。

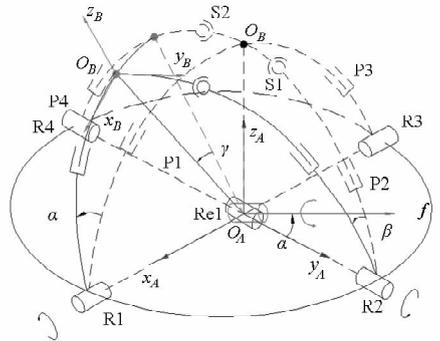


图2 坐标系及坐标变换  
Fig.2 Coordinate frame and transformation

假设该球面并联机构的球半径为R,驱动关节R1从初始位置绕x<sub>A</sub>轴逆时针转过的角度为α,在驱动关节R2转过角度β的驱动下,位于分支1的运动副P1(等效于图中的转动副Re1)从初始位置转过的角度为γ(注意γ≠β)。则动坐标系{B}可以看做固定坐标系{A}先沿z轴平移R,然后绕x<sub>A</sub>轴转过α,最后绕向量f逆时针转动γ,坐标系的变换过程如图2所示。

由图2可知,向量f实际上为y<sub>A</sub>轴绕x<sub>A</sub>轴转过角度α后形成,即f=(0,cosα,sinα),则利用通用旋转变换矩阵可得

$$R(f, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\gamma & 0 \\ \sin\alpha\sin\gamma & \cos^2\alpha(1-\cos\gamma) + \cos\gamma & \sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\gamma) & 0 \\ -\sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\alpha(1-\cos\gamma) & \sin^2\alpha(1-\cos\gamma) + \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

动坐标系{B}相对于固定坐标系{A}的描述包括平移坐标变换和旋转坐标变换,总体的齐次变换矩阵<sup>A</sup>T<sub>B</sub>为

$${}^A T_B = \text{Rot}(f, \gamma) \text{Rot}(x, \alpha) \text{trans}(0, 0, R) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma & 0 \\ \sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\gamma & 0 \\ -\sin\alpha\sin\gamma & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\gamma & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

则对于坐标系{B}中的任意点到坐标系{A}中的总体转换为

$${}^A p = {}^A T_B {}^B p \quad (3)$$

### 1.2 自由度计算

该矢量推进球面并联机构中存在过约束以

及运动副的变异结构形式,利用基于约束螺旋的自由度求解原理,可以先将显而易见的过约束(如固联于定平台的两组共轴转动副)去掉后,对剩余部分进行自由度分析,其中运动副 P1 等效为球心处沿  $x$  轴的转动副,运动副 P2 等效为球心处沿  $y$  轴的转动副,运动副 R + U 等效为连接动平台的一球副 S,令其坐标为  $(a, b, c)$ ,即共点不共面的 3 个转动副 R,机构的运动副对应的螺旋如图 3 所示。

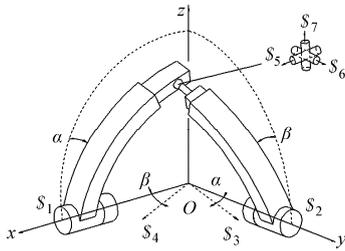


图3 运动副螺旋

Fig. 3 Screw of kinematic pairs

根据图 3 可以写出所有运动副对应的螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1: (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_2: (0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_3: (0 \ \cos\alpha \ -\sin\alpha; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_4: (\cos\beta \ 0 \ -\sin\beta; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_5: (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ c \ -b) \\ \mathcal{S}_6: (0 \ 1 \ 0; \ -c \ 0 \ a) \\ \mathcal{S}_7: (0 \ 0 \ 1; \ b \ -a \ 0) \end{cases} \quad (4)$$

可以找到唯一一个与以上所有螺旋系相逆的反螺旋

$$\mathcal{S}^r: (a \ b \ c; \ 0 \ 0 \ 0)$$

该反螺旋与以上螺旋系中所有螺旋的互易积均为 0。螺旋系的反螺旋的数目就是公共约束数目,因此,机构有一个公共约束,  $\lambda = 1$ ,机构的阶数  $d = 6 - 1 = 5$ ,冗余约束和局部自由度均为 0,代入修正的 Kutzbach - Grübler 公式

$$M = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + v - \zeta = 5(5 - 5 - 1) + 7 = 2 \quad (5)$$

式中  $n$ ——包括机架的构件数目

$g$ ——运动副数目

$d$ ——机构的阶数

$f_i$ ——第  $i$  个运动副的自由度

$v$ ——冗余约束数目

$\zeta$ ——局部自由度数

经过进一步验证,机构在连续运动过程中,自由度不会因为位移变化而变化,因此,该机构为 2 自由度球面并联机构。

## 2 2 自由度球面并联机构的运动学建模

### 2.1 位置建模

已知输入参数求解输出参数是并联机构的运动学正解问题,本球面并联机构仅有 2 个独立的输入参数,即驱动关节 R1 和 R2 的角位移。由坐标变换部分可知,运动副 P1 即转动副 Re1 转过角度  $\gamma$ ,是绕着垂直于分支 1 所处平面的法向量转动的,同时是由分支 2 的转动副 R2 转动角度  $\beta$  所驱动的,而 R2 所转过的角度  $\beta$  则是转动副 R2 绕  $y$  轴转动的。如图 3 所示,由几何关系可以得到

$$\cos\beta = \frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\gamma + \sin^2\gamma}} \quad (6)$$

求解方程(6)可得到等效转动副 Re1 转过角度为

$$\gamma = \arctan(\cos\alpha\tan\beta) \quad (7)$$

作为矢量推进机构,螺旋桨主轴的方位将会决定水下机器人的航行方向。球面并联机构的位置解即为螺旋桨主轴的位置向量,设该向量为  $\mathbf{u} = O_A O_B$ ,在初始配置位置,  $\mathbf{u}_0 = [0 \ 0 \ R \ 1]^T$  当分支 1 的转动副 R1 和移动副 P 分别转过角度  $\alpha$  和  $\gamma$  后,利用坐标变换法可得

$$\mathbf{u} = \text{Rot}(\mathbf{f}, \gamma) \text{Rot}(x, \alpha) \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} R\sin\gamma \\ -R\sin\alpha\cos\gamma \\ R\cos\alpha\cos\gamma \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

再将式(7)代入式(8)可得螺旋桨主轴在固定坐标系  $\{A\}$  中的位置向量为

$$\mathbf{u} = R / \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta} \begin{bmatrix} \cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \quad (9)$$

另外,注意到该球面并联机构的 2 个输入参数是相互独立的,也可以利用球面解析几何的方法寻求位置正解。当驱动关节 R1 和 R2 的角位移分别为  $\alpha$  和  $\beta$  时,分支 1 和分支 2 所在平面的方程可分别写出,并与球面方程联立可得到

$$\begin{cases} y_A \cos\alpha + z_A \sin\alpha = 0 \\ -x_A \cos\beta + z_A \sin\beta = 0 \\ x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = R^2 \end{cases} \quad (10)$$

求解方程组(10)即可得到该球面并联机构的位置解为

$$\Phi(x, y, z)^T = R / \sqrt{\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1} \begin{bmatrix} \tan\beta \\ -\tan\alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式(9)和式(11)分别为利用坐标转换和解析几何的方法求得的球面机构的位置正解表达式,两者是完全相等的,进一步表明结果的正确性。

若已知该球面并联机构的输出位置向量,求解各个驱动关节的输入角位移,则为机构的位置逆解问题。假设输出位置为  $\mathbf{u} = [x \ y \ z]$ ,则可首先将其转换为模长为  $R$  的向量为

$$\mathbf{u}_R = [x \ y \ z] \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

将该向量代入位置正解方程(11)可得

$$\begin{cases} \frac{\tan\beta R}{\sqrt{\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1}} = \frac{xR}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{-\tan\alpha R}{\sqrt{\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1}} = \frac{yR}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{R}{\sqrt{\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1}} = \frac{zR}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases} \quad (12)$$

求解方程组(12)并根据坐标选择正确的符号可得机构的输入参数

$$\boldsymbol{\phi}(\alpha, \beta)^T = \begin{bmatrix} \arctan(-y/z) \\ \arctan(x/z) \end{bmatrix} \quad (13)$$

式(13)即为球面机构的位置逆解,即在已知螺旋桨主轴位置向量的前提下,可以方便地求取2个驱动关节的角位移。

## 2.2 速度建模与一阶运动影响系数

在该球面机构的运动过程中,动坐标系原点  $O_B$  可以看做为固联于分支1上的点,根据刚体运动学的知识,其沿  $x$  轴转动的角速度即为转动副 R1 的角速度,对应运动螺旋  $\$1$ ,因为  $\$3$  的转动轴线始终与  $\$1$  垂直。同理,动点  $O_B$  也可以看成是固联于分支2上的点,其沿  $y$  轴的转动角速度等于转动副 R2 的角速度,即运动螺旋  $\$2$ ,运动副 P2 及球副 S1 对其沿  $y$  轴的转动分量没有任何影响,即

$$\begin{cases} \omega_1 \$1 = \frac{d\alpha}{dt} (1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0) = (\dot{\alpha} \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \omega_2 \$2 = \frac{d\beta}{dt} (0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) = (0 \ \dot{\beta} \ 0; 0 \ 0 \ 0) \end{cases} \quad (14)$$

根据两螺旋的代数和运算规则,合成后点  $O_B$  的运动螺旋为

$$\omega \$ = \omega_1 \$1 + \omega_2 \$2 = (\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ 0; 0 \ 0 \ 0) \quad (15)$$

其中  $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$  为转动副 R<sub>1</sub>、R<sub>2</sub> 的角位移对时间的一阶导数。

式(15)即为球面并联机构的瞬时角速度解,运动螺旋的原部即为点  $O_B$  的角速度矢量  $(\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ 0)$ 。由前面的位置解,该点的瞬时速度矢量则为

$$\mathbf{v}_{O_B} = \boldsymbol{\omega}_{O_B} \times \mathbf{u} =$$

$$R / \sqrt{\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ -\dot{\alpha} \\ -\dot{\alpha}\tan\alpha - \dot{\beta}\tan\beta \end{bmatrix} \quad (16)$$

由此可见,该球面并联机构的速度正逆解具有非常简单的形式,  $O_B$  点的运动螺旋可以直接由2个驱动转动副的输入参数得到,其二维转动自由度的角速度输入与输出呈一一对应的关系,因此为解耦球面并联机构,可以为后续的动力学及控制算法提供很大的方便。

并联机构的雅可比矩阵将驱动关节的速度映射为动平台的线速度和角速度,是并联机构性能分析和设计的重要工具。对于本文提出的2自由度球面并联机构,当给定输入参数  $\phi_i (i=1,2)$  时,就可以得到确定的位置输出  $\boldsymbol{\phi}$ ,此处  $\phi_i$  为两个驱动关节的角位移,即  $\phi_1 = \alpha, \phi_2 = \beta$ ,机构的输出方程可以写成非线性方程

$$\boldsymbol{\phi}(x, y, z)^T = \mathbf{f}(\phi_1, \phi_2) \quad (17)$$

结合位置正解方程(11)将方程(17)展开即为

$$\begin{cases} x = f_1(\phi_1, \phi_2) = R \tan\beta / \sqrt{\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1} \\ y = f_2(\phi_1, \phi_2) = -R \tan\alpha / \sqrt{\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1} \\ z = f_3(\phi_1, \phi_2) = R / \sqrt{\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1} \end{cases} \quad (18)$$

由于输入运动参数  $\alpha, \beta$  随时间变化,将式(17)两边对时间求导可得

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \phi_i} \dot{\phi}_i \quad (19)$$

结合式(18)将式(19)分别展开为

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_1}{\partial \phi_i} \dot{\phi}_i = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial f_1}{\partial \beta} \dot{\beta} \\ \dot{y} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_2}{\partial \phi_i} \dot{\phi}_i = \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \dot{\beta} \\ \dot{z} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_3}{\partial \phi_i} \dot{\phi}_i = \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial f_3}{\partial \beta} \dot{\beta} \end{cases} \quad (20)$$

式(20)中的一系列偏导数即为一阶运动影响系数,它们仅与该机构的结构参数及驱动关节的位置有关,与原动件的运动无关,将其写成矩阵的形式即为雅可比矩阵,经过计算并化简可得

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{bmatrix}^T =$$

$$R \begin{bmatrix} -\tan\alpha \tan\beta (1 + \tan^2\alpha) m^3 & (1 + \tan^2\beta) (1 - m^2 \tan^2\beta) m \\ (1 + \tan^2\alpha) (m^2 \tan^2\alpha - 1) m & \tan\alpha \tan\beta (1 + \tan^2\beta) m^3 \\ -\tan\alpha (1 + \tan^2\alpha) m^3 & -\tan\beta (1 + \tan^2\beta) m^3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中  $m = 1 / \sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + 1}$ 。因此球面并联机构的瞬时线速度输出方程可用雅可比矩阵表示为

$$\omega_{o_B} \times u = G \dot{\phi} \quad (22)$$

其中  $\dot{\phi} = [\dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T = [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T$

### 3 2 自由度球面并联机构的动力学分析

在惯性坐标系下,刚体运动的牛顿-欧拉方程写成旋量形式为<sup>[20]</sup>

$$(\mathbf{F}^S; \mathbf{M}_C^S) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{p}^B; \mathbf{h}_C^B) + (\boldsymbol{\omega}^S; \mathbf{v}_C^S) \times (\mathbf{p}^S; \mathbf{h}_C^S) \quad (23)$$

展开矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^S \\ \mathbf{F}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_C^S & 0 \\ 0 & mI_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^S \\ \mathbf{a}_C^S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^S \times I_C^S \boldsymbol{\omega}^S \\ \boldsymbol{\omega}^S \times m\mathbf{v}_C^S \end{bmatrix} \quad (24)$$

式中  $\mathbf{F}$ ——作用在刚体上的外力

$\mathbf{M}$ ——力矩  $\mathbf{p}$ ——线动量

$\mathbf{h}$ ——角动量  $\boldsymbol{\omega}$ ——角速度矢量

$\boldsymbol{\varepsilon}$ ——角加速度矢量

$\mathbf{v}$ ——线速度矢量

$I_3$ ——三阶单位矩阵

式中上标  $S$  代表空间坐标系,上标  $B$  代表物体坐标系,下标  $C$  代表质心。

该球面并联机构各杆的受力模型如图 4 所示,其中  $M_i$  为作用于杆  $i$  的驱动力矩,  $F_{ij}$  为杆  $i$  对杆  $j$  的作用力,  $f_{ij}$  为杆  $i$  对杆  $j$  的摩擦力,  $N_{ij}$  为杆  $i$  对杆  $j$  的拉力,  $G_i$  为杆  $i$  的重力,  $F_{ix}$  为杆  $i$  在  $x$  方向的支座反力,  $L_x(\mathbf{F})$  为力  $\mathbf{F}$  对  $x$  轴的力臂,  $y$ 、 $z$  方向同理。

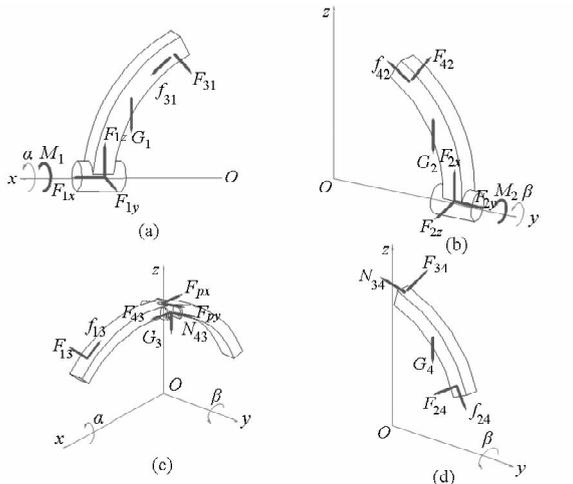


图 4 球面机构各杆的受力模型

Fig. 4 Mechanical models of SPM's rods

(a) 杆 1 (b) 杆 2 (c) 杆 3 (d) 杆 4

杆 1 只做绕  $x$  轴的转动,结合受力分析可得其定轴转动的微分方程

$$I_{x1} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \sum M_{x1}(\mathbf{F}) = M_1 + G_1 L_x(G_1) - F_{31} L_x(F_{31}) \quad (25)$$

式中  $I_{x1}$ ——杆 1 绕  $x$  轴转动的转动惯量

$M_{x1}(\mathbf{F})$ ——作用于杆 1 的外力系对  $x$  轴的主矩

同理对杆 2 可写出

$$I_{y2} \frac{d^2 \beta}{dt^2} = \sum M_{y2}(\mathbf{F}) = M_2 + G_2 L_y(G_2) - F_{42} L_y(F_{42}) \quad (26)$$

对于杆 3 和杆 4,其旋量形式的牛顿-欧拉方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{O_i} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{O_i} & 0 \\ 0 & mI_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_i \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \times I_{O_i} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \times m\mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (27)$$

因其只有二维转动自由度,抽取其绕  $O$  点转动的部分并写成矩阵为

$$\begin{bmatrix} M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\varepsilon}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (28)$$

式中  $I_{O_i}$ ——杆  $i$  对  $O$  点的惯性张量阵

$\boldsymbol{\omega}_i$ ——杆  $i$  的角速度矢量

$\boldsymbol{\varepsilon}_i$ ——杆  $i$  的角加速度矢量

$\mathbf{M}_{O_i}$ ——作用于杆  $i$  的外力系对点  $O$  的主矩矢量

由杆 3 和杆 4 的受力分析可得

$$\mathbf{M}_{O3} = \begin{bmatrix} F_{13} L_x(F_{13}) - F_{py} R - N_{43} R + G_3 L_x(G_3) \\ F_{43} R - F_{px} R - f_{13} R + G_3 L_y(G_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{M}_{O4} = \begin{bmatrix} N_{34} R - f_{24} R - G_4 L_x(G_4) \\ F_{24} L_y(F_{24}) - F_{34} R + G_4 L_y(G_4) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

联立上述各杆的方程可以得到该球面机构的 2 个驱动力矩解为

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_1 \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \mathbf{D}_2 \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \dot{\beta} \\ \dot{\beta} \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \mathbf{D}_3 \begin{bmatrix} \dot{\alpha}^2 \\ \dot{\beta}^2 \end{bmatrix} + \mathbf{D}_4 \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix} + \mathbf{M}_f + \mathbf{M}_p \quad (31)$$

$$\text{其中 } D_1 = \begin{bmatrix} I_{x1} + I_{x3} + I_{x4} & -I_{xy3} - I_{xy4} \\ -I_{xy3} - I_{xy4} & I_{y2} + I_{y3} + I_{y4} \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} -I_{xz3} - I_{xz4} & 0 \\ 0 & I_{yz3} + I_{yz4} \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & -I_{yz3} - I_{yz4} \\ I_{xz3} + I_{xz4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} -L_x(G_1) & 0 & -L_x(G_3) & L_x(G_4) \\ 0 & -L_y(G_2) & -L_y(G_3) & -L_y(G_4) \end{bmatrix}$$

$$M_f = \begin{bmatrix} M_{f1} \\ M_{f2} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} f_{24} \\ f_{13} \end{bmatrix}$$

式中  $D_1$ ——角加速度项系数矩阵  
 $D_2$ ——科式力项系数矩阵  
 $D_3$ ——向心力项系数矩阵  
 $D_4$ ——重力项系数矩阵  
 $M_f$ ——摩擦力矩

$M_p$ 项为该球面机构的外部载荷项,作为水下机器人的矢量推进机构,该球面并联机构的载荷主要来源于螺旋桨受到的水动力,为简化模型,此处仅考虑螺旋桨的水阻扭转力矩  $M_p$ ,即

$$M_p = K_m (J_0) \rho n^2 D^5 \quad (32)$$

其中  $J_0 = u_a / (Dn) \quad (33)$

式中  $K_m$ ——扭转系数,该系数是进速比  $J_0$  的函数  
 $\rho$ ——水的密度  $n$ ——螺旋桨转速  
 $D$ ——螺旋桨叶直径  $u_a$ ——推进速度

## 4 数值算例

图5所示为该矢量推进球面并联机构的样机,其中,弧形伸缩杆改进为滚轮滑槽结构,2个驱动关节由伺服电动机驱动并由锥齿轮传动,动平台与螺旋桨主轴为轴承连接。

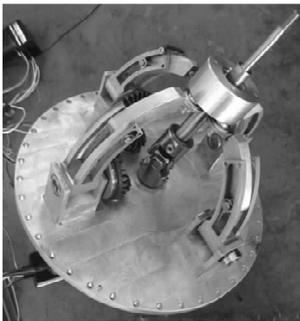


图5 矢量推进球面并联机构样机

Fig.5 SPM prototype of vectored thruster

以定平台坐标系  $O_A x_A y_A z_A$  为参考系,设该球面并联机构的球面半径为  $R = 100 \text{ mm}$ ,角位移  $\alpha, \beta$  的最大绝对值为  $30^\circ$ ,将动平台中心点的运动定义为平行于  $x_A O_A y_A$  平面内的圆周运动,取动平台的运动

轨迹为半径  $r = 30 \text{ mm}$  的圆,运动平面位置为  $z_A = \sqrt{R^2 - r^2} = 95.39 \text{ mm}$ ,初始位置位于坐标系  $x_A y_A z_A$  的坐标  $(30, 0, 95.39)$  处。动平台的运动轨迹为

$$\begin{cases} x(t) = 30 \cos(2t) \\ y(t) = 30 \sin(2t) \\ z(t) = 95.39 \end{cases} \quad (34)$$

利用 Matlab 对上述轨迹方程进行数值模拟可以得到2个驱动关节的角位移、角速度、角加速度曲线分别如图6a、6b、6c所示。另外,机构的工作空间为球面的子集,其在底面的投影为一矩形,如图6d所示。

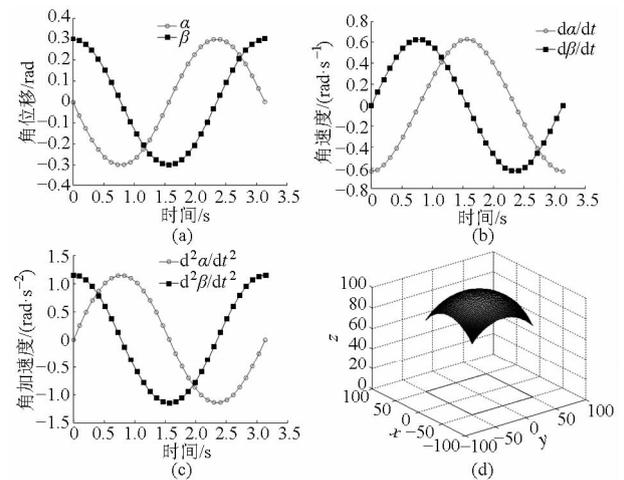


图6 运动学数值模拟

Fig.6 Numerical simulation of kinematics

(a) 角度 (b) 角速度 (c) 角加速度 (d) 工作空间

对于动力学参数,各杆的重力及惯性张量可由 Pro/E 的测量模块读取,假设螺旋桨的最大进速为4节(1节 = 1.852 km/h),螺旋桨转速 300 r/min,螺旋桨叶直径  $D = 250 \text{ mm}$ ,由螺旋桨特征数据可以得到进速比  $J_0 = 0.2620$ ,由线性插值可得扭转系数  $K_m = 0.05762$ 。经计算得螺旋桨的水阻扭转力矩为

$$M_p = 0.05762 \times 1000 \times 0.25^5 \times (300/60)^2 = 1.4067 \text{ N} \cdot \text{m}$$

利用 Matlab 对该机构的动力学进行数值模拟,机构空载和负载情况下驱动关节所需转矩的变化曲线分别如图7a、7b所示。

由图7可知,机构空载时,两驱动关节的输入转矩呈三角函数变化趋势,最大转矩约为  $4 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ ,在有水阻负载时,两驱动关节输入转矩的变化周期将会随负载变化,其最大转矩约为  $1.41 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。由数值模拟可知,将该球面机构用于矢量推进任务时,空载输入转矩占总输入转矩的比例较小,由此可为后续电机选型及推进性能分析提供参考。

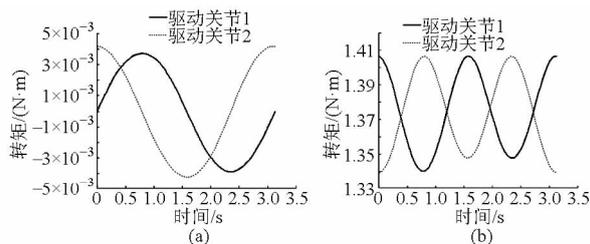


图7 动力学数值模拟

Fig.7 Numerical simulation of dynamics

(a) 空载 (b) 负载

## 5 结论

(1) 提出了一种用于矢量推进的球面并联机

构, 机构为2自由度解耦球面并联机构, 其运动学和动力学分析简单易解, 具有很强的实用价值。

(2) 利用解析几何以及螺旋理论知识建立了机构的运动学模型, 得到明确的位置及速度正逆解, 运动影响系数法求解瞬时速度的雅可比矩阵更加简洁明确。

(3) 基于旋量形式的牛顿-欧拉方程并结合水动力学建立机构的动力学模型, 利用水阻扭转力矩作为载荷简化了动力学模型, 数值模拟为后续控制算法及轨迹规划奠定基础。

## 参 考 文 献

- 高富东, 潘存云, 杨政, 等. 多矢量推进水下航行器6自由度非线性建模与分析[J]. 机械工程学报, 2011, 47(5): 93-100. Gao Fudong, Pan Cunyun, Yang Zheng, et al. Nonlinear mathematics modeling and analysis of the vectored thruster autonomous underwater vehicle in 6-DOF motions[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(5): 93-100. (in Chinese)
- 陈路伟, 周朝晖. 矢量推进方式下的自主式水下航行器纵向运动操纵性分析[J]. 船海工程, 2011, 40(2): 119-124. Chen Luwei, Zhou Zhaohui. Maneuverability analysis of vertical movement of the vectored thruster autonomus underwater vehicle [J]. Ship & Ocean Engineering, 2011, 40(2): 119-124. (in Chinese)
- Lisandro J Puglisi, Roque J Saltaren, Germán Rey Portolés, et al. Design and kinematic analysis of 3PSS-1S wrist for needle insertion guidance[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2013(61): 417-427.
- Hou Yulei, Hu Xinzhe, Zeng Daxing, et al. Biomimetic shoulder complex based on 3-PSS/S spherical parallel mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(1): 29-37.
- Bai Shaoping, Michael R Hansen, Jorge Angeles. A robust forward-displacement analysis of spherical parallel robots [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(12): 2204-2216.
- Chaker A, Mlika A, Laribi M A, et al. Clearance and manufacturing errors' effects on the accuracy of the 3-RCC Spherical Parallel Manipulator[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2013, 37: 86-95.
- Shaoping Bai. Optimum design of spherical parallel manipulators for a prescribed workspace[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(2): 200-211.
- Wu Guanglei, Stéphane Caro, Bai Shaoping, et al. Dynamic modeling and design optimization of a 3-DOF spherical parallel manipulator[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2014, 62(10): 1377-1386.
- 耿明超, 赵铁石, 王唱, 等. 4-UPS/UPR 并联机构动力学分析[J]. 农业机械学报, 2014, 45(8): 299-306. Geng Mingchao, Zhao Tieshi, Wang Chang, et al. 4-UPS/UPR parallel mechanism dynamic analysis[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(8): 299-306. (in Chinese)
- 张良安, 马寅东, 单家正, 等. 4自由度含局部闭链式码垛机器人动力学优化设计[J]. 农业机械学报, 2013, 44(11): 336-341. Zhang Liang'an, Ma Yindong, Shan Jiazheng, et al. Optimal dynamic design of 4-DOF palletizing robot with closed-chain[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(11): 336-341. (in Chinese)
- 张帆, 张丹, 杨建国. RRR-UPRR-RPUR 球面转动并联机构运动学分析[J]. 农业机械学报, 2011, 42(9): 202-206. Zhang Fan, Zhang Dan, Yang Jinguo. Kinematics analysis of RRR-UPRR-RPUR spherical parallel manipulator[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(9): 202-206. (in Chinese)
- 虞启凯, 游有鹏, 韩江义. 3-U<sup>1</sup>SR6 自由度并联机构位置分析[J]. 农业机械学报, 2011, 42(12): 215-219. Yu Qikai, You Youpeng, Han Jiangyi. Position analysis of 3-U<sup>1</sup>SR parallel mechanism with 6-DOF [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(12): 215-219. (in Chinese)
- 郭彦军, 李瑞琴, 何水琴, 等. 3-RRP 球面并联机构的运动学分析[J]. 机械设计与制造, 2014(4): 199-205. Guo Yanjun, Li Ruiqin, He Shuiqin, et al. Kinematics analysis of a 3-RRP spherical parallel manipulator[J]. Machinery Design & Manufacture, 2014(4): 199-205. (in Chinese)
- Javad Enferadi, Alireza Akbarzadeh Tootoonchi. A novel approach for forward position analysis of a double-triangle spherical parallel manipulator[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2010, 29(3): 348-355.
- 张均富, 王进戈, 徐礼钜. 基于螺旋理论的球面并联机构动力学解析模型[J]. 农业机械学报, 2007, 38(4): 122-126. Zhang Junfu, Wang Jin'ge, Xu Liju. Analytical dynamic model for spherical parallel mechanisms based on screw theory [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2007, 38(4): 122-126. (in Chinese)
- 李成刚, 吴洪涛, 朱剑英. 球面并联机构动力学模型构成项对比研究[J]. 机械科学与技术, 2011, 30(5): 807-812.

- Li Chenggang, Wu Hongtao, Zhu Jianying. A contrastive study of the items of dynamics model of the spherical parallel mechanism [J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2011, 30(5):807 - 812. (in Chinese)
- 17 刘海涛, 梅江平, 赵学满, 等. 一种 2 自由度球面并联机构动力学建模与伺服电机参数预估[J]. *中国科学 E 辑: 技术科学*, 2008, 38(1):111 - 124.
- Liu Haitao, Mei Jiangping, Zhao Xueman, et al. Dynamic modeling and servo motor parameter estimation of a 2 - DOF spherical parallel mechanisms[J]. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2008, 38(1):111 - 124. (in Chinese)
- 18 王玫, 刘锐, 杨随先. 可调球面四杆机构函数优化综合方法[J]. *农业机械学报*, 2012, 43(1):208 - 212.
- Wang Mei, Liu Rui, Yang Suixian. Optimal synthesis of adjustable spherical four-bar mechanisms for function generation[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2012, 43(1):208 - 212. (in Chinese)
- 19 Tao Zongjie, An Qi. Interference analysis and workspace optimization of 3 - RRR spherical parallel mechanism[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2013, 69:62 - 72.
- 20 于靖军, 刘辛军, 丁希仑, 等. 机器人机构学的数学基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 2009:362 - 369.