

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.06.045

# 基于 POE 的动力学建模与快速非奇异终端滑模控制\*

陈庆诚<sup>1</sup> 朱世强<sup>1</sup> Rajat Mittal<sup>2</sup> 张学群<sup>1</sup>

(1. 浙江大学流体动力与机电系统国家重点实验室, 杭州 310027;

2. 曼尼帕大学曼尼帕工学院, 卡纳塔卡邦 560001, 印度)

**摘要:** 结合旋量指数积形式(POE)和凯恩方程的优点,提出了一种具有明显几何意义的高效动力学建模方法,并以此为基础提出机器人系统的快速非奇异终端滑模控制算法。凯恩方程中的偏速度选择为基于旋量理论描述的合适的物体雅可比矩阵,并以此定义其他动力学模型参数表达方式,且在“钱江一号”串联机器人上进行建模实例验证。基于该动力学模型,为了改善传统滑模控制的有限时间收敛特性,保证全局控制非奇异性,提出了一种快速全局非奇异终端滑模控制,通过构造带状态高次项的滑模面函数,得到全局非奇异控制,并保证系统从任意状态到达滑模面的时间和在滑模上到达平衡点的时间均为有限且快速收敛,通过李雅普诺夫函数证明了其稳定性,并结合对比实验,验证了该方法在机器人系统中的鲁棒性和有效性。

**关键词:** 动力学建模 凯恩方程 指数积 滑模控制

**中图分类号:** TP242.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2015)06-0310-09

## Dynamic Modeling Based on POE and Non-singular Terminal Sliding Mode Control

Chen Qingcheng<sup>1</sup> Zhu Shiqiang<sup>1</sup> Rajat Mittal<sup>2</sup> Zhang Xuequn<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Fluid Power Transmission and Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

2. Manipal Institute of Technology, Manipal University, Karnataka 560001, India)

**Abstract:** To compact the dynamic analysis and improve the computation efficiency, the advantages of Kane's equations and the product of exponential (POE) formulas were combined based on screw theory to propose a new effective dynamic modeling of robot manipulator with explicit geometric significance, and based on this dynamic model, a non-singular terminal sliding mode control was presented to achieve better performance. The velocity Jacobian matrix was addressed in the product of exponential form by introducing the screw theory, and the partial velocity of Kane's equations was selected specifically from the suitable velocity Jacobian matrix. Then a dynamic modeling example based on Kane's equations and screw theory was established, which led to be less complicated compared with other typically dynamic methods. With the proposed dynamic equations of serial robot manipulator, a fast non-singular terminal sliding mode (FNTSM) control was presented by introducing an improved fast non-singular terminal sliding mode surface, which was designed to ensure the fast convergence in global system state whether it was near to equilibrium or far away from the equilibrium. Then the stability analysis of the proposed method was performed by using Lyapunov stability theory. Finally, comparative experiments were implemented to demonstrate the effectiveness and robustness of the proposed approach.

**Key words:** Dynamic modeling Kane's equations Product of exponential Sliding mode control

收稿日期: 2015-03-15 修回日期: 2015-04-10

\* 国家自然科学基金创新研究群体资助项目(51221004)、浙江省自然科学基金资助项目(LY13E050001)和杭州市重大科技创新资助项目(20132111A04)

作者简介: 陈庆诚, 博士生, 主要从事工业机器人运动控制研究, E-mail: qcchen@zju.edu.cn

通讯作者: 朱世强, 教授, 博士生导师, 主要从事机器人技术研究, E-mail: sqzhu@zju.edu.cn

## 引言

动力学研究是物体运动和受力之间的关系,是机器人动态控制和高精度运动控制、动态设计及运动仿真的基础<sup>[1-4]</sup>。机器人多体系统动力学建模是一个相当复杂的过程,应用不同的动力学方法研究同一对象的同一种运动形态,计算速度和计算量相差很大,是实现实时控制的关键<sup>[5-6]</sup>。

常见的动力学建模方法有牛顿-欧拉方法、拉格朗日方程、凯恩方程等,牛顿-欧拉方程<sup>[7]</sup>是采用形位坐标作为独立变量的传统力学方法,包含机器人关节处的约束反力,但体数较多时,将引入大量的约束反力,消去它们形成机器人运动和驱动力矩关系的显式较烦,使得建模过程变得复杂。而以拉格朗日方程为代表的分析力学方法<sup>[8-9]</sup>,则是将系统作为一个整体去研究,但是由于引入了动能,需两次求导,均为偏微分方程,计算量大且速度低,对于体数目比较多时的推导过程费时费力,给出的若干二阶方程式也相当冗长。凯恩方程兼有牛顿欧拉方法和拉格朗日方法两者优点,从运动本质出发,引入了伪速度而获得简洁的一阶微分方程组<sup>[9-10]</sup>。它的特点是引入了广义速率的定义,利用广义速率代替广义坐标描述系统的运动,直接利用达朗伯原理建立动力学方程,既适用完整系统,也适用于非完整系统。且利用李群及旋量理论等数学工具得到的刚体运动描述方式具有明确的几何意义<sup>[11-12]</sup>,将其速度与角速度统一处理,形式简洁,能够有效简化系统运动学分析。

针对不确定性干扰和摄动的多关节机器人的高精度轨迹跟踪控制问题,滑模变结构控制因具有较强的鲁棒性而成为一种有效的控制方法,包括线性滑模、非线性滑模控制等,其中典型的非线性滑模控制是文献[13]提出的非奇异终端滑模控制,但是该方法存在有限时间收敛较慢的缺点,即在远离平衡点的区域收敛速度较慢且系统不具备全局快速收敛特性。

本文将旋量理论与凯恩方程方法相结合,研究一种具有明显几何特性且计算复杂性低,求解过程简洁,步骤清晰,便于计算机实现的高效动力学建模方法。同时,基于动力学模型对机器人系统的高精度轨迹跟踪控制<sup>[14-15]</sup>进行研究,提出一种全局快速非奇异终端滑模控制,研究非线性滑模超曲面在保证控制非奇异的同时改善其收敛特性。

## 1 基于POE的动力学建模

### 1.1 旋量指数积

Chasles定理<sup>[16]</sup>证明了任何物体从一个位形到

另一个位形的刚体运动都可以用绕某直线的转动和沿该直线的移动复合实现,这种移动与转动的组合运动,可将其称之为螺旋运动。而螺旋运动的无穷小量即运动旋量,其Plucker坐标形式定义为

$$\xi = \begin{bmatrix} \omega \\ \nu \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中  $\omega$ ——旋转角速度  $\nu$ ——平移线速度

式(1)映射到特殊欧氏群  $se(3)$ ,表示为

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & \nu \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{其中 } \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

定义算子  $\vee$ ,可以将  $4 \times 4$  矩阵  $\hat{\xi}$  映射为 6 维向量  $\xi$ ,即运动旋量的 Plucker 坐标形式

$$\begin{bmatrix} \hat{\omega} & \nu \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}^{\vee} = \begin{bmatrix} \omega \\ \nu \end{bmatrix} \quad (3)$$

同样利用逆算子  $\wedge$ ,可以将给定的 6 维向量构造矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \omega \\ \nu \end{bmatrix}^{\wedge} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & \nu \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

根据旋量理论,刚体的螺旋运动可以采用运动旋量的指数坐标形式来表示,即任何一个刚体运动  $g \in se(3)$ ,都有  $g = e^{\hat{\xi}\theta}$ 。其中

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{cases} \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})(\omega \times \nu) + \theta\omega\omega^T\nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & (\omega \neq 0) \\ \begin{bmatrix} I & \theta\nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & (\omega = 0) \end{cases} \quad (5)$$

其中  $e^{\hat{\omega}\theta} = I + \hat{\omega}\theta + \frac{(\hat{\omega}\theta)^2}{2!} + \frac{(\hat{\omega}\theta)^3}{3!} + \dots =$

$$I + \hat{\omega}\sin\theta + \hat{\omega}^2(1 - \cos\theta)$$

在刚体上的物体坐标系  $\{T\}$  相对与惯性坐标系  $\{S\}$  的位姿变换可以用刚体运动  $g_{st}(\theta)$  来表示,以  $g_{st}(0)$  表示物体坐标系相对于惯性坐标系的初始位形,则刚体相对于某一特定轴作螺旋运动  $\xi$ ,可表示为

$$g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} g_{st}(0) \quad (6)$$

这时,将各个关节的运动加以组合,就可以得到机器人正向运动学的指数积为

$$g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1\theta_1} e^{\hat{\xi}_2\theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n\theta_n} g_{st}(0) \quad (7)$$

### 1.2 旋量雅可比矩阵

对于  $n$  关节的串联机器人来说,  $g_{st}(\theta)$  表示串联机器人末端执行器的位形空间,则它的末端瞬时空间速度可表示<sup>[17]</sup>为

$$\hat{V}_{ST}^S = \dot{\mathbf{g}}_{st}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{g}_{st}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) =$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{st}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right) \mathbf{g}_{st}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{st}}{\partial \theta_i} \mathbf{g}_{st}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \right) \dot{\theta}_i \quad (8)$$

由上可知,末端执行器的速度与各个关节速度之间是一个线性的关系,对应的运动旋量坐标可表示为

$$V_{ST}^S = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{st}}{\partial \theta_i} \mathbf{g}_{st}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \right)^V \dot{\theta}_i \quad (9)$$

令  $\mathbf{J}_{ST}^S(\boldsymbol{\theta}) = \left( \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{ST}}{\partial \theta_1} \mathbf{g}_{ST}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \right)^V \dots \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{ST}}{\partial \theta_n} \mathbf{g}_{ST}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \right)^V \right)$ ,  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n)^T$ , 则式(9)变为

$$V_{ST}^S = \mathbf{J}_{ST}^S(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (10)$$

相应地,关节  $j$  在关节  $i$  物体坐标系物体  $L_i$  中的物体雅可比矩阵<sup>[17]</sup>为

$$V_{SL_i}^b = \mathbf{g}_{SL_i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\mathbf{g}}_{SL_i}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}_{SL_i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \sum_{j=1}^i \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{SL_i}}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_j \right) = \sum_{j=1}^i \left( \mathbf{g}_{SL_i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathbf{g}_{SL_i}}{\partial \theta_j} \right) \dot{\theta}_j \quad (11)$$

令  $\mathbf{J}_{SL_i}^b(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \left( \mathbf{g}_{SL_i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{SL_i}}{\partial \theta_1} \right) \right)^V \dots \left( \mathbf{g}_{SL_i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{SL_i}}{\partial \theta_j} \right) \right)^V \quad 0 \right]$  为物体雅可比矩阵,则由式(11)可得

$$V_{SL_i}^b = \mathbf{J}_{SL_i}^b(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (12)$$

由指数积式(7)可得

$$\mathbf{g}_{SL_i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{SL_i}}{\partial \theta_j} \right) = \mathbf{g}_{SL_i}^{-1}(0) e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1} \dots e^{-\hat{\xi}_j \theta_j} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta_j} \right) e^{\hat{\xi}_j \theta_j} \dots e^{\hat{\xi}_i \theta_i} \mathbf{g}_{SL_i}(0) \quad (13)$$

令  $\left( \mathbf{g}_{SL_i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{SL_i}}{\partial \theta_j} \right) \right)^V = \boldsymbol{\xi}'_{ij}$ , 则物体雅可比矩阵可写作

$$\mathbf{J}_{SL_i}^b(\boldsymbol{\theta}) = [\boldsymbol{\xi}'_{i1} \quad \dots \quad \boldsymbol{\xi}'_{ij} \quad 0] \quad (14)$$

式中  $\boldsymbol{\xi}'_{ij}$  代表关节  $j$  在物体坐标系  $L_i$  中的运动旋量,表征从初始位形变换到当前位形的刚体运动(在物体坐标系  $L_i$  中),且该运动状态具有很明显的几何意义<sup>[18]</sup>。

### 1.3 凯恩方程

根据凯恩方程定义<sup>[10]</sup>和式(12),选择  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n)^T$  为串联机器人的广义速度,则物体雅可比矩阵  $\mathbf{J}_{SL_i}^b(\boldsymbol{\theta})$  可选择为偏速度旋量,其中的每一列  $\boldsymbol{\xi}'_{ij}$  都代表串联机器人相对应关节的偏速度旋量。

基于上述思路,结合旋量理论,对应得到以下凯

恩方程定义:

主动力旋量  $\mathbf{F}_\xi$  由作用于关节连杆质心的主动力主矢  $\mathbf{R}_b$  和主动力对质心的主矩  $\mathbf{T}_b$  组合而成

$$\mathbf{F}_\xi = [\mathbf{R}_b \quad \mathbf{T}_b]^T \quad (15)$$

惯性力旋量  $\mathbf{F}_\xi^*$  由作用于关节连杆质心的惯性力主矢  $\mathbf{R}_b^*$  和惯性力对质心的主矩  $\mathbf{T}_b^*$  组合而成

$$\mathbf{F}_\xi^* = [\mathbf{R}_b^* \quad \mathbf{T}_b^*]^T \quad (16)$$

$n$  自由度串联机器人相对于  $j$  关节的广义主动力  $F_j$  等于各关节的主动力旋量  $\mathbf{F}_{\xi_i}$  与该关节对应的偏速度旋量  $\boldsymbol{\xi}'_{ij}$  点积之和

$$F_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{\xi_i}^T \boldsymbol{\xi}'_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

同样的,  $n$  自由度串联机器人相对于  $j$  关节的广义惯性力  $F_j^*$  等于各关节的惯性力旋量  $\mathbf{F}_{\xi_i}^*$  与该关节对应的偏速度旋量  $\boldsymbol{\xi}'_{ij}$  点积之和

$$F_j^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{\xi_i}^{*T} \boldsymbol{\xi}'_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

最终,结合旋量理论,  $n$  自由度串联机器人的凯恩方程动力学为

$$\begin{cases} F_1 + F_1^* = 0 \\ F_2 + F_2^* = 0 \\ \vdots \\ F_n + F_n^* = 0 \end{cases} \quad (19)$$

## 2 建模实例

为了验证本文提出的基于旋量理论的凯恩动力学建模方法,本节主要针对6自由度“钱江一号”的前3个关节进行动力学建模,其结构及关节连杆坐标系的建立如图1所示。

在每个关节的质心上建立关节连杆坐标系:  $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3$ 。

每个关节的运动旋量方向为

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2.1 广义主动力

考虑  $T_1$  为参考坐标系,则关节1的运动副旋量为

$$\mathbf{r}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_1 \\ -d_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}'_{11} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{11} \\ \mathbf{r}_{11} \times \boldsymbol{\omega}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此,关节1的物体雅可比矩阵为

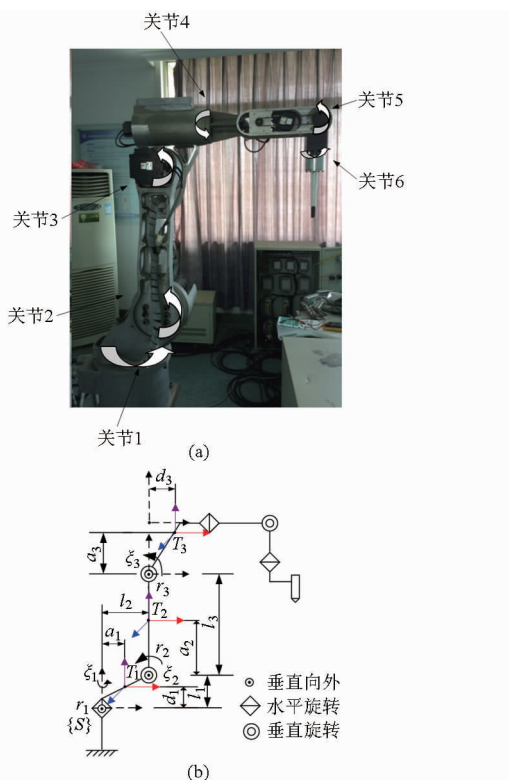


图1 “钱江一号”机器人

Fig.1 “Qianjiang-1” serial robot

(a) 机器人本体 (b) 结构及关节坐标简图

$$J_1^b(\theta) = [\xi'_{11} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \quad (20)$$

考虑  $T_2$  为参考坐标系, 则关节 1 的运动副旋量为

$$r_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \\ -(l_1 + a_2) \end{bmatrix} \quad \xi'_{21} = \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ r_{21} \times \omega_{21} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{\hat{x}\theta_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \\ -(l_1 + a_2) \end{bmatrix} \times \omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -s_2 \\ c_2 \\ -(l_1 + a_2)s_2 - l_2c_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

关节 2 的运动副旋量为

$$r_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_2 \end{bmatrix} \quad \xi'_{22} = \begin{bmatrix} \omega_{22} \\ r_{22} \times \omega_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此, 关节 2 的物体雅可比矩阵为

$$J_2^b(\theta) = [\xi'_{21} \quad \xi'_{22} \quad \mathbf{0}] \quad (21)$$

考虑  $T_3$  为参考坐标系, 则关节 1 的运动副旋量

为

$$r_{31} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(l_2 + d_3) \\ -(l_1 + l_3 + a_3) \end{bmatrix} \quad \xi'_{31} = \begin{bmatrix} \omega_{31} \\ r_{31} \times \omega_{31} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{\hat{x}\theta_2} e^{\hat{x}\theta_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -(l_2 + d_3) \\ -(l_1 + l_3 + a_3) \end{bmatrix} \times \omega_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2c_2s_3 \\ c_{23} \\ -(l_2 + d_3)c_{23} - 2(l_1 + l_3 + a_3)c_2s_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则关节 2 的运动副旋量为

$$r_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ -d_3 \\ -(a_3 + l_3) \end{bmatrix} \quad \xi'_{32} = \begin{bmatrix} \omega_{32} \\ r_{32} \times \omega_{32} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{\hat{x}\theta_3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -d_3 \\ -(a_3 + l_3) \end{bmatrix} \times \omega_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -(a_3 + l_3) \\ d_3 \end{bmatrix}$$

则关节 3 的运动副旋量为

$$r_{33} = \begin{bmatrix} 0 \\ -d_3 \\ -a_3 \end{bmatrix} \quad \xi'_{33} = \begin{bmatrix} \omega_{33} \\ r_{33} \times \omega_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -a_3 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

因此, 关节 3 的物体雅可比矩阵为

$$J_3^b(\theta) = [\xi'_{31} \quad \xi'_{32} \quad \xi'_{33}] \quad (22)$$

考虑主动力旋量, 通过观察即可得到, 针对关节 1, 主动力旋量为

$$\begin{cases} R_{C1} = [0 \quad 0 \quad -m_1g]^T \\ M_{C1} = [\tau_2 \quad 0 \quad \tau_1]^T \\ F_{\xi_1} = [0 \quad 0 \quad -m_1g \quad \tau_2 \quad 0 \quad \tau_1]^T \end{cases} \quad (23)$$

针对关节 2, 主动力旋量为

$$\begin{cases} R_{C2} = [0 \quad -m_2gs_2 \quad -m_2gc_2]^T \\ M_{C2} = [-\tau_2 + \tau_3 \quad 0 \quad 0]^T \\ F_{\xi_2} = [0 \quad m_2gs_2 \quad -m_2gc_2 \quad -\tau_2 + \tau_3 \quad 0 \quad 0]^T \end{cases} \quad (24)$$

针对关节 3, 主动力旋量为

$$\begin{cases} R_{C3} = [0 \quad m_3gs_{23} \quad -m_3gs_{23}]^T \\ M_{C3} = [-\tau_3 \quad 0 \quad 0]^T \\ F_{\xi_3} = [0 \quad m_3gs_{23} \quad -m_3gc_{23} \quad -\tau_3 \quad 0 \quad 0]^T \end{cases} \quad (25)$$

因此,3个关节的广义主动力分别为

$$\begin{cases} F_1 = F_{\xi 1}^T \xi'_{11} + F_{\xi 2}^T \xi'_{21} + F_{\xi 3}^T \xi'_{31} \\ F_2 = F_{\xi 1}^T \xi'_{12} + F_{\xi 2}^T \xi'_{22} + F_{\xi 3}^T \xi'_{32} \\ F_3 = F_{\xi 1}^T \xi'_{13} + F_{\xi 2}^T \xi'_{23} + F_{\xi 3}^T \xi'_{33} \end{cases} \quad (26)$$

### 2.2 广义惯性力

根据凯恩方程的定义,惯性力主矢  $R_b^*$  和主矩  $T_b^*$  可通过以下递推公式获得

$$\begin{cases} R_{C_i}^* = -m_i \dot{V}_{C_i}^b \\ M_{C_i}^* = -I_{C_i}^b \dot{\omega}_{T_i}^b - \omega_{T_i}^b \times (I_{C_i}^b \omega_{T_i}^b) \end{cases} \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} \omega_{T_i}^b = R_{T_i T_{i-1}} \omega_{T_{i-1}}^b + \dot{\theta} \omega_i' \\ \dot{\omega}_{T_i}^b = R_{T_i T_{i-1}} \dot{\omega}_{T_{i-1}}^b + \ddot{\theta} \omega_i' + \dot{\theta} (\omega_{T_i}^b \times \omega_i') \\ \dot{V}_{C_i}^b = \dot{V}_{T_i}^b + \dot{\omega}_{T_i}^b \times r_i^b + \omega_{T_i}^b (\omega_{T_i}^b r_i^b) \\ \dot{V}_{T_i}^b = R_{T_i T_{i-1}} \{ \dot{V}_{T_{i-1}}^b + \dot{\omega}_{T_{i-1}}^b (-r_i^b) + \omega_{T_{i-1}}^b [\omega_{T_{i-1}}^b \times (-r_i^b)] \} \end{cases} \quad (28)$$

式中  $I_{C_i}^b$ ——关节  $i$  关于惯性主轴的惯性矩阵

$\dot{V}_{C_i}^b$ ——关节  $i$  的质心加速度

$\omega_{T_i}^b, \dot{\omega}_{T_i}^b$ ——关节角速度和角加速度

$R_{T_i T_{i-1}}$ ——从关节坐标系  $T_{i-1}$  到  $T_i$  的坐标变

$$\begin{aligned} R_{C_3}^* &= -m_3 \begin{bmatrix} (-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c_{23} + s_{23} \ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1 c_{23} (1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + c_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - s_2 \ddot{\theta}_1) a_3 + (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s_{23} + c_{23} \ddot{\theta}_1 + 2c_3 s_2 \dot{\theta}_1 (1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - 2s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - 2c_2 \ddot{\theta}_1) d_3 \\ (-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c_2 c_3 s_2 + \ddot{\theta}_2 c_3 + s_3 \dot{\theta}_2 + s_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \ddot{\theta}_2 + 2c_3 c_{23} s_2 \dot{\theta}_1^2) a_3 + (\dot{\theta}_1^2 c_{23}^2 - c_2 c_{23} \dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 - s_3 \ddot{\theta}_2 - \dot{\theta}_2) d_3 \\ ((\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + 4s_2^2 c_2^2 \dot{\theta}_1^2 d_3 - s_2 s_3 \dot{\theta}_1 - s_3 \ddot{\theta}_2 - c_3 \dot{\theta}_2^2 - c_3 s_2 \dot{\theta}_1) a_3 + (-\ddot{\theta}_2 + 2s_2 c_3 c_{23} \dot{\theta}_1^2 d_3 - c_2 s_{23} \dot{\theta}_1^2 + c_3 \ddot{\theta}_2 - s_3 \dot{\theta}_2^2) d_3 + c_2 s_3 \dot{\theta}_1 + c_3 s_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\ M_{C_2}^* &= \begin{bmatrix} -I_{xx2} \ddot{\theta}_2 - (I_{yy2} - I_{xx2}) \dot{\theta}_1^2 s_2 c_2 \\ I_{yy2} \ddot{\theta}_1 s_2 + (I_{yy2} + I_{zz2} - I_{xx2}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c_2 \\ -I_{zz2} \ddot{\theta}_1 c_2 + (I_{yy2} - I_{xx2} - I_{zz2}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s_2 \end{bmatrix} \\ F_{\xi 2}^* &= [R_{C_2}^* \quad M_{C_2}^*]^T \end{aligned}$$

关节3的惯性力主矢  $R_b^*$  和主矩  $T_b^*$

$$R_{C_i}^* = [-\dot{\theta}_1 a_1 m_1 \quad -\dot{\theta}_1^2 a_1 m_1 \quad 0]^T$$

$$M_{C_i}^* = [0 \quad 0 \quad -I_{zz1} \ddot{\theta}_1]^T$$

$$F_{\xi 1}^* = [R_{C_1}^* \quad M_{C_1}^*]^T$$

关节2的惯性力主矢  $R_b^*$  和主矩  $T_b^*$

$$R_{C_2}^* = \begin{bmatrix} m_2 a_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c_2 - s_2 \ddot{\theta}_1) \\ -m_2 a_2 (c_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + \ddot{\theta}_2) \\ -m_2 a_2 (s_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \end{bmatrix}$$

$$M_{C_2}^* = \begin{bmatrix} -I_{xx2} \ddot{\theta}_2 - (I_{yy2} - I_{xx2}) \dot{\theta}_1^2 s_2 c_2 \\ I_{yy2} \ddot{\theta}_1 s_2 + (I_{yy2} + I_{zz2} - I_{xx2}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c_2 \\ -I_{zz2} \ddot{\theta}_1 c_2 + (I_{yy2} - I_{xx2} - I_{zz2}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s_2 \end{bmatrix}$$

$$F_{\xi 2}^* = [R_{C_2}^* \quad M_{C_2}^*]^T$$

关节3的惯性力主矢  $R_b^*$  和主矩  $T_b^*$

因此,3个关节的广义惯性力为

$$\begin{cases} F_1^* = F_{\xi 1}^{*T} \xi'_{11} + F_{\xi 2}^{*T} \xi'_{21} + F_{\xi 3}^{*T} \xi'_{31} \\ F_2^* = F_{\xi 1}^{*T} \xi'_{12} + F_{\xi 2}^{*T} \xi'_{22} + F_{\xi 3}^{*T} \xi'_{32} \\ F_3^* = F_{\xi 1}^{*T} \xi'_{13} + F_{\xi 2}^{*T} \xi'_{23} + F_{\xi 3}^{*T} \xi'_{33} \end{cases} \quad (29)$$

### 3 快速非奇异终端滑模控制

将第2节得到的凯恩动力学方程整理合并之后,式(29)也可写成动力学标准矢量矩阵表达式

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau + F(t) \quad (30)$$

式中  $M(q)$ ——惯性矩阵

$C(q, \dot{q})$ ——离心力和哥氏力矩阵

$G(q)$ ——重力向量  $\tau$ ——扭矩向量

$F(t)$ ——外界扰动力矩向量

考虑以上动力学模型,为了提高机器人系统的抗干扰性和鲁棒性,引入滑模变结构控制来进行控

换矩阵

$\omega_i'$ ——角速度方向

$r_i^b$ ——关节旋转轴  $i$  至关节质心  $i$  的距离

因此,根据式(27)和式(28),可以得到关节1的惯性力主矢  $R_b^*$  和主矩  $T_b^*$

制器的设计。

针对  $n$  关节的串联机器人,传统非奇异终端滑模面<sup>[13]</sup>为(计为“NTSM”)

$$s(t) = e_1 + c e_2^{p/q} \quad (31)$$

其中  $c = \text{diag}[c_1 \cdots c_i \cdots c_n]$ ,  $c_i > 0$ ,  $p, q$  正奇数,满足:  $q < p < 2q$ , 且  $e_1 = q^d - q$  是轨迹误差,  $e_2 = \dot{q}^d - \dot{q}$  是误差的导数。

采用该滑模面进行等效滑模控制时,可以避开奇异点,但是分析其收敛时间特性,即系统误差收敛至零。

$$s(t) = e_1 + c e_2^{p/q} = 0 \rightarrow e_2 = -c^{-1} e_1^{q/p} \quad (32)$$

相应的,线性滑模的收敛特性为(LSM)

$$s(t) = \beta e_1 + e_2 = 0 \rightarrow e_2 = -\beta e_1 \quad (33)$$

其中  $\beta = \text{diag}[\beta_1 \cdots \beta_i \cdots \beta_n]$ ,  $\beta_i > 0$ , 为线性滑模面系数。

从式(32)、(33)可以看出,当系统状态在平衡

点附近( $e_1 \rightarrow 0, e_2 \rightarrow 0$ )时, 由于  $q < p < 2q$ , NTSM 的收敛速度要优于 LSM。但是, 当系统状态远离平衡点, 取滑模面系数  $\beta = c^{-1}$  时, NTSM 的收敛速度要明显低于线性滑模的指数收敛速度, 因而非奇异终端滑模消除奇异性是以失去快速收敛性为代价的。

### 3.1 控制器设计

为了改善非奇异终端滑模存在的以上问题, 提高收敛时间, 同时兼顾终端滑模控制的非奇异要求, 提出一种快速非奇异终端滑模面(FNTSM)

$$s(t) = e_1 + \beta e_1^r + c e_2^{p/q} \quad (r > 1, q < p < 2q) \quad (34)$$

当系统状态离平衡点较远时,  $\beta e_1^r$  高次项起主要作用, 可以加快其收敛速度, 当系统状态接近平衡点时, 即  $e_1 \rightarrow 0$  和  $e_2 \rightarrow 0$ , 则  $\beta e_1^r$  高次项可以忽略不计, 此时滑模面类似于非奇异终端滑模面式(31), 在这个阶段其收敛速度也近似于 NTSM。因此, 本滑模面的设计既能保证全局快速收敛性, 采用等效控制律也能保证其控制非奇异性

$$\tau = M \ddot{q}^d + C + G + Mc^{-1} \frac{q}{p} (1 + r\beta e_1^{r-1}) e_2^{2-p/q} + K_{\text{sgns}} \quad (35)$$

其中  $K_i = \max |F_i(t)| + \eta$  ( $\eta > 0$ )

$r > 1, q < p < 2q$ , 由于  $r > 1, (2 - p/q) > 0$ , 则控制律的设计从理论上保证了控制器不会存在控制奇异区域。

### 3.2 稳定性分析

选择李雅普诺夫函数为

$$V = \frac{1}{2} s(t)^T s(t) \quad (36)$$

对其求一阶导数得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s(t) \dot{s}(t) = \\ s(t) &\left[ (1 + r\beta e_1^{r-1}) e_2 + c \frac{p}{q} e_2^{p/q-1} (\ddot{q}^d - \ddot{q}) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

联立式(36)和(37), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s(t) \dot{s}(t) = \\ s(t) &\left[ (1 + r\beta e_1^{r-1}) e_2 + c \frac{p}{q} e_2^{p/q-1} (\ddot{q}^d - \ddot{q}) \right] = \\ s(t) &\left\{ (1 + r\beta e_1^{r-1}) e_2 + c \frac{p}{q} e_2^{p/q-1} \left[ \ddot{q}^d + \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{1}{M} (C + G - t - F(t)) \right] \right\} = \\ &-\frac{1}{M} \frac{p}{q} e_2^{p/q-1} s(t) (K_{\text{sgns}} + F(t)) \end{aligned} \quad (38)$$

因为  $K$  满足  $K_i = \max |F_i(t)| + \eta, \eta > 0$ , 因此式(38)中

$$s(t) (K_{\text{sgns}} + F(t)) \geq \eta |s(t)| \quad (39)$$

进一步可得

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{M} \frac{p}{q} e_2^{p/q-1} \eta |s(t)| \quad (40)$$

由于  $p, q$  均为正奇数, 有  $e_2^{p/q-1} \geq 0$ , 则式(40)可写作

$$\dot{V} \leq -\eta' |s(t)| \leq 0 \quad (41)$$

其中

$$\eta' = \frac{1}{M} \frac{p}{q} e_2^{p/q-1} \eta \geq 0$$

这时分以下几种情况考虑:

(1) 当  $s(t) \neq 0$  和  $e_2 \neq 0$  时,  $\dot{V} < 0$ , 有李雅普诺夫稳定性判据可知, 系统状态渐近收敛至滑模面  $s(t) = 0$ 。

(2) 当  $s(t) = 0$  时,  $\dot{V} = 0$ , 说明系统已经到达滑模面, 根据 LaSalle 不变性原理可知, 系统将会渐近收敛至平衡点( $e_1 = 0$  且  $e_2 = 0$ )。

(3) 当  $e_2 = 0$  时,  $\dot{V} = 0$ , 可以证明  $e_2 = 0, e_1 \neq 0$  并不是一个稳定的状态,  $\dot{V} = 0$  不可能一直保持。把控制律式(37)代入系统式(40)中得

$$\dot{e}_2 = -c^{-1} \frac{q}{p} (1 + r\beta e_1^{r-1}) e_2^{2-p/q} - \frac{K_{\text{sgns}}(s) - F(t)}{M} \quad (42)$$

图2为系统状态的相平面轨迹, 因此当  $e_2 = 0$ ,  $s(t) > 0$  时, 则由式(34)得  $e_1 > 0$ , 由式(40)得  $\dot{e}_2 < 0$ , 则在相平面的右半平面  $e_1$  轴附近存在一个极小值  $\delta > 0$ , 使得当  $e_2 \in [-\delta, \delta]$  时, 由于  $\dot{e}_2 < 0$ , 系统状态将远离  $e_1$  轴向第二象限的滑模面  $s(t) = 0$  运动; 同理当  $e_2 = 0, s(t) < 0$  时, 则由式(34)得  $e_1 < 0$ , 由式(42)得  $\dot{e}_2 > 0$ , 则在相平面的左半平面  $e_1$  轴附近存在一个极小值  $\delta > 0$ , 使得当  $e_2 \in [-\delta, \delta]$  时, 由于  $\dot{e}_2 > 0$ , 系统状态将远离  $e_1$  轴向第四象限的滑模面  $s(t) = 0$  运动。即在  $e_2 = 0$  附近,  $\dot{V} = 0$  不可能一直保持。

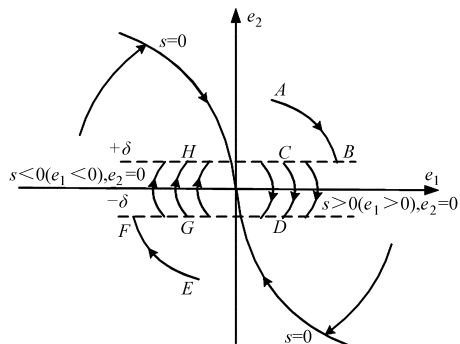


图2 系统相平面轨迹

Fig. 2 Phase-trajectory analysis of system

综上所述,  $\dot{V} = s(t) \dot{s}(t)$  最终满足滑模到达条件  $s(t) \dot{s}(t) < 0$ , 系统将在有限时间到达并保持非奇异终端滑模状态  $s(t) = 0$ , 此后系统状态  $e_1, e_2$  将有限

时间内收敛到零,定理得证。

## 4 实验结果

为了验证本控制算法,在“钱江一号”串联机器人的2、3关节上进行轨迹跟踪实验,其余关节锁死。

动力学模型方程为

$$\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} G_1(q) \\ G_2(q) \end{bmatrix} = \tau \quad (43)$$

其中

$$\begin{aligned} M_{11}(q) &= m_1 r_1^2 + m_2 [l_1^2 + r_2^2 + 2l_1 r_2 \cos q_2] + I_1 + I_2 \\ M_{22}(q) &= m_2 r_2^2 + I_2 \\ M_{12}(q) &= M_{21}(q) = m_2 [r_2^2 + l_1 r_2 \cos q_2] + I_2 \\ C_{11}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 r_2 \dot{q}_2 \sin q_2 \\ C_{12}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 r_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ C_{21}(q, \dot{q}) &= m_2 l_1 r_2 \dot{q}_1 \sin q_2 \quad C_{22}(q, \dot{q}) = 0 \\ G_1(q) &= (m_1 r_1 + m_2 l_1) g \sin q_1 + m_2 g r_2 \sin(q_1 + q_2) \\ G_2(q) &= m_2 g r_2 \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

相关模型参数为<sup>[19]</sup>:  $m_1 = 60 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 45 \text{ kg}$ ,  $l_1 = 0.55 \text{ m}$ ,  $l_2 = 0.59 \text{ m}$ ,  $r_1 = 0.31 \text{ m}$ ,  $r_2 = 0.35 \text{ m}$ ,  $I_1 = 1.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $I_2 = 1.45 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

2个关节的参考跟踪轨迹为

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} 10[0.5(1 - e^{-t}) + \sin(5t)] \\ 10[0.5(1 - e^{-t}) + (1 - \cos(5t))] \end{bmatrix} \quad (44)$$

采用式(35)的控制律,其中控制参数为  $\beta = \text{diag}\{22 \ 15\}$ ,  $c = \text{diag}\{55 \ 58\}$ ,  $p = 5$ ,  $q = 3$ ,  $r = 3$ ,  $K = \text{diag}\{10 \ 10\}$ 。

同时,为了对比验证本文快速非奇异终端滑模控制的有效性和快速性,与文献[13]中的非奇异终端控制律作对比,为保证合理性,相应的控制器参数设为相同。对比实验得到的结果如图3~4所示。

从图3结果可以看出,2个对比算法最终都能达到滑模面,且都能在有限时间内收敛于平衡点。但从图4误差图可以看出,在滑模面相应系数取值相同时,本文提出的快速非奇异滑模控制(FNTSM)到达平衡点所用时间比常规非奇异终端滑模控制(NTSM)所用时间明显缩短,即在系统状态初始状态误差较大时,在图4关节3跟踪误差曲线的0~1.5 s,即远离平衡点时,本文的控制律相比NTSM具有较快的收敛速度,但是在接近系统平衡点,系统误差较小的1.5~2 s时,两侧的收敛速度相当。为了量化考核2个控制算法的收敛时间,引入以下的性能指标参数:

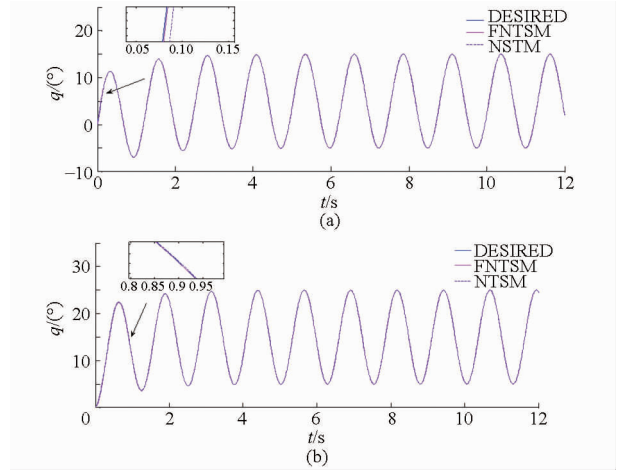


图3 轨迹跟踪曲线

Fig. 3 Trajectory tracking of 2-DOF

(a) 关节2 (b) 关节3

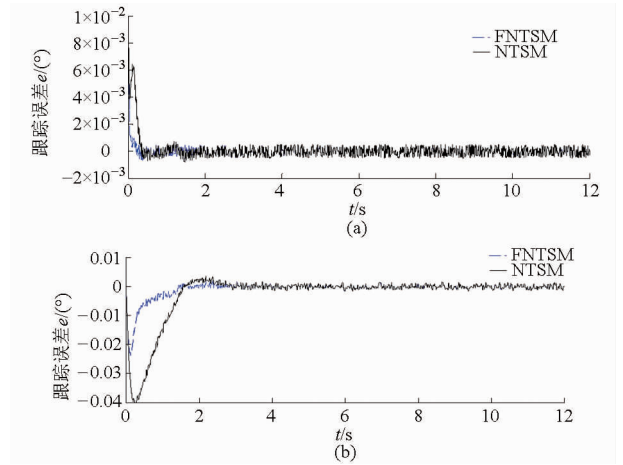


图4 轨迹跟踪误差曲线

Fig. 4 Trajectory tracking errors of 2-DOF

(a) 关节2 (b) 关节3

(1)  $L_2[e] = \sqrt{\frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} |e|^2 dt}$ , 平均跟踪误差,是跟踪误差的  $L_2$  范数,衡量在整个控制过程中的平均跟踪精度,其中  $T_f$  为运行时间。

(2)  $e_M = \max_t \{|e(t)|\}$ , 最大跟踪误差,衡量系统的瞬时性能。

(3) 调整稳定时间,零时刻开始到跟踪误差绝对值稳定在一定区间时的时间长度。

则实验结果得性能指标如表1所示。

表1 控制性能比较

Tab. 1 Comparison of performance

	控制器	$L_2[e]/(^{\circ})$	$e_M/(^{\circ})$	$t/s$
关节2	NTSM	0.000 5	0.006 3	2.011
	FNTSM	0.000 2	0.003 3	0.525
关节3	NTSM	0.010 2	0.040	3.321
	FNTSM	0.004 4	0.023	1.823

从表1中可以看出,FNTSM在2个关节的平均跟踪误差比NTSM的平均跟踪误差分别降低了61.5%和56.8%,且收敛调整稳定时间分别是0.525 s和1.823 s,分别比NTSM降低了73.9%和45.1%,从关节3可以明显看出,在起始的0~1.5 s内,FNTSM的收敛速度由于快速收敛项 $\beta e_1^r$ 的存在,其前期收敛时间比NTSM少很多,但是在1.5~2 s的调整阶段,两则的收敛速度相当,且NTSM存在一定的振荡行为,误差收敛较慢。由此实验结果表明本文的FNTSM算法明显地提升了控制性能,加快了响应速度,能更快更稳地跟踪参考轨迹。

图5表明了本算法(FNTSM)的2关节扭矩控制输入,可以看出在输出换向时产生了一些抖振现象,这是因为滑模控制的切换函数 $K\text{sgn}(s)$ 造成的,为了提高系统的鲁棒性,固定增益 $K$ 通常需比不确定扰动项的估计上限大,因此,减少抖振也是滑模控制中的一个难点和研究热点<sup>[20-21]</sup>。

## 5 结束语

结合旋量理论推导了基于指数积(POE)的串联机器人雅可比矩阵,并结合到凯恩方程中的偏速度概念,定义了相应的主动力旋量、惯性力旋量、偏速度旋量、广义主动力及广义惯性力等参数,在“钱江一号”串联机器人上进行实例建模计算验证,通过合适的坐标系及中间参考点的选择简化了建模过程,明确几何意义,提高计算效率及便利性。针对

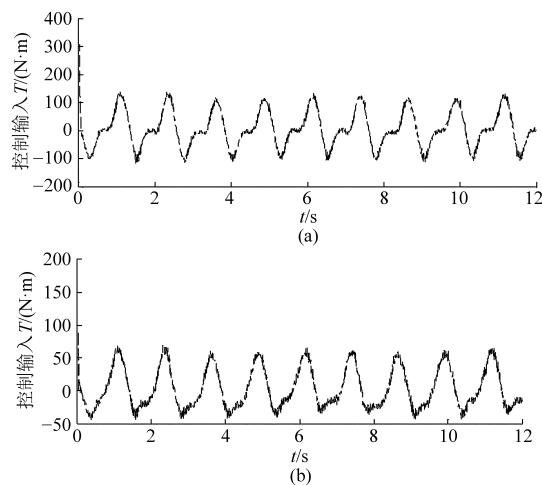


图5 控制输入

Fig. 5 Control inputs of 2-DOF

(a) 关节2 (b) 关节3

具有不确定性及干扰的机器人系统,通过理论分析比较了线性滑模和非奇异终端滑模控制器的时间收敛特性,在此基础上设计一种全局快速非奇异终端滑模控制器,通过在滑模面上引入系统状态高次项来提高收敛速度,使系统能在较短时间内达到平衡点,且同时保证控制输入非奇异特性,并通过李雅普诺夫方法分析了系统的全局稳定性。最后通过在“钱江一号”串联机器人上的对比实验验证了本算法的有效性,体现了很好的收敛特性及控制精度,表明该方法对有界模型误差和外部干扰具有较好鲁棒性。

## 参 考 文 献

- 1 张良安,马寅东,单家正,等. 4自由度含局部闭链式码垛机器人动力学优化设计[J]. 农业机械学报, 2013, 44(11): 336-341.  
Zhang Liang'an, Ma Yindong, Shan Jiazheng, et al. Optimal dynamic design of 4-DOF palletizing robot with closed-chain[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(11): 336-341. (in Chinese)
- 2 刘云平,吴洪涛. 基于伪速度的动力学建模方法[J]. 华中科技大学学报:自然科学版, 2012, 39(12): 25-28.  
Liu Yunping, Wu Hongtao. Dynamics model method based on quasi-velocities[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2012, 39(12): 25-28. (in Chinese)
- 3 丁希仑,李可佳,徐坤. 基于旋量理论的弹性关节六腿机器人动力学分析[J]. 中南大学学报:自然科学版, 2011, 42(增刊1): 589-595.  
Ding Xilun, Li Kejia, Xu Kun. Dynamics analysis of sixlegged robot with elastic joints using screw theory [J]. Journal of Central South University: Natural Science Edition, 2011, 42(Supp. 1): 589-595. (in Chinese)
- 4 Rosillo N, Valera A, Benimeli F, et al. Real-time solving of dynamic problem in industrial robots[J]. Industrial Robot: An International Journal, 2011, 38(2): 119-129.
- 5 Sohl G A, Bobrow J E. A recursive multibody dynamics and sensitivity algorithm for branched kinematic chains[J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2001, 123(3): 391-399.
- 6 You W, Kong M X, Sun L N, et al. Optimal design of dynamic and control performance for planar manipulator[J]. Journal of Central South University, 2012, 19(1): 108-116.
- 7 Aslanov V, Kruglov G, Yudin V. Newton-Euler equations of multibody systems with changing structures for space applications [J]. Acta Astronautica, 2011, 68(11): 2080-2087.
- 8 Das M T, Canan Dülger L. Mathematical modelling, simulation and experimental verification of a scara robot[J]. Simulation Modelling Practice and Theory, 2005, 13(3): 257-271.



- 9 Dwivedy S K, Eberhard P. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(7): 749-777.
- 10 Bajodah A H, Hodges D H, Chen Y H. New form of Kane's equations of motion for constrained systems[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 26(1): 79-88.
- 11 黄晓华, 王兴成. 机器人动力学的李群表示及其应用[J]. 中国机械工程, 2007, 18(2): 201-205.  
Huang Xiaohua, Wang Xingcheng. Lie group representation of robot dynamics and its applications [J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(2): 201-205. (in Chinese)
- 12 陈庆诚, 朱世强, 王宣银, 等. 基于旋量理论的串联机器人逆解子问题求解算法[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2014, 48(1): 8-14.  
Chen Qingcheng, Zhu Shiqiang, Wang Xuanyin, et al. Inverse kinematics sub-problem solution algorithm for serial robot based on screw theory[J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2014, 48(1): 8-14. (in Chinese)
- 13 Feng Y, Yu X, Man Z. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators[J]. Automatica, 2002, 38(12): 2159-2167.
- 14 张达科, 胡跃明, 胡战虎. 低抖振非奇异终端滑模控制[J]. 广东工业大学学报, 2007, 24(3): 32-36.  
Zhang Dake, Hu Yueming, Hu Zhanhu. Sliding mode control of low chattering non-singular terminal[J]. Journal of Guangdong University of Technology, 2007, 24(3): 32-36. (in Chinese)
- 15 冯勇, 鲍晟, 余星火. 用于刚性机械手的无抖振快速终端滑模控制 [J]. 控制与决策, 2002, 17(3): 381-384.  
Feng Yong, Bao Sheng, Yu Xinghuo. Chattering free fast terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators[J]. Control and Decision, 2002, 17(3): 381-384. (in Chinese)
- 16 Selig J. Geometrical foundations of robotics[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co., Inc., 2000.
- 17 于靖军. 机器人机构学的数学基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.
- 18 Murray R M, Li Z, Sastry S S. A mathematical introduction to robotic manipulation[M]. Boca Raton, FL: CRC, 1994.
- 19 Wu W, Zhu S, Wang X, et al. Closed-loop dynamic parameter identification of robot manipulators using modified Fourier series [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2012, 9: DOI 10.5772/45818.
- 20 Roopaei M, Zolghadri J M. Chattering-free fuzzy sliding mode control in MIMO uncertain systems[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 71(10): 4430-4437.
- 21 Zhang X, Liu X, Zhu Q. Adaptive chatter free sliding mode control for a class of uncertain chaotic systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 232: 431-435.

~~~~~

(上接第 293 页)

- 15 罗国良, 张付军, 赵振峰, 等. 液压自由活塞柴油机缸内气体流动数值仿真[J]. 农业机械学报, 2014, 45(2): 47-52.  
Luo Guoliang, Zhang Fujun, Zhao Zhenfeng, et al. Numerical simulation on in-cylinder gas motion of hydraulic free piston diesel engine[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(2): 47-52. (in Chinese)
- 16 周长海, 孙琳, 任露泉, 等. 黄缘真龙虱与臭蛭螂体壁仿生生物学形态结构的比较研究[J]. 华中农业大学学报, 2005(增刊 1): 9-13.  
Zhou Changhai, Sun Lin, Ren Luquan, et al. Comparative studies on the surface bionic morphology and structure between *Cybister bengalensis* and *Copris ochus*[J]. Journal of Huazhong Agricultural University, 2005(Supp. 1): 9-13. (in Chinese)
- 17 谷云庆, 赵刚, 刘浩, 等. 气动灭火炮弹体橡胶圈仿生凹坑表面减阻特性[J]. 吉林大学学报: 工学版, 2013, 43(4): 983-990.  
Gu Yunqing, Zhao Gang, Liu Hao, et al. Characteristics of drag reduction of bionic dimpled surface of shell rubber ring of aerodynamic extinguishing cannon [J]. Journal of Jilin University: Engineering and Technology Edition, 2013, 43(4): 983-990. (in Chinese)
- 18 任露泉. 试验设计及其优化[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- 19 徐照平, 常思勤, 黄玲. 四冲程自由活塞发动机仿真与实验[J]. 农业机械学报, 2012, 43(7): 1-6.  
Xu Zhaoping, Chang Siqin, Huang Ling. Simulation and test of four-stroke free-piston engine[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(7): 1-6. (in Chinese)
- 20 Dhar A, Agarwal A K, Saxena V. Measurement of dynamic lubricating oil film thickness between piston ring and liner in a motored engine[J]. Sensors and Actuators A, 2009, 149(1): 7-15.