

空间并联机构运动学分析的共形几何代数方法*

张忠海^{1,2} 李端玲¹

(1. 北京邮电大学自动化学院, 北京 100876; 2. 北京航天测控技术有限公司, 北京 100041)

摘要: 提出了空间并联机构运动学分析的集几何表示和计算为一体的共形几何代数方法。以动平台上的坐标原点描述动平台的位置,以欧拉角描述动平台的姿态,给出了动平台上任意一点在定坐标系中位置的共形几何代数表达式,进而提出了一种建立空间并联机构运动学方程的数学建模方法。根据所建立的运动学方程,可进行空间并联机构的运动学正解和运动学反解分析。通过一种4-UPU空间并联机构运动学分析,进一步阐述了所提出的共形几何代数运动学分析方法,通过数值实例验证了所提出方法的正确性和有效性。

关键词: 空间并联机构 运动学分析 运动学正解 运动学反解 共形几何代数

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2015)04-0325-06

Conformal Geometric Algebra Method for Kinematics Analysis of Spatial Parallel Mechanisms

Zhang Zhonghai^{1,2} Li Duanling¹

(1. School of Automation, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China

2. Beijing Aerospace Measurement & Control Technology Co., Ltd., Beijing 100041, China)

Abstract: As a new geometric representation and calculation system, the conformal geometric algebra has been recognized as a research hotspot in recent years. But as a new branch of algebra, the conformal geometric algebra is still in the process of development, especially its application in theory of mechanism is relatively deficient at present. The new geometric algebra method for the kinematics analysis of spatial parallel mechanisms was studied and a conformal geometric algebra method integrating geometric representation and calculation was proposed. With the origin of coordinates on the moving platform describing its position and Euler angles describing its orientation, the conformal geometric algebra expression of an arbitrary point's location on the moving platform in the fixed coordinate system was presented. Then a method to establish kinematics equations for the kinematics analysis of spatial parallel mechanisms was proposed to conduct the forward and inverse kinematics analysis of spatial parallel mechanisms. A 4-UPU parallel mechanism was taken as an example to illustrate the proposed conformal geometric algebra method for kinematics analysis of spatial parallel mechanisms. And a numerical example was given to verify correctness and effectiveness of the proposed approach. The proposed conformal geometric algebra method was a new method for the kinematics analysis of spatial parallel mechanisms by integrating geometric representation and computation.

Key words: Spatial parallel mechanism Kinematics analysis Forward kinematics Inverse kinematics Conformal geometric algebra

收稿日期: 2014-05-18 修回日期: 2014-10-18

* 国家自然科学基金资助项目(51375058)、新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-12-0796)和高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20120005110008)

作者简介: 张忠海, 博士生, 北京航天测控技术有限公司高级工程师, 主要从事机器人与机构学研究, E-mail: zhzhonghai@sina.com

通讯作者: 李端玲, 教授, 博士生导师, 主要从事机构学与机器人学研究, E-mail: liduanling@163.com

引言

共形几何代数 (Conformal geometric algebra, CGA),最初被称作广义齐次坐标^[1],是一个新的几何表示和计算系统^[2]。共形几何代数是五维向量空间的几何代数,实现了对几何体的直接计算,它不仅拥有用于几何建模的协变量代数,而且拥有用于几何计算的高级不变量算法^[3]。共形几何代数在计算机视觉与计算机图形学^[4-5]、刚体运动表示^[6]、机器人视觉^[7-9]等方面已经有了一定应用,在机构学的研究中共形几何代数同样具有优势并已经取得了一定成果^[10-13]。共形几何代数为机构运动学分析中几何问题的解决提供了新的数学工具,但是共形几何代数仍处在发展之中^[14],目前在机构学中的应用还比较少,很多问题还有待深入研究。机构运动学中几何学有关的问题,采用共形几何代数方法理论上可行,对其进行深入研究是十分必要的^[15]。

并联机构是机器人研究的一个热点^[16-18],特别是并联机构运动学分析方法受到学者的广泛关注。空间并联机构运动学分析,建立运动学方程可采用齐次变换矩阵方法^[19],在运动学正解和反解过程中需要采用矩阵运算和代数运算。由于共形几何代数集几何表示和计算为一体,这为研究空间并联机构运动学分析方法提供了新思路。对于空间并联机构运动学分析,本文以动平台上坐标原点描述动平台的位置,以欧拉角描述动平台的姿态,给出动平台上任意一点在定坐标系中位置的共形几何代数表达式,并提出建立空间并联机构运动学方程的共形几何代数建模方法。通过对一种 4-UPU 空间并联机构运动学分析,阐述所提出的共形几何代数方法。通过共形几何代数方法,建立这种 4-UPU 空间并联机构的运动学方程,根据运动学方程对其进行运动学正解和反解分析,并通过数值实例验证所提出方法的正确性和有效性。

1 空间并联机构运动学分析的共形几何代数方法

在共形几何代数中,几何表示和运算法则如下: $e_1、e_2、e_3$ 表示三维欧氏空间的一维正交基向量,共形几何代数的两个附加正交基矢量为 $e_+、e_-$; $e_{12}、e_{23}、e_{31}$ 表示三维欧氏空间的二元正交基向量;五维共形几何代数的 2 个 null 基 $e_0、e_\infty$ 可用 $e_+、e_-$ 表示,也与 $e_1、e_2、e_3$ 正交, e_0 表示三维原点、 e_∞ 表示无穷远点。

$$e_{12}=e_1\wedge e_2=e_1e_2$$

(1)

$$e_{23}=e_2\wedge e_3=e_2e_3$$

(2)

$$e_{31}=e_3\wedge e_1=e_3e_1$$

(3)

$$e_1^2=e_2^2=e_3^2=1$$

(4)

$$\begin{cases} e_+^2=1 \\ e_-^2=-1 \end{cases}$$

(5)

$$e_0=\frac{1}{2}(e_--e_+)$$

(6)

$$e_\infty=e_++e_-$$

(7)

$$e_0^2=e_\infty^2=0$$

(8)

$$e_\infty\cdot e_0=-1$$

(9)

$$\begin{cases} e_0\cdot e_1=0 \\ e_0\cdot e_2=0 \\ e_0\cdot e_3=0 \end{cases}$$

(10)

$$\begin{cases} e_\infty\cdot e_1=0 \\ e_\infty\cdot e_2=0 \\ e_\infty\cdot e_3=0 \end{cases}$$

(11)

$$e_0e_\infty=e_0\cdot e_\infty+e_0\wedge e_\infty=-1+e_0\wedge e_\infty$$

(12)

$$e_\infty e_0=e_\infty\cdot e_0+e_\infty\wedge e_0=-1+e_\infty\wedge e_0=-1-e_0\wedge e_\infty$$

(13)

对于坐标系 $\{oxyz\}$,其中 $x、y、z$ 为定坐标系的 3 个坐标轴, o 为定坐标系的坐标原点,定义各坐标平面的共形几何代数表示如下

$$\pi_{yoz}=e_1$$

(14)

$$\pi_{zox}=e_2$$

(15)

$$\pi_{xoy}=e_3$$

(16)

定义各坐标轴的共形几何代数表示如下

$$x=e_2\wedge e_3=e_{23}$$

(17)

$$y=e_3\wedge e_1=e_{31}$$

(18)

$$z=e_1\wedge e_2=e_{12}$$

(19)

定平台上固联的定坐标系设为 $\{oxyz\}$,动平台上固联的动坐标系设为 $\{quvw\}$ 。以 (x_q,y_q,z_q) 表示动平台的位置,即动坐标系的坐标原点在参考坐标系(定坐标系)中的坐标,以动平台的欧拉角 (α,β,γ) 表示动平台的姿态,则动平台的位姿表示为 $(x_q,y_q,z_q,\alpha,\beta,\gamma)$ 。欧拉角 (α,β,γ) 描述为: $\{quvw\}$ 的初始方位与定坐标系 $\{oxyz\}$ 重合,旋转相对于运动坐标系 $\{quvw\}$ 进行,首先将 $\{quvw\}$ 绕 w 轴转 α 角,然后绕 v 轴转 β 角,最后绕 u 轴转 γ 角。动平台上的任意一点 p 在两个坐标系中的位置关系用共形几何代数表示为

$${}^op=T{}^wr_\alpha{}^vr_\beta{}^ur_\gamma{}^qp{}^u\tilde{r}_\gamma{}^v\tilde{r}_\beta{}^w\tilde{r}_\alpha\tilde{T}$$

(20)

其中

$${}^wr_\alpha=\cos\frac{\alpha}{2}-e_{12}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$${}^u\tilde{r}_\alpha=\cos\frac{\alpha}{2}+e_{12}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$${}^v r_\beta = \cos \frac{\beta}{2} - e_{31} \sin \frac{\beta}{2}$$

$${}^v \tilde{r}_\beta = \cos \frac{\beta}{2} + e_{31} \sin \frac{\beta}{2}$$

$${}^u r_\gamma = \cos \frac{\gamma}{2} - e_{23} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$${}^u \tilde{r}_\gamma = \cos \frac{\gamma}{2} + e_{23} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$T = 1 - \frac{1}{2} (x_q e_1 + y_q e_2 + z_q e_3) e_\infty$$

$$\tilde{T} = 1 + \frac{1}{2} (x_q e_1 + y_q e_2 + z_q e_3) e_\infty$$

${}^q p$ 是 p 点在动坐标系 $\{quvw\}$ 中的共形几何代数表示, ${}^o p$ 是 p 点在定坐标系 $\{oxyz\}$ 中的共形几何代数表示。

空间并联机构运动学分析的共形几何代数方法, 首先是建立并联机构的运动学方程, 在此基础上进行机构的正运动学和逆运动学分析, 具体方法如下。

选取并联机构动平台与支链连接的关键点。一方面, 由于关键点也是动平台上的一点, 依据式(20)的共形几何代数变换公式, 可以建立以动平台位姿变量为变量的关键点位置表达式; 另一方面, 根据机构的结构尺寸, 可以建立以关节变量为变量的关键点位置表达式。结合上述两方面, 建立包含关节变量和位姿变量的并联机构运动学方程, 然后根据运动学方程就可进行并联机构的正运动学和逆运动学分析。

并联机构的正运动学分析, 即运动学正解分析, 是已知机构的结构参数和输入, 分析求解并联机构动平台的位置 (x_q, y_q, z_q) 和姿态 (α, β, γ) 。步骤为: 首先, 分析机构的自由度并确定输入; 然后, 把能够确定的机构结构参数和输入变量数值代入到运动学方程中; 最后, 求解运动学方程组, 从而确定并联机构动平台的位置和姿态参数数值。

并联机构的逆运动学分析, 即运动学反解分析, 是已知机构的结构尺寸和位置 (x_q, y_q, z_q) 及姿态欧拉角 (α, β, γ) , 反解分析并联机构的输入。步骤为: 首先, 分析机构的自由度并确定输入; 然后, 将能够确定的机构结构参数和位姿参数数值代入到运动学方程中; 最后, 求解运动学方程组, 从而确定并联机构的输入变量值。

下面以 4-UPU 空间并联机构为例, 详细阐述空间并联机构运动学分析的共形几何代数方法。

2 4-UPU 空间并联机构结构与运动特性

图 1 所示为一种 4-UPU 空间并联机构, 定平台

(下平台)和动平台(上平台)均为矩形平板结构, 与定平台和动平台相连接的运动副分布在矩形的顶点上, 且 U 副的中心分别位于定平台和动平台的平面内, 转动轴线平行或垂直于定平台或动平台。建立图 1 所示的坐标系, 固定的参考坐标系的坐标原点 o 在定平台的几何中心点, x 轴和 y 轴分别垂直或平行于定平台的边线。动坐标系的坐标原点 q 在动平台的几何中心点, u 轴和 v 轴分别垂直或平行于动平台的边线。 $A_n B_n$ 的长度 L_n 由移动副 P 所控制。 A_n 点在参考坐标系中的坐标为 $(x_{A_n}, y_{A_n}, 0)$, B_n 点在参考坐标系中的坐标为 $(x_{B_n}, y_{B_n}, z_{B_n})$, B_n 点在动坐标系中的坐标为 $(u_{B_n}, v_{B_n}, 0)$, 其中 n 表示第 n 个支链。

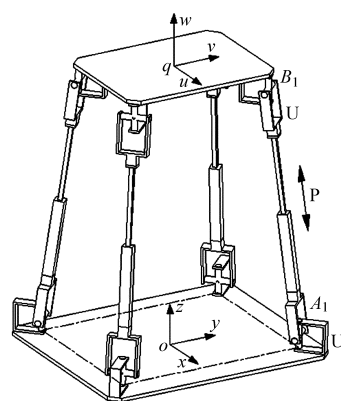


图 1 4-UPU 并联机构

Fig. 1 4-UPU parallel mechanism

垂直于定平台的转动轴单位方向向量表示为

$$\mathbf{V} = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (21)$$

若各运动副中心的坐标已知, 则 $A_i B_i$ 的方向向量为

$$\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i = [x_{B_i} - x_{A_i} \quad y_{B_i} - y_{A_i} \quad z_{B_i} - z_{A_i}]^T \quad (22)$$

将式(22)转换为单位方向向量, 表示为

$$\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i^o = [a_i \quad b_i \quad c_i]^T \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad a_i &= \frac{x_{B_i} - x_{A_i}}{\sqrt{(x_{B_i} - x_{A_i})^2 + (y_{B_i} - y_{A_i})^2 + (z_{B_i} - z_{A_i})^2}} \\ b_i &= \frac{y_{B_i} - y_{A_i}}{\sqrt{(x_{B_i} - x_{A_i})^2 + (y_{B_i} - y_{A_i})^2 + (z_{B_i} - z_{A_i})^2}} \\ c_i &= \frac{z_{B_i} - z_{A_i}}{\sqrt{(x_{B_i} - x_{A_i})^2 + (y_{B_i} - y_{A_i})^2 + (z_{B_i} - z_{A_i})^2}} \end{aligned}$$

各支链中平行于定平台的转动轴的方向向量计算为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \mathbf{V} \times \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i = \\ &[y_{A_i} - y_{B_i} \quad x_{B_i} - x_{A_i} \quad 0]^T \end{aligned} \quad (24)$$

将式(24)转换为单位方向向量, 表示为

$$\mathbf{P}_i^o = [l_i \quad m_i \quad 0]^T \quad (25)$$

$$\text{其中} \quad l_i = \frac{y_{A_i} - y_{B_i}}{\sqrt{(x_{B_i} - x_{A_i})^2 + (y_{A_i} - y_{B_i})^2}}$$

$$m_i = \frac{x_{Bi} - x_{Ai}}{\sqrt{(x_{Bi} - x_{Ai})^2 + (y_{Ai} - y_{Bi})^2}}$$

首先取第 1 个支链为研究对象,建立并联机构各运动副的运动旋量如下

$$\mathcal{S}_1 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad y_{A1} \quad -x_{A1} \quad 0]^T \quad (26)$$

$$\mathcal{S}_2 = [l_1 \quad m_1 \quad 0 \quad -z_{A1}m_1 \quad z_{A1}l_1 \quad x_{A1}m_1 - y_{A1}l_1]^T \quad (27)$$

$$\mathcal{S}_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad a_i \quad b_i \quad c_i]^T \quad (28)$$

$$\mathcal{S}_4 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad y_{B1} \quad -x_{B1} \quad 0]^T \quad (29)$$

$$\mathcal{S}_5 = [l_1 \quad m_1 \quad 0 \quad -z_{B1}m_1 \quad z_{B1}l_1 \quad x_{B1}m_1 - y_{B1}l_1]^T \quad (30)$$

建立运动螺旋矩阵为

$$\mathcal{S} = [\mathcal{S}_1^T \quad \mathcal{S}_2^T \quad \mathcal{S}_3^T \quad \mathcal{S}_4^T \quad \mathcal{S}_5^T]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & y_{A1} & -x_{A1} & 0 \\ l_1 & m_1 & 0 & -z_{A1}m_1 & z_{A1}l_1 & x_{A1}m_1 - y_{A1}l_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_{B1} & -x_{B1} & 0 \\ l_1 & m_1 & 0 & -z_{B1}m_1 & z_{B1}l_1 & x_{B1}m_1 - y_{B1}l_1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

为了求约束反螺旋,建立齐次线性方程组为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & y_{A1} & -x_{A1} & 0 \\ l_1 & m_1 & 0 & -z_{A1}m_1 & z_{A1}l_1 & x_{A1}m_1 - y_{A1}l_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_{B1} & -x_{B1} & 0 \\ l_1 & m_1 & 0 & -z_{B1}m_1 & z_{B1}l_1 & x_{B1}m_1 - y_{B1}l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (32)$$

根据齐次线性方程组式(32),求得其基础解系

$$[x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \text{ 为 } \left[-\frac{m_1}{l_1} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right]^T。$$

同理可求出其他支链运动螺旋基础解系,通过基础解系求出在初始构态时各支链的约束反螺旋系为

$$\mathcal{S}_i' = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{m_i}{l_i} \quad 1 \quad 0]^T \quad (i=1,2,3,4) \quad (33)$$

式(33)构成了动平台的约束螺旋系,约束了动平台绕 x 轴和绕 y 轴的转动运动,动平台的运动螺旋系为

$$\mathcal{S}_1^m = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (34)$$

$$\mathcal{S}_2^m = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (35)$$

$$\mathcal{S}_3^m = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T \quad (36)$$

$$\mathcal{S}_4^m = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (37)$$

动平台在发生连续运动后仍然平行于定平台,各运动副的运动旋量不变,所以动平台具有绕 z 轴转动

和分别沿 3 个坐标轴移动的 4 个自由度。

3 4-UPU 空间并联机构运动学分析

图 1 所示一种 4-UPU 空间并联机构具有 4 个自由度,即动平台具有绕 z 轴转动和分别沿 3 个坐标轴移动的 4 个自由度。将输入运动副选取为 P 副,输入关节变量为 $L_1、L_2、L_3、L_4$,若初始姿态设为 $(0,0,0)$,则运动中动平台的位置为 (x_q,y_q,z_q) ,姿态为 $(\alpha,0,0)$ 。

取 B_n 点为建立运动学方程的关键点,首先建立以动平台位姿变量为方程变量的关键点位置表达式。根据式(20)的共形几何代数变换公式,建立 B_n 的位置表达式为

$${}^oB_n = T {}^w r_\alpha {}^q B_n {}^w \tilde{r}_\alpha \tilde{T} \quad (38)$$

B_n 点在坐标系 $\{quvw\}$ 中的共形几何代数表示为

$${}^q B_n = u_{Bn}e_1 + v_{Bn}e_2 + w_{Bn}e_3 + \frac{1}{2}(u_{Bn}^2 + v_{Bn}^2 + w_{Bn}^2)e_\infty + e_0 \quad (39)$$

动坐标系 $\{quvw\}$ 的坐标原点 q 在固定的参考坐标系 $\{oxyz\}$ 中的坐标为 ${}^oq(x_q,y_q,z_q)$,则

$$T = 1 - \frac{1}{2}(x_qe_1 + y_qe_2 + z_qe_3)e_\infty \quad (40)$$

$$\tilde{T} = 1 + \frac{1}{2}(x_qe_1 + y_qe_2 + z_qe_3)e_\infty \quad (41)$$

根据前文所述机构的运动特性,该机构除移动自由度外,只有 1 个绕 z 轴旋转的转动自由度,所以

$${}^w r_\alpha = \cos \frac{\alpha}{2} - e_{12} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (42)$$

$${}^w \tilde{r}_\alpha = \cos \frac{\alpha}{2} + e_{12} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (43)$$

将式(39)~(43)代入式(38)中,可得出 B_n 点在固定的参考坐标系 $\{oxyz\}$ 中的共形几何代数表达式,即位姿表达式为

$$\begin{aligned} {}^oB_n = & \left[1 - \frac{1}{2}(x_qe_1 + y_qe_2 + z_qe_3)e_\infty\right] \left(\cos \frac{\alpha}{2} - e_{12} \sin \frac{\alpha}{2}\right) \left[u_{Bn}e_1 + v_{Bn}e_2 + w_{Bn}e_3 + \frac{1}{2}(u_{Bn}^2 + v_{Bn}^2 + w_{Bn}^2)e_\infty + e_0\right] \\ & \left(\cos \frac{\alpha}{2} + e_{12} \sin \frac{\alpha}{2}\right) \left[1 + \frac{1}{2}(x_qe_1 + y_qe_2 + z_qe_3)e_\infty\right] = (u_{Bn} \cos \alpha - v_{Bn} \sin \alpha + x_q)e_1 + (u_{Bn} \sin \alpha + v_{Bn} \cos \alpha + y_q)e_2 + z_qe_3 + \frac{1}{2}[(u_{Bn} \cos \alpha - v_{Bn} \sin \alpha + x_q)^2 + (u_{Bn} \sin \alpha + v_{Bn} \cos \alpha + y_q)^2 + z_q^2]e_\infty + e_0 \end{aligned} \quad (44)$$

A_n 点在固定的参考坐标系 $\{oxyz\}$ 中的共形几何代数表达式为

$$\begin{aligned} {}^oA_n &= x_{An}e_1 + y_{An}e_2 + z_{An}e_3 + \\ &\frac{1}{2}(x_{An}^2 + y_{An}^2 + z_{An}^2)e_\infty + e_0 \end{aligned} \tag{45}$$

根据这个并联机构的结构,通过共形几何代数建立的结构表达式为

$$L_n^2 = -2 {}^oA_n \cdot {}^oB_n \tag{46}$$

根据式(44)~(46),建立运动学方程为

$$\begin{aligned} L_1^2 &= -2 \left[x_{A1}(u_{B1}\cos\alpha - v_{B1}\sin\alpha + x_q) + \right. \\ &\quad y_{A1}(u_{B1}\sin\alpha + v_{B1}\cos\alpha + y_q) + z_{A1}z_q - \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(x_{A1}^2 + y_{A1}^2 + z_{A1}^2) - \frac{1}{2}(u_{B1}\cos\alpha - v_{B1}\sin\alpha + x_q)^2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(u_{B1}\sin\alpha + v_{B1}\cos\alpha + y_q)^2 - \frac{1}{2}z_q^2 \right] \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} L_2^2 &= -2 \left[x_{A2}(u_{B2}\cos\alpha - v_{B2}\sin\alpha + x_q) + \right. \\ &\quad y_{A2}(u_{B2}\sin\alpha + v_{B2}\cos\alpha + y_q) + z_{A2}z_q - \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(x_{A2}^2 + y_{A2}^2 + z_{A2}^2) - \frac{1}{2}(u_{B2}\cos\alpha - v_{B2}\sin\alpha + \right. \\ &\quad \left. x_q)^2 - \frac{1}{2}(u_{B2}\sin\alpha + v_{B2}\cos\alpha + y_q)^2 - \frac{1}{2}z_q^2 \right] \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} L_3^2 &= -2 \left[x_{A3}(u_{B3}\cos\alpha - v_{B3}\sin\alpha + x_q) + \right. \\ &\quad y_{A3}(u_{B3}\sin\alpha + v_{B3}\cos\alpha + y_q) + z_{A3}z_q - \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(x_{A3}^2 + y_{A3}^2 + z_{A3}^2) - \frac{1}{2}(u_{B3}\cos\alpha - v_{B3}\sin\alpha + \right. \\ &\quad \left. x_q)^2 - \frac{1}{2}(u_{B3}\sin\alpha + v_{B3}\cos\alpha + y_q)^2 - \frac{1}{2}z_q^2 \right] \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} L_4^2 &= -2 \left[x_{A4}(u_{B4}\cos\alpha - v_{B4}\sin\alpha + x_q) + \right. \\ &\quad y_{A4}(u_{B4}\sin\alpha + v_{B4}\cos\alpha + y_q) + z_{A4}z_q - \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(x_{A4}^2 + y_{A4}^2 + z_{A4}^2) - \frac{1}{2}(u_{B4}\cos\alpha - v_{B4}\sin\alpha + x_q)^2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(u_{B4}\sin\alpha + v_{B4}\cos\alpha + y_q)^2 - \frac{1}{2}z_q^2 \right] \end{aligned} \tag{50}$$

在式(47)~(50)中,包含有各支链的关节变量参数 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 ,也包含有动平台的位姿参数 x_q 、 y_q 、 z_q 、 α ,通过这 4 个运动学方程可对这个 4-UPU 空间并联机构进行运动学正解和反解分析。并联机构的运动学正解分析,是已知关节的输入来分析机构的位置和姿态。运动学反解分析,是已知机构的位置和姿态来分析输入。

4 数值实例

定平台两边长分别为 120 和 100,动平台两边

长分别为 80 和 60,长度单位任意但相同。

运动学反解:已知动平台的位置(20,10,70)和姿态(20°,0,0),分析求解输入运动副关节变量 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 。根据前文所述的运动学方程,反解出输入运动副关节变量 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 的结果如表 1 所示。

运动学正解:已知输入运动副关节变量值 $L_1 = 71.162\,5$ 、 $L_2 = 81.138\,6$ 、 $L_3 = 89.459\,9$ 、 $L_4 = 83.850\,7$,分析动平台的位置(x_q, y_q, z_q)和姿态($\alpha, 0, 0$)。根据运动学方程,正解出动平台的位姿结果如表 2 所示。

表 1 运动学反解结果
Tab.1 Results of inverse kinematics

参数	L_1	L_2	L_3	L_4
数值	71.162 5	81.138 6	89.459 9	83.850 7

表 2 运动学正解结果
Tab.2 Results of forward kinematics

编号	变量			
	x_q	y_q	z_q	$\alpha/(^\circ)$
1	20	10	70	20
2	20	10	-70	20

从表 1 和表 2 的结果可以看出,运动学正解和反解的结果是相互验证的,证明了并联机构运动学分析的正确性,这个并联机构的结构如图 2 所示。

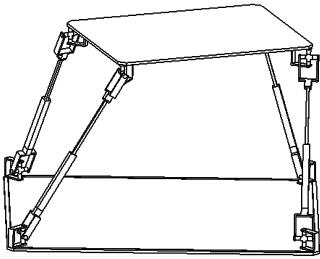


图 2 并联机构结构图

Fig.2 Structure of parallel mechanism

5 结束语

对于空间并联机构的运动学分析,提出了共形几何代数分析方法。给出了动平台上任意一点位置的共形几何代数表达式,提出了建立空间并联机构运动学方程的共形几何代数方法。以一种 4-UPU 空间并联机构运动学分析为例,详细阐述了所提出的空间并联机构运动学分析方法。根据运动学方程,对这种空间并联机构进行运动学正解和反解分析,得到了机构的正解和反解结果。通过数值实例进一步验证了所提出方法的正确性和有效性。

参 考 文 献

1 Li Hongbo, David Hestenes, Alyn Rockwood. Generalized homogeneous coordinates for computational geometry[M]//Sommer G. Geometric computing with clifford algebras. Berlin Heidelberg: Springer, 2001.

- 2 李洪波. 共形几何代数——几何代数的新理论和计算框架[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(11): 2383 – 2393.
Li Hongbo. Conformal geometric algebra—a new framework for computational geometry[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(11): 2383 – 2393. (in Chinese)
- 3 石赫, 李洪波. 几何代数与几何计算(一)[J]. 科学, 2005, 57(5): 3 – 7.
- 4 Rich Wareham, Jonathan Cameron, Joan Lasenby. Applications of conformal geometric algebra in computer vision and graphics [C]//6th International Workshop, IWMM 2004. Berlin: Springer Verlag, 2005: 329 – 349.
- 5 Dietmar Hildenbrand. Geometric computing in computer graphics using conformal geometric algebra[J]. Computers and Graphics, 2005, 29(5): 802 – 810.
- 6 李洪波. 共形几何代数与运动和形状的刻画[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(7): 895 – 901.
Li Hongbo. Conformal geometric algebra for motion and shape description[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2006, 18(7): 895 – 901. (in Chinese)
- 7 Eduardo Bayro-Corrochano, Leo Reyes-Lozano, Julio Zamora-Esquivel. Conformal geometric algebra for robotic vision[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2006, 24(1): 55 – 81.
- 8 Eduardo Bayro-Corrochano, Julio Zamora-Esquivel, Carlos López-Franco. Conformal geometric algebra for 3D object recognition and visual tracking using stereo and omnidirectional robot vision[C]//10th Iberoamerican Congress on Pattern Recognition, CIARP 2005. Berlin: Springer Verlag, 2005: 1079 – 1090.
- 9 López-Franco C, Bayro-Corrochano E. Omnidirectional robot vision using conformal geometric computing [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2006, 26(3): 243 – 260.
- 10 Eduardo Bayro-Corrochano, Julio Zamora-Esquivel. Differential and inverse kinematics of robot devices using conformal geometric algebra[J]. Robotica, 2007, 25(1): 43 – 61.
- 11 Joachim Pitt, Dietmar Hildenbrand, Maximilian Stelzer, et al. Inverse kinematics of a humanoid robot based on conformal geometric algebra using optimized code generation[C]//2008 8th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, Humanoids 2008, 2008: 681 – 686.
- 12 Carbajal-Espinosa O, Loukianov A, Bayro-Corrochano E. Obstacle avoidance for a humanoid arm using conformal geometric algebra[C]//2010 10th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, Humanoids 2010, 2010: 524 – 529.
- 13 Julio Zamora, Eduardo Bayro-Corrochano. Inverse kinematics, fixation and grasping using conformal geometric algebra[C]//2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2004: 3841 – 3846.
- 14 李洪波. 共形几何代数与几何不变量的代数运算[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(7): 902 – 911.
Li Hongbo. Conformal geometric algebra and algebraic manipulations of geometric invariants[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2006, 18(7): 902 – 911. (in Chinese)
- 15 廖启征. 连杆机构运动学几何代数求解综述[J]. 北京邮电大学学报, 2010, 33(4): 1 – 11.
Liao Qizheng. Geometry algebra method for solving the kinematics of linkage mechanisms[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2010, 33(4): 1 – 11. (in Chinese)
- 16 陈修龙, 孙先洋, 邓昱. 4-UPS – RPS 空间 5 自由度并联机构运动学分析[J]. 农业机械学报, 2013, 44(8): 257 – 261, 267.
Chen Xiulong, Sun Xianyang, Deng Yu. Kinematics analysis of 4-UPS – RPS spatial 5-DOF parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(8): 257 – 261, 267. (in Chinese)
- 17 Innocenti C, Castelli V P. Direct position analysis of the Stewart platform mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 1990, 25(6): 611 – 621.
- 18 Wang J, Gosselin C M. Static balancing of spatial four-degree-of-freedom parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35(4): 563 – 592.
- 19 赵铁石, 陈江, 王家春, 等. 4-UPU 并联机器人机构及其运动学[J]. 中国机械工程, 2005, 16(22): 2034 – 2038.
Zhao Tieshi, Chen Jiang, Wang Jiachun, et al. 4-UPU parallel manipulator mechanism and kinematics[J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16(22): 2034 – 2038. (in Chinese)