

# 3PUS-S(P)变胞并联机构逆动力学分析\*

畅博彦 刘艳茹 金国光

(天津工业大学天津市现代机电装备技术重点实验室, 天津 300387)

**摘要:** 对单变胞支链型 3PUS-S(P) 球面变胞并联机构进行运动学和动力学分析。该机构由动平台、静平台、3 个 PUS 支链和 1 个中间 S(P) 变胞支链组成。完全描述该机构动平台的位置和姿态需要 6 个变量, 即动平台上一参考点的 3 个位移和动平台的 3 个转角。构态 1 时机构有 3 个转动自由度, 动平台的 6 个位姿变量中只有 3 个变量是独立的; 构态 2 时机构有 1 个额外的径向移动自由度, 6 个位姿变量中有 4 个变量是独立的。首先, 推导该机构动平台的 6 个位姿参数之间的约束关系, 基于矢量代数法, 建立机构的运动学逆解模型; 其次, 运用牛顿-欧拉法建立该变胞机构的全构态逆动力学方程; 最后, 基于实物样机的几何参数与物理参数, 在给定动平台运动规律和外力后, 通过动力学方程求解得出机构所需驱动力、动平台所受约束力以及变胞过程中的附加作用力, 所得仿真结果说明: 3PUS-S(P) 球面变胞并联机构在受到外界较大径向作用力时, 可以通过激活中间变胞支链的移动副进行缓冲和能量吸收, 从而避免机构受到损伤。

**关键词:** 变胞机构 牛顿-欧拉法 逆动力学 驱动力 约束力

**中图分类号:** TH112.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2014)11-0317-07

## 引言

变胞机构最早出现于 1996 年的可重构包装自动化线的机构学研究中<sup>[1]</sup>, 并于 1998 年第 25 届 ASME 机构学与机器人学双年会上被正式提出<sup>[2]</sup>。变胞机构的变拓扑特性、变功能特性和变自由度特性, 使其可以根据工况环境和功能要求的变化, 在运动过程中改变自身结构, 以适应不同任务和不同场合的需求, 具有传统机构无法比拟的适应能力<sup>[3]</sup>。

近年来, 通过将变胞原理与并联机构相融合, 研究者设计得到一系列具有较好运动特性的变胞并联机构<sup>[4-11]</sup>。但研究工作大多局限于变胞并联机构的构态描述、自由度计算和运动学特性分析, 对此类机构的动力学特性未给予应有的重视。由于变胞并联机构各构态机构自由度数目通常情况下小于 6, 即为少自由并联机构, 此时机构中的支链不仅传递驱动力/力矩, 还为动平台提供约束力/力矩<sup>[12]</sup>。因此, 对变胞机构进行逆动力学研究, 可有效分析构态变换前后机构所需驱动力/力矩和动平台所受约束力/力矩的变化规律。

本文以 3PUS-S(P) 球面变胞并联机构为例, 运用牛顿-欧拉法<sup>[13-14]</sup> 建立该变胞机构的全构态动

力学方程<sup>[15-17]</sup>, 根据该方程求解得出机构不同构态下的驱动力和动平台所受的约束力。最后, 通过计算实例进行计算机仿真, 分析构态变换对机构所需驱动力和动平台所受约束力的影响, 为机构的优化设计、运动控制及动态性能分析与评价提供理论基础。

## 1 3PUS-S(P) 并联式变胞机构运动学分析

### 1.1 机构结构描述和坐标系的建立

研究的 3PUS-S(P) 变胞并联机构结构简图如图 1a 所示, 实物样机如图 1b 所示, 由静平台、动平台以及 3 条结构相同的 PUS 支链和 1 条 S(P) 变胞

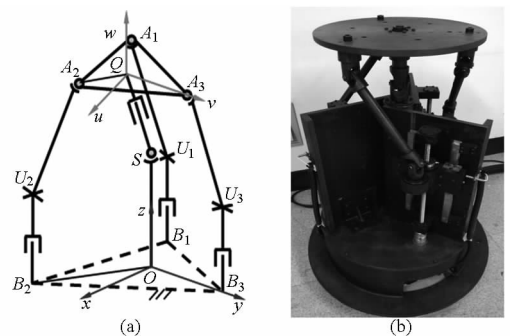


图 1 3PUS-S(P) 机构示意图与实物图  
Fig. 1 Simplified and actual diagram of 3PUS-S(P)

收稿日期: 2014-06-03 修回日期: 2014-07-11

\* 国家自然科学基金资助项目(50675154, 51275352)

作者简介: 畅博彦, 博士生, 主要从事机构学与机械动力学研究, E-mail: boyanchang@sina.com

通讯作者: 金国光, 教授, 博士生导师, 主要从事机构学、机械系统动力学与控制研究, E-mail: jinguoguang@tjpu.edu.cn

支链组成。动平台和静平台的外接圆半径分别为  $a$  和  $b$ , 其几何中心分别为  $Q$  和  $O$ 。PUS 支链的一端通过移动副(P副)与静平台相连, 且移动副的导路方向与静平台所在平面垂直, 另一端通过球面副(S副)与动平台相连。中间变胞支链 P 副导路方向与动平台所在平面垂直, 点  $S$  为中间支链 S 副的中心。设点  $A_i, U_i (i=1, 2, 3)$  分别为第  $i$  条 PUS 支链的 S 副和虎克铰(U副)的铰链中心, 且点  $B_i (i=1, 2, 3)$  为该支链的 P 副导路中心线与静平台所在平面的交点。如图 1a 所示, 以静平台几何中心点  $O$  为原点, 建立静坐标系  $Oxyz$ , 记为  $\{O\}$ , 其中,  $x$  轴平行于  $B_1B_2$ ,  $y$  轴与  $OB_3$  重合,  $z$  轴由右手定则确定; 另外, 以动平台几何中心点  $Q$  为原点, 建立动坐标系  $Quvw$  (固接于动平台上) 记为  $\{Q\}$ , 其中  $u$  轴平行于  $A_1A_2$ ,  $v$  轴与  $QA_3$  重合,  $w$  轴由右手定则确定。

机构处于构态 1 时, 中间支链 P 副处于锁死状态, 动、静平台通过 S 副直接相连接, 动平台具有 3 个转动自由度。当动平台受到外界超载荷附加作用力时, 中间变胞支链采用力变胞<sup>[18]</sup> (弹簧) 的变胞方式, 实现从构态 1 到构态 2 的变换, 其等效约束力梯度模型<sup>[19]</sup> 如图 2 所示, 其中  $F_{pre}$  和  $F_{max}$  分别表示弹簧预紧力和最大载荷。当动平台受到外部冲击力  $F_E (F_{pre} < F_E \leq F_{max})$  作用时, 机构切换到构态 2, 中间支链等效为 SP 结构, 此时动平台不仅可以实现三维转动, 还可以在任意位姿下实现沿  $w$  轴方向的径向移动, 即具有一个额外的径向冗余自由度。

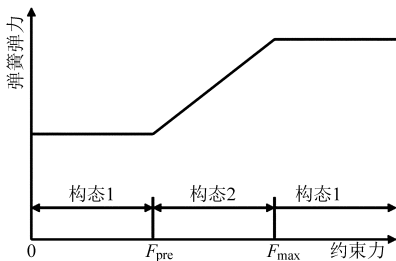


图 2 中间变胞运动副等效约束力梯度模型

Fig. 2 Equivalent constraint gradient model of metamorphic joint in middle leg

采用 Z-Y-Z 型欧拉角描述动平台的姿态, 即以回转角  $\varphi_1$ 、俯仰角  $\varphi_2$ 、偏转角  $\varphi_3$  以及中间支链的 P 副位移  $l$  来描述动平台的旋转和平移。令锥高  $SO, SQ$  分别为  $l_0, d$ ; 定长连杆  $A_i U_i (i=1, 2, 3)$  长度均为  $l_1$ ;  $QA_i, OB_i$  在动、静平台内的方位角均为  $\sigma_i$ , 且

$$\sigma_i = \frac{2\pi(i-1)}{3} - \frac{5\pi}{6} \quad (i=1, 2, 3)$$

则点  $A_i$  在系  $Quvw$  中、点  $B_i$  在系  $Oxyz$  中的坐标可分别表示为

$$A_i^Q = (a \cos \sigma_i, a \sin \sigma_i, 0)$$

$$B_i^O = (b \cos \sigma_i, b \sin \sigma_i, 0)$$

从动坐标系  $Quvw$  到静坐标系  $Oxyz$  的旋转平移矩阵为

$${}^O R_Q = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & Q_x \\ k_4 & k_5 & k_6 & Q_y \\ k_7 & k_8 & k_9 & Q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad k_1 &= c\varphi_1 c\varphi_2 c\varphi_3 - s\varphi_1 s\varphi_3 \\ k_2 &= -c\varphi_1 c\varphi_2 s\varphi_3 - s\varphi_1 c\varphi_3 \\ k_3 &= c\varphi_1 s\varphi_2 \\ k_4 &= s\varphi_1 c\varphi_2 c\varphi_3 + c\varphi_1 s\varphi_3 \\ k_5 &= -s\varphi_1 c\varphi_2 s\varphi_3 + c\varphi_1 c\varphi_3 \\ k_6 &= s\varphi_1 s\varphi_2 \quad k_7 = -s\varphi_2 c\varphi_3 \\ k_8 &= s\varphi_2 s\varphi_3 \quad k_9 = c\varphi_2 \\ Q_x &= dc\varphi_1 s\varphi_2 \quad Q_y = ds\varphi_1 s\varphi_2 \quad Q_z = l_0 + dc\varphi_2 \end{aligned}$$

式中  $s\varphi_i = \sin \varphi_i$ ,  $c\varphi_i = \cos \varphi_i (i=1, 2, 3)$ , 下同。

## 1.2 位置逆解模型

以构态 2 机构为研究对象, 其位置逆解是已知动平台位姿  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l$ , 求解各支链的主动 P 副位移  $p_i$  和中间变胞支链的移动输入  $d$ 。采用矢量代数法可以得到构态 2 机构在坐标系  $Oxyz$  下的闭环约束方程为

$$\begin{cases} l_{OB_i} + l_{B_i U_i} + l_1 \mathbf{e}_i = l_{OQ} + {}^O R_Q l_{QA_i} \\ d = l \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{e}_i$  是  $l_{U_i A_i} (i=1, 2, 3)$  的单位矢量。

对式(2)求解, 可得驱动副位移

$$\begin{cases} p_i = \pm \sqrt{l_1^2 - k_{i1}^2 - k_{i2}^2} + k_{i3} \\ d = l \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad k_{i1} &= ak_1 c\sigma_i + ak_2 s\sigma_i + dk_3 - bs\sigma_i \\ k_{i2} &= ak_4 c\sigma_i + ak_5 s\sigma_i + dk_6 - bs\sigma_i \\ k_{i3} &= ak_7 c\sigma_i + ak_8 s\sigma_i + dk_9 + l_0 \end{aligned}$$

根据机构装配模式选负号, 可以得到机构位置逆解

$$\begin{cases} p_i = -\sqrt{l_1^2 - k_{i1}^2 - k_{i2}^2} + k_{i3} \\ d = l \end{cases} \quad (3)$$

当给定动平台位姿  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l$  时, 根据式(3)即可求出该机构 3 条 PUS 支链的移动输入  $p_i (i=1, 2, 3)$  和中间变胞支链的移动输入  $d$ , 即可求得构态 2 机构的位置逆解。

当机构处于构态 1 时,  $d$  为定值, 代入式(3)即可求得构态 1 机构的位置逆解。

## 1.3 速度映射模型及雅可比矩阵

以构态 2 机构为研究对象, 机构驱动关节的速度矢量为

$${}^2\mathbf{v} = (\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{d})$$

动平台操作空间的速度矢量为

$${}^2\boldsymbol{\omega} = (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3, \dot{l})$$

对式(2)位置逆解方程组两边关于时间求导,

可以得到该机构输入与输出之间的速度约束方程

$$\mathbf{J}_1^2 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_2^2 \mathbf{v} \quad (4)$$

进而可得到构态 2 机构的速度映射模型

$${}^2\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2^2 \mathbf{v} \quad (5)$$

则构态 2 机构的雅可比矩阵为

$${}^2\mathbf{J} = \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & m_2 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & m_3 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中,  $f_{ij}$ 、 $m_i$ 、 $g_i$  ( $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$ ) 均为与机构位姿相关的变量。

构态 1 时,  $d$  为常数。机构驱动关节速度矢量为

$${}^1\mathbf{v} = (\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3)$$

动平台操作空间速度矢量为

$${}^1\boldsymbol{\omega} = (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3)$$

同理, 可得到构态 1 机构的速度映射模型

$${}^1\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_3^{-1} \mathbf{J}_4^1 \mathbf{v} \quad (6)$$

则构态 1 机构雅可比矩阵为

$${}^1\mathbf{J} = \mathbf{J}_3^{-1} \mathbf{J}_4 \quad (7)$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

#### 1.4 加速度模型

以构态 1 机构为研究对象, 其驱动关节的加速度矢量为

$$\boldsymbol{\alpha} = (\ddot{p}_1, \ddot{p}_2, \ddot{p}_3)$$

动平台操作空间的角加速度矢量为

$$\boldsymbol{\alpha} = (\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_3)$$

对式(6)速度约束方程关于时间求导, 可得到构态 1 机构的加速度模型

$$\mathbf{J}_{i1} \boldsymbol{\alpha} - m_i \ddot{p}_i + \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}^T \mathbf{W} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \dot{p}_i \mathbf{S}_i \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}^T \mathbf{H}_i \dot{p}_i + 2\dot{p}_i^2 = 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{J}_{i1} = [f_{i1} \quad f_{i2} \quad f_{i3}] \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_i = [s_{i1} \quad s_{i2} \quad s_{i3}] \quad \mathbf{H}_i = [h_{i1} \quad h_{i2} \quad h_{i3}]^T$$

其中,  $s_{ij}$ 、 $\mu_{ij}$ 、 $h_{ij}$  ( $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$ ) 均为与机构

位姿相关的变量。

对于构态 2 机构, 其加速度模型只需在构态 1

即式(8)的基础上增加 1 个加速度方程  $\ddot{d} = \dot{l}$  即可。

#### 1.5 动平台速度和加速度分析

设  $\mathbf{v}_Q$  和  $\boldsymbol{\omega}_Q$  分别为动平台中心点  $Q$  的线速度和动平台的角速度, 即

$$\mathbf{v}_Q = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\boldsymbol{\omega}_Q = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

由于旋转矩阵欧拉角的瞬时旋转轴分别为

$$\mathbf{R}_{\varphi_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{\varphi_2} = \begin{bmatrix} c\varphi_1 & -s\varphi_1 & 0 \\ s\varphi_1 & c\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\varphi_1 \\ c\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\varphi_3} = \begin{bmatrix} c\varphi_1 & -s\varphi_1 & 0 \\ s\varphi_1 & c\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\varphi_2 & 0 & s\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\varphi_2 & 0 & c\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\varphi_1 s\varphi_2 \\ s\varphi_1 s\varphi_2 \\ c\varphi_2 \end{bmatrix}$$

则动平台角速度可表示为

$$\boldsymbol{\omega}_Q = \mathbf{R}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + \mathbf{R}_{\varphi_2} \dot{\varphi}_2 + \mathbf{R}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_3 \quad (9)$$

将各旋转轴矩阵代入式(9)整理得

$$\boldsymbol{\omega}_Q = \begin{bmatrix} 0 & -s\varphi_1 & c\varphi_1 s\varphi_2 \\ 0 & c\varphi_1 & s\varphi_1 s\varphi_2 \\ 1 & 0 & c\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\varphi_1 \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 c\varphi_2 s\varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 c\varphi_1 + \dot{\varphi}_3 s\varphi_1 s\varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3 c\varphi_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式(10)对时间求导, 得动平台在参考坐标系下的角加速度为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_Q = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 c\varphi_1 - \ddot{\varphi}_2 s\varphi_1 + \ddot{\varphi}_3 c\varphi_2 s\varphi_2 - \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_2 s^2 \varphi_2 + \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_2 c^2 \varphi_2 \\ \ddot{\varphi}_2 c\varphi_1 - \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 s\varphi_1 + \ddot{\varphi}_3 s\varphi_1 s\varphi_2 + \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_1 c\varphi_1 s\varphi_2 + \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_2 c\varphi_2 s\varphi_1 \\ \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_3 c\varphi_2 - \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_2 s\varphi_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

动平台中心点  $Q$  在参考坐标系下的坐标为

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dc\varphi_1 s\varphi_2 \\ ds\varphi_1 s\varphi_2 \\ l_0 + dc\varphi_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式(12)对时间求导, 可得点  $Q$  的线速度

$$\mathbf{v}_Q = \begin{bmatrix} \dot{dc}\varphi_1 s\varphi_2 - d\dot{\varphi}_1 s\varphi_1 s\varphi_2 + d\dot{\varphi}_2 c\varphi_1 c\varphi_2 \\ \dot{ds}\varphi_1 s\varphi_2 + d\dot{\varphi}_1 c\varphi_1 s\varphi_2 + d\dot{\varphi}_2 s\varphi_1 c\varphi_2 \\ \dot{dc}\varphi_2 - d\dot{\varphi}_2 s\varphi_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

式(13)对时间求导, 得点  $Q$  的加速度

$$\mathbf{a}_Q = [a_{Qx} \quad a_{Qy} \quad a_{Qz}]^T \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{Qx} &= \ddot{d}c\varphi_1s\varphi_2 - 2\dot{d}\dot{\varphi}_1s\varphi_1s\varphi_2 + 2\dot{d}\dot{\varphi}_2c\varphi_1c\varphi_2 - \\ & d\ddot{\varphi}_1s\varphi_1s\varphi_2 - d\dot{\varphi}_1^2c\varphi_1s\varphi_2 - 2d\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2s\varphi_1c\varphi_2 + \\ & d\dot{\varphi}_2^2c\varphi_1c\varphi_2 - d\dot{\varphi}_2^2c\varphi_1s\varphi_2 \\ a_{Qy} &= \ddot{d}s\varphi_1s\varphi_2 + 2\dot{d}\dot{\varphi}_1c\varphi_1s\varphi_2 + 2\dot{d}\dot{\varphi}_2s\varphi_1c\varphi_2 + \\ & d\ddot{\varphi}_1c\varphi_1s\varphi_2 - d\dot{\varphi}_1^2s\varphi_1s\varphi_2 + 2d\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2c\varphi_1c\varphi_2 + \\ & d\dot{\varphi}_2^2s\varphi_1c\varphi_2 - d\dot{\varphi}_2^2s\varphi_1s\varphi_2 \\ a_{Qz} &= \ddot{d}c\varphi_2 - 2\dot{d}\dot{\varphi}_2s\varphi_2 - d\ddot{\varphi}_2s\varphi_2 - d\dot{\varphi}_2^2c\varphi_2 \end{aligned}$$

## 2 3PUS-S(P)机构的动力学分析

### 2.1 支链动力学方程

在对3PUS-S(P)变胞并联机构进行动力学分析时,以P副作为驱动关节,所有的U副和S副均为从动关节,不考虑运动副中的摩擦力,且所有杆均为刚性杆。

取3条PUS支链中任一支链进行分析,从静平台到动平台,活动构件依次为滑块、定长连杆和动平台。假设定长连杆为二力杆,则其所受来自动平台和滑块的力均沿杆的方向。取支链中的滑块为研究对象,其沿 $z$ 轴方向的力平衡方程为

$$F_d^i - m_d g - F_{1z}^i = m_d \ddot{p}_i \quad (15)$$

其中

$$F_{1z}^i = |F_1^i| e_z$$

式中  $F_d^i$ ——驱动力  $m_d$ ——滑块质量

$g$ ——重力加速度

$F_{1z}^i$ ——定长连杆作用于滑块的力沿 $z$ 轴方向的分量

$F_1^i$ ——滑块作用于定长连杆的力

$e_z$ ——沿 $z$ 轴方向的单位矢量

### 2.2 动平台动力学方程

设  $F^i = (F_x^i, F_y^i, F_z^i)$  为3条PUS支链中第 $i$  ( $i = 1, 2, 3$ )条支链作用于动平台上的力矢量,其方向沿定长连杆方向,且  $|F^i| = |F_1^i|$ ;  $F^4 = (F_u, F_v, F_w)$  为动系下中间变胞支链作用于动平台上的力矢量。

根据Newton方程,可得动平台力平衡方程

$$\sum_{i=1}^3 F^i + F^4 + F_E + mg = ma_Q \quad (16)$$

式中  $F_E$ ——动平台所受外力

$m$ ——动平台质量

$g$ ——重力加速度矢量

由Euler方程,可得动平台在动坐标系下关于质心的力矩平衡方程

$$M_E + \sum_{i=1}^3 r_i \times F_i = M_Q \quad (17)$$

式中  $M_E$ ——动平台在动系下所受的外载荷力矩矢量

$F_i$ ——动系下支链 $i$ 对动平台的作用力矢量

$r_i$ ——球铰中心 $A_i$ 在动系下的位置矢量

$M_Q$ ——动平台关于质心的合惯性力矩矢量

且有

$$M_Q = I_Q \dot{\omega}_Q + \omega_Q \times (I_Q \omega_Q)$$

式中  $I_Q$ ——动平台对其质心的惯性矩阵

$\omega_Q, \dot{\omega}_Q$ ——动平台在动系下的角速度矢量和角加速度矢量

式(15)、(16)、(17)联立后可求得  $F_d^i$  和  $F_u, F_v, F_w$ 。此外,机构处于构态1时,中间支链对动平台的力  $F_u, F_v, F_w$  为约束力;机构处于构态2时,  $F_u, F_v$  为约束力,  $F_w$  为弹簧弹力。

## 3 3PUS-S(P)机构的算例仿真

以3PUS-S(P)实物样机为研究对象(如图1b所示),其几何参数和物理参数如下:  $a = 0.2$  m,  $b = 0.25$  m,  $l_1 = 0.28$  m,  $l_0 = 0.55$  m,  $m = 2$  kg,  $m_d = 0.5$  kg。

经计算可求得动平台惯性矩阵为

$$I_Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix}$$

不失一般性,设动平台的运动规律为

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} \sin(\pi t) \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{6} \sin(2\pi t) \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{8} \sin(2\pi t)$$

机构处于构态2时,中间变胞支链的P副驱动为弹簧驱动,弹簧刚度系数  $K = 600$  N/m。机构处于构态1时,该弹簧处于预紧状态,预紧力  $F_{pre} = 40$  N,此时机构的外载荷为

$$F_E = (0, 0, 0) \quad M_E = (0, 0, 0)$$

当  $t = 2$  s时,动平台受到外界附加作用力压动弹簧,机构从构态1变换到构态2,且中间支链移动副变化规律为

$$d = 0.15 - 0.12 [\sin(t - 2)\pi]^2$$

经Matlab编程计算,可得构态1和构态2的驱动力、动平台所受约束力以及外界附加作用力,如图3~7所示。

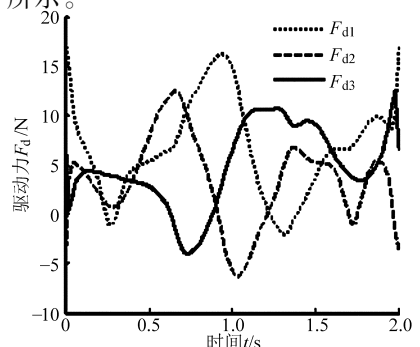


图3 构态1机构3条PUS支链所需驱动力

Fig.3 Driving forces of 3PUS legs in 1st configuration

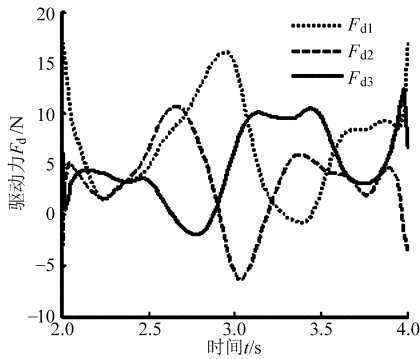


图 4 构态 2 机构 3 条 PUS 支链所需驱动力

Fig. 4 Driving forces of 3PUS legs in 2nd configuration

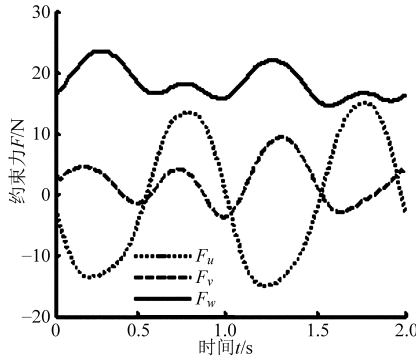


图 5 构态 1 机构动平台所受约束力

Fig. 5 Constraint forces of 3PUS legs in 1st configuration

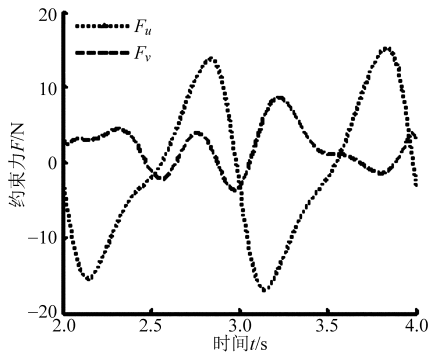


图 6 构态 2 机构动平台所受约束力

Fig. 6 Constraint forces of 3PUS legs in 2nd configuration

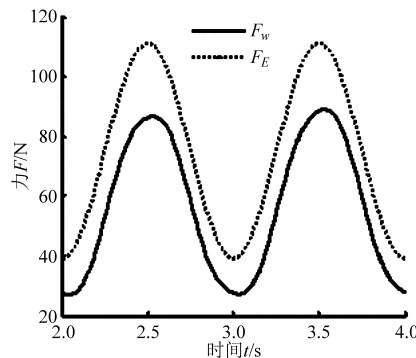


图 7 构态 2 外界附加作用力和弹簧弹力

Fig. 7 External force and spring force in 2nd configuration

由图 2 和图 5 可知,动平台在  $0 \sim 2$  s 内所受沿  $w$  轴方向约束力小于  $F_{pre}$ , 机构处于构态 1; 由图 2 和图 7 可知,动平台在  $2 \sim 4$  s 内所受沿  $w$  轴方向约束力在区间  $[F_{pre}, F_{max}]$  内, 机构处于构态 2; 由图 5 和图 6 可知, 构态变换前后动平台所受沿  $u$  轴和  $v$  轴方向的约束力变化不大; 由图 5 和图 7 可知, 构态 1 结束时刻动平台受到的  $w$  轴方向约束力与构态 2 起始时刻动平台受到的  $w$  轴方向约束力 (弹簧弹力) 间存在突变, 突变量与外界附加作用力在构态变换时刻的初始值有关。

由图 3 和图 4 可知, 构态变换前后 3 条 PUS 支链所需驱动力的变化规律虽然发生了变化, 但其在构态变换时刻连续且变化幅度很小, 说明 3 条 PUS 无约束支链在机构受到径向附加作用力时, 仍然可以保持较好的驱动性能, 这也是单变胞支链型变胞机构<sup>[9]</sup>的一个优点。

由图 7 可知, 构态 2 时作用于动平台上的附加作用力和中间支链的弹簧弹力变化趋势一致, 说明机构主要由中间变胞支链来抵御附加作用力, 也说明了 3PUS-S(P) 球面变胞并联机构在受到外界较大径向作用力时, 可以通过激活中间变胞支链的移动副进行缓冲和能量吸收, 从而避免机构受到损伤。

## 4 结论

(1) 提出了一种 3PUS-S(P) 新型球面变胞并联机构。运用矢量代数法构建了机构的运动学模型, 包括机构位置逆解模型与速度映射模型以及加速度映射模型。

(2) 利用牛顿-欧拉法建立了 3PUS-S(P) 变胞并联机构的逆动力学模型。在给定动平台运动规律和载荷力后, 利用该动力学方程同时求出了机构所需驱动力、动平台所受约束力以及变胞过程中的附加作用力。

(3) 以实物样机为对象进行了仿真计算, 不仅验证了动力学方程的正确性和有效性, 也说明球面变胞并联机构在受到外界较大作用力  $F_E$  ( $F_{pre} < F_E \leq F_{max}$ ) 时, 可通过激活中间变胞支链的移动副进行缓冲和能量吸收, 从而避免机构受到损伤, 为该典型变胞并联机构在新型仿生球面关节 (如肩关节、踝关节和髋关节等) 领域的应用奠定了理论基础。

## 参 考 文 献

- 1 Dai J S. Conceptual study of the dexterous reconfigurable assembly and packaging system[R]. Science and Technology Report; PS 960326, 1996.
- 2 Dai J S, Rees J J. Mobility in metamorphic mechanism of foldable/erectable kinds[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1999, 121(3): 375 - 382.
- 3 戴建生, 丁希仑, 邹慧君. 变胞原理和变胞机构类型[J]. 机械工程学报, 2005, 41(6): 7 - 12.  
Dai Jiansheng, Ding Xilun, Zou Huijun. Fundamentals and categorization of metamorphic mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(6): 7 - 12. (in Chinese)
- 4 李秦川, 陈巧红, 武传宇, 等. 变自由度  $4\text{-}^{\ast}\text{P}^{\ast}\text{R}^{\ast}\text{R}^{\ast}\text{R}^{\ast}\text{R}_N$  并联机构[J]. 机械工程学报, 2009, 45(1): 83 - 87.  
Li Qinchuan, Chen Qiaohong, Wu Chuanyu, et al.  $4\text{-}^{\ast}\text{P}^{\ast}\text{R}^{\ast}\text{R}^{\ast}\text{R}^{\ast}\text{R}_N$  parallel mechanism with variable mobility [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(1): 83 - 87. (in Chinese)
- 5 Ding Xilun, Yang Yi, Dai J S. Topology and kinematic analysis of color-changing ball[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(1): 67 - 81.
- 6 Zhang Ketao, Dai J S, Fang Yuefa. Topology and constraint analysis of phase change in the metamorphic chain and its evolved mechanism[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2010, 132(12): 121001.
- 7 Gan Dongming, Dai J S, Darwin Caldwell. Constraint-based limb synthesis and mobility-change-aimed mechanism construction [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2011, 133(5): 051001.
- 8 Dongming Gan, Jian S, Dai, Jorge Dias, et al. Reconfigurability and unified kinematics modeling of a 3rTPS metamorphic parallel mechanism with perpendicular constraint screws[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2013, 29(4): 121 - 128.
- 9 畅博彦, 金国光, 戴建生. 基于变约束旋量原理的变胞机构构型综合[J]. 机械工程学报, 2014, 50(5): 17 - 25.  
Chang Boyan, Jin Guoguang, Dai Jiansheng. Type synthesis of metamorphic mechanism based on variable constraint screw theory [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(5): 17 - 25. (in Chinese)
- 10 畅博彦, 金国光, 王艳. 并联式球面变胞机构的完整雅可比矩阵[J]. 农业机械学报, 2013, 44(10): 260 - 265.  
Chang Boyan, Jin Guoguang, Wang Yan. Parallel spherical metamorphic mechanism and its complete Jacobian matrix [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(10): 260 - 265. (in Chinese)
- 11 金国光, 王艳, 宋轶民, 等. 基于给定工作空间的球面变胞仿生关节机构优化设计[J]. 农业机械学报, 2013, 44(12): 288 - 293.  
Jin Guoguang, Wang Yan, Song Yimin, et al. Optimum design of spherical metamorphic mechanism used for bionic joint based on a prescribed workspace [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(12): 288 - 293. (in Chinese)
- 12 黄田, 李蒙, 吴梦丽, 等. 可重构 PKM 模块的选型原则-理论与实践[J]. 机械工程学报, 2005, 41(8): 36 - 41.  
Huang Tian, Li Meng, Wu Mengli, et al. Criteria for conceptual design of reconfigurable PKM modules-theory and application [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(8): 36 - 41. (in Chinese)
- 13 冯志友, 张燕, 杨廷力, 等. 基于牛顿欧拉法的 2UPS - 2RPS 并联机构逆动力学分析[J]. 农业机械学报, 2009, 40(4): 193 - 197.  
Feng Zhiyou, Zhang Yan, Yang Tingli, et al. Inverse dynamics of a 2UPS - 2RPS parallel mechanism by Newton-Euler formulation [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(4): 193 - 197. (in Chinese)
- 14 孔令富. 基于牛顿-欧拉方法的 6-PUS 并联机构刚体动力学模型[J]. 机器人, 2004, 26(5): 395 - 399.  
Kong Lingfu. Rigid body dynamics model of the 6-PUS parallel mechanism based on Newton-Euler Method [J]. Robot, 2004, 26(5): 395 - 399. (in Chinese)
- 15 Jin Guoguang, Zhang Qixian, Dai Jiansheng. Dynamic modeling of metamorphic mechanisms [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 16(1): 94 - 99.
- 16 金国光, 丁希仑, 张启先. 变胞机构全构态动力学模型及其数值仿真研究[J]. 航空学报, 2004, 25(4): 401 - 405.  
Jin Guoguang, Ding Xilun, Zhang Qixian. Research on configuration-complete dynamics modeling numerical simulation of metamorphic [J]. Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica, 2004, 25(4): 401 - 405. (in Chinese)
- 17 陈修龙. 五自由度并联机器人机构动力学模型[J]. 农业机械学报, 2013, 44(1): 236 - 243.  
Chen Xiulong. Dynamics model of 5-DOF parallel robot mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(1): 236 - 243. (in Chinese)
- 18 张武翔, 丁希仑, 戴建生. 基于约束变化特征分析的变胞机构构型综合[J]. 机械工程学报, 2013, 49(5): 1 - 9.  
Zhang Wuxiang, Ding Xilun, Dai Jiansheng. Method for configuration synthesis of metamorphic mechanisms based on constraint variation [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(5): 1 - 9. (in Chinese)
- 19 李树军, 王洪光, 戴建生. 变胞机构的等效阻力梯度模型及其设计方法[J]. 机械工程学报, 2014, 50(1): 18 - 23.  
Li Shujun, Wang Hongguang, Dai Jiansheng. The equivalent resistance gradient model of metamorphic mechanisms and the design method [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(1): 18 - 23. (in Chinese)

## Inverse Dynamics of 3PUS - S(P) Parallel Metamorphic Mechanism

Chang Boyan Liu Yanru Jin Guoguang

(Key Laboratory of Advanced Mechatronics Equipment Technology, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China)

**Abstract:** The primary goal of this paper is to analyze the kinematic and dynamics of a 3PUS - S(P) parallel spherical metamorphic mechanism. It consists of a moving platform, base platform, three PUS legs and one middle S(P) metamorphic leg. A complete description of the position and orientation of the moving platform requires six variables. Since the parallel metamorphic mechanism has three degrees of orientation freedom in 1st configuration and extra one degree of translational freedom in 2nd configuration, which implies that only three variables are independent in 1st configuration and four variables in 2nd configuration. Firstly, the constraint equations describing the six motion coordinates of moving platform are derived and kinematic equations are established based on vector algebra method. Secondly, inverse dynamics equations of this metamorphic mechanism are established based on the Newton - Euler formulation. According to geometric and physical parameters of real mechanism, required driving and constraint forces can be obtained when the motion of moving platform and working load are given by solving the inverse dynamics equations. Furthermore the simulation result illustrates that 3PUS - S(P) parallel metamorphic mechanism can avoid impact damage by activating the constrained prismatic pair in middle leg.

**Key words:** Metamorphic mechanism Newton - Euler formulation Inverse dynamics Driving force  
Constraint force

(上接第 342 页)

## Experimental Study on Mechanical Properties of Flexible Pneumatic Bending Joint

Shao Tiefeng<sup>1,2</sup> Zhang Libin<sup>1</sup> Dou Mingyu<sup>1</sup> Bao Guanjun<sup>1</sup> Luo Xinyuan<sup>1</sup> Yang Qinghua<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of E&M, Ministry of Education & Zhejiang Province, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310018, China

2. Engineering Training Center, China Jiliang University, Hangzhou 310032, China)

**Abstract:** A new type of flexible pneumatic bending joint (FPBJ) and its mathematical model were proposed. To implement its real-time closed-loop control system, its mathematical model was simplified, and the mechanical characteristics were studied experimentally. An experimental platform for mechanical characteristics testing was set up, and two FPBJs with different length(40 mm and 60 mm) were tested. The experimental results were analyzed with Matlab curve and surface fitting toolbox, and the FPBJ empirical model was derived. The model showed a non-linear relationship among the bending angle, the FPBJs internal and external pressure difference, joint length and the output force of the FPBJs. Contrast to the simplified mathematical model, the empirical model was more precise, the mean relative error of output angle model was less than 6.7%, and the mean relative error of output force model was less than 2%. Meanwhile, an error, the joint length is proportional to the bending angle in the mathematical model, was avoided in the empirical model.

**Key words:** Flexible pneumatic bending joint Mechanical characteristics Empirical model Surface fitting