

坡面流格子 Boltzmann 方法与 Preissmann 隐式差分法模拟*

张小娜¹ 冯 杰² 张东辉³ 刘宁宁⁴

(1. 南京信息工程大学水文气象学院, 南京 210044; 2. 中国水利水电科学研究院水资源研究所, 北京 100044;
3. 江苏科技大学船舶与海洋工程学院, 镇江 212003; 4. 山东省水利工程管理局, 济南 250013)

摘要:以 D1Q5 速度模型为例,时间多尺度分析为手段通过待定系数法来确定平衡态分布函数,将格子 Boltzmann 方法应用于坡面流运动方程;通过理想算例,以解析解为标准,比较了格子 Boltzmann 方法与应用广泛的 Preissmann 4 点隐式差分法的计算精度。研究表明,对于模拟坡脚断面水深和单宽流量过程,格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 模型的计算精度高于 Preissmann 4 点隐式差分法,尤其在退水阶段。对于达到平衡时间之前的坡面水深和坡面单宽流量,格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 模型的计算精度也高于 Preissmann 4 点隐式差分法。但对于达到平衡时间之后的坡面水深和坡面单宽流量,格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 模型在 $x = 1\text{ m}$ 点上出现了较大的相对误差,计算精度逊于 Preissmann 4 点隐式差分法。将格子 Boltzmann 方法应用于坡面流运动时,弛豫时间选择范围以 $[1, 1.2]\text{ s}$ 为宜。
关键词:坡面流 格子 Boltzmann 方法 Preissmann 隐式差分法 D1Q5 速度模型 弛豫时间
中图分类号: P642.11; TV122 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2014)10-0132-08

引言

土壤水蚀是一个世界性的环境问题,危害十分严重,容易引起土壤肥力减弱、农作物产量下降、河床泥沙淤积、水质污染等。坡面水流是土壤水蚀过程的主要动力,准确模拟坡面水流运动过程,对土壤侵蚀发生、发展机理研究,进而对其进行预报具有重要的意义^[1]。

坡面水流运动属于流体运动的范畴,水流运动是大量粒子微观运动的宏观表现。传统的计算流体力学方法通常建立在宏观连续介质假设的基础上,即将流体假设为连续介质并用 Navier - Stokes 方程组及其简化形式作为控制方程,然后采用有限差分、有限体积、有限元等离散方法把描述流体运动的连续微分方程进行离散化,得到网格单元上的代数方程组后,进行迭代求解。在传统的计算流体力学方法,Preissmann 隐式差分法作为一种经典算法,具有结构简单、稳定性较好、精度较高等特点,应用十分广泛^[2-4]。格子 Boltzmann 方法(Lattice Boltzmann method, LB 法)作为一种新兴的计算流体力学方法,着眼于流体分子的速度分布函数,保留了流体运动中粒子(分子、分子团、流体质点等)相互作用的丰富物理本质,通过构造一些简单的演化规则,来获得与物理规律相符的数值结果,在国内外引起了广泛

的关注^[5-12]。已有研究人员成功地运用格子 Boltzmann 方法,对一些复杂的流动与传热问题进行了卓有成效的研究,但迄今有关格子 Boltzmann 方法应用于坡面水流运动的研究寥寥无几,格子 Boltzmann 方法和 Preissmann 隐式差分法在坡面水流运动过程的应用对比研究更是寥寥无几。本文拟运用格子 Boltzmann 方法和 Preissmann 隐式差分法求解坡面流运动方程,通过算例进行对比分析并深入探讨。

1 坡面流运动方程

坡面流运动过程可用运动波方程进行描述,即

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = r \\ q = \frac{1}{n} h^{5/3} S_0^{1/2} \end{cases} \tag{1}$$

其中 $S_0 = \sin\omega$
式中 q ——单宽流量, m^3/s
 h ——水深, m t ——时间, s
 x ——坡面某点至坡顶的距离, m
 n ——曼宁糙率系数
 S_0 ——坡面坡度 ω ——坡面倾角
 r ——净雨强度, m/s

其初始条件和边界条件一般为

收稿日期: 2013-11-28 修回日期: 2014-01-09
* 国家自然科学基金资助项目(41301037)、江苏省高校自然科学基金基础研究资助项目(11KJB170008)和水利部公益性行业专项资助项目(201301040)
作者简介: 张小娜, 讲师, 主要从事水文水资源研究, E-mail: nanaxiao86@163.com

$$\begin{cases} h(x,0)=0 & (0\leq x\leq L) \\ h(0,t)=0 & (t\geq 0) \end{cases} \quad (2)$$

2 格子 Boltzmann 方法

格子 Boltzmann 方法是在格子气自动机的基础上发展而来的,其演进方程(又称 LB GK 方程)为^[13-16]

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(\boldsymbol{x}+e_{\alpha}\Delta t,e_{\alpha},t+\Delta t)-f_{\alpha}(\boldsymbol{x},e_{\alpha},t) = \\ \Omega_{\alpha}(f(\boldsymbol{x},e_{\alpha},t)) = -\frac{1}{\tau}(f_{\alpha}(\boldsymbol{x},e_{\alpha},t)- \\ f_{\alpha}^{eq}(\boldsymbol{x},e_{\alpha},t)) + (\Delta t)^2 g_{\alpha}(\boldsymbol{x},e_{\alpha},t) \\ (\alpha=0,1,\cdots,b) \end{aligned} \quad (3)$$

- 式中
- α ——离散粒子运动的第 α 个方向
- e_{α} ——离散的粒子在第 α 方向上的运动速度
- Δt ——时间步长
- $\boldsymbol{x}$ ——粒子位置矢量
- $f_{\alpha}(\boldsymbol{x},e_{\alpha},t)$ ——离散的粒子在第 α 方向上的速度分布函数
- $\Omega_{\alpha}(f(\boldsymbol{x},e_{\alpha},t))$ ——第 α 方向上离散的粒子的碰撞项
- τ ——弛豫时间, $0\leq\tau\leq 2$
- $f_{\alpha}^{eq}(\boldsymbol{x},e_{\alpha},t)$ ——平衡态分布函数
- $(\Delta t)^2 g_{\alpha}(\boldsymbol{x},e_{\alpha},t)$ ——源项
- b ——粒子运动方向的总数,与离散速度模型有关

式(3)是建立在离散速度模型的基础上,最具有代表性的离散速度模型是 DaQk 模型^[17],此处 Da 表示空间维数, a 的取值为 1、2、3 等;Qk 表示离散速度方向数, k 的取值为 3、5、7、9、15、19 等。对于一维情况,常用的离散速度模型是 D1Q3 模型和 D1Q5 模型,本文选用 D1Q5 模型。在多尺度问题处理上,采用改进的多尺度处理方法,即空间坐标不进行多尺度处理,只对时间坐标引入 5 个时间尺度的方法^[18];然后以多尺度分析为手段通过待定系数法可以确定 D1Q5 模型对应的修正的 Burgers 方程的平衡态分布函数为

$$\begin{cases} f_0^{(0)} = A - \frac{5}{4}C + \frac{1}{4}E \\ f_1^{(0)} = \frac{1}{6}(4C - 4B + D - E) \\ f_2^{(0)} = \frac{1}{24}(2B - 2D + E - C) \\ f_3^{(0)} = \frac{1}{6}(4C + 4B - D - E) \\ f_4^{(0)} = \frac{1}{24}(2D - 2B + E - C) \end{cases} \quad (4)$$

其中

$A=h \quad B=\frac{\beta h^m}{c} \quad c=\Delta x/\Delta t$

$$C=\frac{1}{c^2}\beta^2m^2\frac{h^{2m-1}}{2m-1} \quad D=\frac{1}{c^3}\beta^3m^3\frac{h^{3m-2}}{3m-2}$$
$$E=\frac{1}{c^4}\beta^4m^4\frac{h^{4m-3}}{4m-3}$$

- 式中
- $f^{(n)}$ ——经过迁移后的粒子速度分布函数
- u ——宏观上边界条件
- m ——反映流体运动状态的参数
- β ——阻力参数
- Δx ——网格间距
- Δt ——时间步长

坡面流问题属于宏观上边界条件已知而宏观下边界条件未知的情况,不涉及局部形态因素,边界处理方法对计算结果的影响较小。因此,边界条件的处理思路如下:上边界结点上的分布函数采用动力学格式,即以宏观上边界条件作为限制条件用平衡态分布函数代替;下边界结点上的分布函数则通过分布函数外推格式来确定。对于 D1Q5 模型,上、下边界各有两个边界结点。上边界结点($M=0$)上的分布函数为

$$\begin{cases} f_0^{(n)}(0) = f_0^{eq}(0) \\ f_1^{(n)}(0) = f_1^{eq}(0) \\ f_2^{(n)}(0) = f_2^{eq}(0) \\ f_3^{(n)}(0) = f_3^{eq}(0) \\ f_4^{(n)}(0) = u - \sum_i f_i^{(n)}(0) \quad (i=0,1,2,3) \end{cases} \quad (5)$$

边界 $M=1$ 点上的分布函数为

$$\begin{cases} f_0^{(n)}(1) = f_0^{(n-1)}(1) \\ f_1^{(n)}(1) = f_1^{(n-1)}(2) \\ f_2^{(n)}(1) = f_2^{(n-1)}(3) \\ f_3^{(n)}(1) = f_3^{(n-1)}(0) \\ f_4^{(n)}(1) = 2f_4^{(n)}(2) - f_4^{(n)}(3) \end{cases} \quad (6)$$

下边界结点($M=N-1$)上的分布函数为

$$\begin{cases} f_0^{(n)}(N-1) = f_0^{(n-1)}(N-1) \\ f_3^{(n)}(N-1) = f_3^{(n-1)}(N-2) \\ f_4^{(n)}(N-1) = f_4^{(n-1)}(N-3) \\ f_1^{(n)}(N-1) = f_1^{(n-1)}(N) \\ f_2^{(n)}(N-1) = 2f_2^{(n)}(N-2) - f_2^{(n)}(N-3) \end{cases} \quad (7)$$

- 式中
- $f(N-1)$ ——第 $N-1$ 个结点上的分布函数
- $f(N-2)$ ——第 $N-2$ 个结点上的分布函数
- $f^{(n-1)}$ ——粒子迁移前的速度分布函数

下边界结点($M=N$)上的分布函数为

$$\begin{cases} f_0^{(n)}(N) = f_0^{(n-1)}(N) \\ f_3^{(n)}(N) = f_3^{(n-1)}(N-1) \\ f_4^{(n)}(N) = f_4^{(n-1)}(N-2) \\ f_1^{(n)}(N) = 2f_1^{(n)}(N-1) - f_1^{(n)}(N-2) \\ f_2^{(n)}(N) = 2f_2^{(n)}(N-1) - f_2^{(n)}(N-2) \end{cases} \quad (8)$$

具体求解步骤为:首先把空间划分成均匀的网格,选择合适的弛豫系数 τ ,根据初始时刻的水深和速度,求得每个结点各方向的平衡态分布函数 f_a ,初始时刻各节点的分布函数用平衡态分布函数代替,即式(4);然后使格子 Boltzmann 离散方程(3)在网格结点的各方向上进行演进(迁移和碰撞过程),即令 f_a 按式(3)在网格上迭代求解;对分布函数求各阶矩,计算出该时刻所对应的宏观量水深等。

3 Preissmann 隐式格差分法

Preissmann 隐式差分法是从 1960 年开始发展起来的,目前通常采用下列简化的 4 点线性隐格式

$$\begin{cases} f|_M = \frac{f_{i+1}^j + f_i^j}{2} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_M = \theta \frac{f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_M = \frac{f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1} - f_{i+1}^j - f_i^j}{2\Delta t} \end{cases} \quad (9)$$

式中 θ ——加权系数, $0 \leq \theta \leq 1$
 f ——流量 Q 或水位 Z 或流速 v 或水深 h 等
采用式(9)形式的 Preissmann 差分格式对式(1)进行离散,可得

$$(h^{5/3})_{i+1}^{j+1} - (h^{5/3})_i^{j+1} + D_1(h_{i+1}^{j+1} + h_i^{j+1}) = D_2 \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} D_1 = \frac{n}{\sqrt{S_0}} \frac{\Delta x}{2\Delta t\theta} \\ D_2 = \frac{n\Delta x}{2\theta\sqrt{S_0}}((r)_{i+1}^j + (r)_i^j) - \frac{1-\theta}{\theta}((h_{i+1}^j)^{5/3} - (h_i^j)^{5/3}) + \frac{n}{\sqrt{S_0}} \frac{\Delta x}{2\theta\Delta t}(h_{i+1}^j + h_i^j) \end{cases} \quad (11)$$

初始条件和边界条件为

$$h_i^0 = 0 \quad (12)$$

上边界条件为

$$h_0^j = 0 \quad (13)$$

因此,对于 $j=0$ 时刻,可得方程组

$$\begin{cases} (h_1^1)^{5/3} - (h_0^1)^{5/3} + D_1(h_1^1 + h_0^1) = D_2|_0^0 \\ (h_2^1)^{5/3} - (h_1^1)^{5/3} + D_1(h_2^1 + h_1^1) = D_2|_1^0 \\ \vdots \\ (h_N^1)^{5/3} - (h_{N-1}^1)^{5/3} + D_1(h_N^1 + h_{N-1}^1) = D_2|_{N-1}^0 \end{cases} \quad (14)$$

其中 $N = L/\Delta x$

式中 N ——迭代次数

由式(11)可计算出 D_1 和不同节点处的 D_2 。将

式(13)代入式(14)中第 1 个方程,可得一个一元非线性方程

$$(h_1^1)^{5/3} + D_1 h_1^1 = \beta_1 \quad (15)$$

其中 $\beta_1 = D_2|_0^0 + (h_0^1)^{5/3} - D_1 h_0^1$ (16)

可利用二分法求出一元非线性方程式(15)的近似实根 h_1^1 。将 h_1^1 的近似根代入式(14)的第 2 个方程,可得到一个与式(15)形式相近的一元非线性方程,用同样方法求得 h_2^1 ,如此反复,便可以依次求得 $j=1$ 时刻各空间节点上的水深。同理,可依次求得 $j=2,3,\dots$ 时刻各节点上的水深,并可由曼宁公式求得各节点上的流量,得到该坡面的出流过程。

4 格子 Boltzmann 方法与 Preissmann 隐式差分法对比分析

格子 Boltzmann 方法与 Preissmann 隐式差分法在坡面流运动过程中应用的对比分析思路如下:鉴于试验中不免存在试验误差,为了准确描述 2 种方法的计算精度,拟采用理想化算例,以解析解为准则。

4.1 算例及结果初步分析

理想化算例:假定一规则矩形不透水坡面,坡面长 $L=50\text{m}$,糙率系数 $n=0.02$,坡度 $S_0=0.01$,研究在降雨强度为 30mm/h 、降雨历时为 10min 、退水阶段历时 40min 情况下的坡脚水深和流量随时间的变化以及坡面水深和流量沿坡长变化情况。

对 Preissmann 4 点隐式差分法,根据其稳定性条件,取加权系数 $\theta=0.55$,空间步长 $\Delta x=1\text{m}$,时间步长 $\Delta t=1\text{s}$;采用格子 Boltzmann 方法计算坡面水流时,采用相同空间步长和时间步长,即空间步长 $\Delta x=1\text{m}$,时间步长 $\Delta t=1\text{s}$, τ 为反映粒子分布函数趋于平衡态的时间($0 \leq \tau \leq 2$),这里取 $\tau=1.2$;因为坡面不透水,所以降雨损失可以忽略;解析解参考文献[19]。其结果如图 1 所示。

由图 1a 和 1b 可以看出,格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型和 Preissmann 4 点隐式差分法与解析解的计算结果几乎一致。由图 1c、1d 可以看出,坡顶水深始终为零,随着离坡顶距离的增加,水深逐渐变厚,并在后端形成一平顶。但由于在坡脚水流也在不断流出,水流厚度并不会无限增大,在一段时间后达到平衡,平顶消失,水深自上而下变厚,但其分布趋于稳定,见图 1e 和 1f。格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型计算结果表明,在 $t=7.08\text{min}$ 时,平顶区域完全消失,不再随时间而变。这意味着达到动态平衡时间点,从外界输入的水量和从坡脚流走的水量相等。在以后的时间里,只要外界输入项不变,坡面上水深分布形状就保持不变,坡脚流量

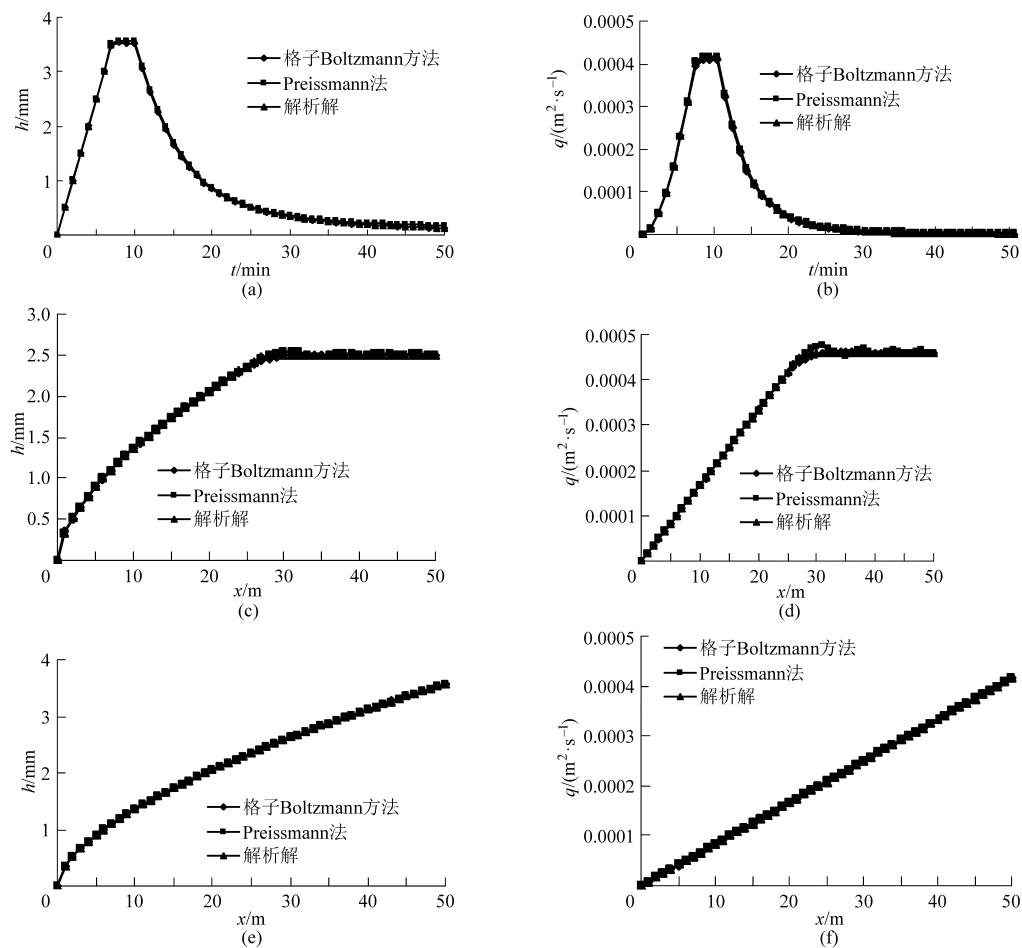


图 1 格子 Boltzmann 方法和 Preissmann 4 点隐式格式法在坡面流运动过程中应用的对比分析

Fig. 1 Comparative analysis of lattice Boltzmann method and Preissmann implicit difference method applied to overland flow

- (a) 坡脚水深随时间的变化曲线
- (b) 坡脚单宽流量随时间的变化曲线
- (c) $t = 5 \text{ min}$ 坡面水深沿坡长变化的分布曲线
- (d) $t = 5 \text{ min}$ 坡面单宽流量沿坡长变化的分布曲线
- (e) $t = 10 \text{ min}$ 坡面水深沿坡长变化的分布曲线
- (f) $t = 10 \text{ min}$ 坡面单宽流量沿坡长变化的分布曲线

也为一常数。所以 $t = 5 \text{ min}$ 时,单位时间从外界降雨输入的水量大于从坡脚流走的水量,即图 1c 和 1d 所示为未达到平衡时间之前坡面水深与单宽流量沿坡长的变化; $t = 10 \text{ min}$ 时,单位时间从外界降雨输入的水量等于从坡脚流走的水量,即图 1e 和 1f 所示为达到平衡时间之后坡面水深与单宽流量沿坡长的变化。从图 1c 和 1d 可以看出,Preissmann 4 点隐式差分法在平衡位置以后有稍许数值振荡,而格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型自始至终未出现数值振荡;从图 1e 和图 1f 可以看出,格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型和 Preissmann 4 点隐式差分法与解析解结果非常一致。

为了对格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型和 Preissmann 4 点隐式差分法的计算精度作进一步分析,将解析解作为标准,采用相对误差的概念,确定格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 模型的相对误差和 Preissmann 4 点隐式差分法的相对误差,结果如图 2 所示。相对误差为

$$E_r = \frac{|x - x^*|}{x^*} \times 100\%$$

(17)

式中 x ——数值解 x^* ——解析解

由图 2a 和 2b 可以看出,对于模拟坡脚断面水深和单宽流量过程,格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 模型计算精度好于 Preissmann 4 点隐式差分法,尤其在退水阶段。具体来说,对于坡脚水深,格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 模型相对误差为 $0\% \sim 2.89\%$,最大相对误差点出现在 $t = 24 \text{ min}$ 时;Preissmann 4 点隐式差分法的相对误差为 $0\% \sim 41.08\%$,在 $t = 25 \text{ min}$ 之前,相对误差控制在 $0\% \sim 1.46\%$,在 $t = 25 \text{ min}$ 之后相对误差呈指数增加趋势。对于坡脚单宽流量,格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 模型的相对误差为 $0\% \sim 4.77\%$;Preissmann 4 点隐式差分法的相对误差为 $0\% \sim 77.46\%$,其相对误差的变化趋势与坡脚水深的相对误差变化趋势相似。由图 2c 到 2f 可以看出,对于坡面水深和坡面单宽流量,两种方法的相对误差均在 5% 以内;对于

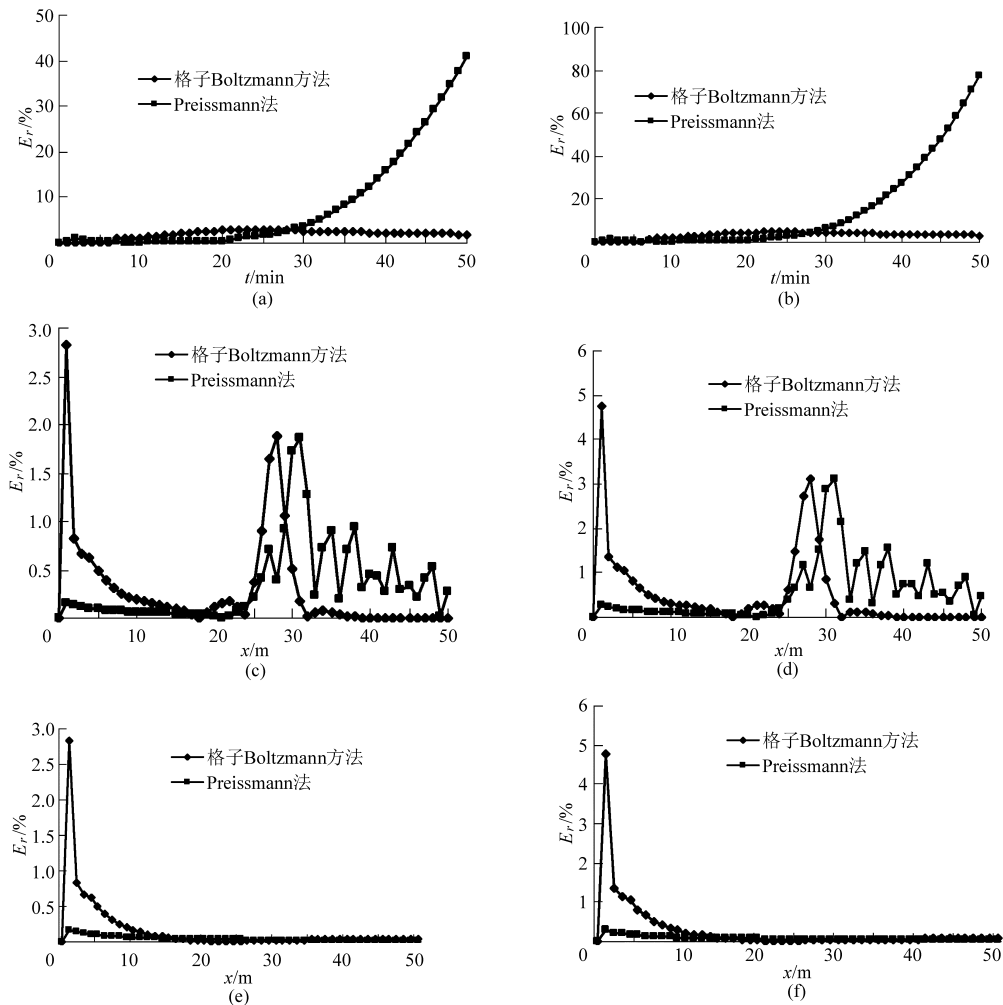


图 2 计算相对误差

Fig.2 Calculation relative error

(a) 坡脚水深 (b) 坡脚单宽流量 (c) $t = 5$ min 坡面水深 (d) $t = 5$ min 的坡面单宽流量
(e) $t = 10$ min 坡面水深 (f) $t = 10$ min 的坡面单宽流量

达到平衡时间之前的坡面水深和坡面单宽流量, Preissmann 4 点隐式差分法在平衡位置以后出现误差振荡现象, 格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型在 $x = 1$ m 点上出现了较大的相对误差, 其坡面水深相对误差达到 2.83%, 坡面单宽流量相对误差达到 4.77%, 在 $x = 28$ m 点上出现另一个相对误差峰值, 其坡面水深相对误差达到 1.88%, 坡面单宽流量相对误差达到 3.12%, 但总的来说, 格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型的坡面水深和坡面单宽流量的平均相对误差 (分别为 0.30% 和 0.49%) 小于 Preissmann 4 点隐式差分法的坡面水深和坡面单宽流量的平均相对误差 (分别为 0.33% 和 0.56%); 对于达到平衡时间之后的坡面水深和坡面单宽流量, 格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型的坡面水深和坡面单宽流量的平均相对误差 (分别为 0.26% 和 0.38%) 大于 Preissmann 4 点隐式差分法的坡面水深和坡面单宽流量的平均相对误差 (分别为 0.05% 和 0.08%), 其主要原因是格子 Boltzmann 方法的

D1Q5 速度模型在 $x = 1$ m 点上出现了较大的相对误差 (其坡面水深相对误差达到 2.83%, 坡面单宽流量相对误差达到 4.76%)。

4.2 算例结果进一步分析

Preissmann 4 点隐式差分法在坡面流运动过程中的应用已经非常成熟, 本文将不再讨论, 重点讨论格子 Boltzmann 方法的误差产生原因。格子 Boltzmann 方法的计算精度主要受到速度模型、步长、弛豫时间、边界格式选取等因素的制约^[18]。一般来说, 步长选取越小, 计算误差越小。

为分析弛豫时间对计算精度的影响, 计算了不同弛豫时间下的坡脚水深、坡脚流量、坡面水深以及坡面单宽流量。表 1 为不同弛豫时间下坡脚水深和坡面水深的相对误差。由表 1 可以看出, 弛豫时间 τ 愈小, 格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型在 $x = 1$ m 点上出现的相对误差愈小; 坡面水深平均相对误差在 τ 取 1.1 时, 获得最小值; 当 τ 大于 1.1 时, 随着 τ 的增大, 坡面水深平均相对误差也逐渐增

大;坡脚水深平均相对误差在 τ 取 1 时,获得最大值,当 τ 大于 1.1 时,随着 τ 的增大,坡脚水深平均相对误差则逐渐减小;坡脚水深最大相对误差和坡面水深最大相对误差均在 τ 取 1 时,获得最小值;当 τ 大于 1 时,坡面水深最大相对误差也增大。

表 2 列出了采用 D1Q3 速度模型时,不同弛豫时间下坡脚水深和坡面水深的相对误差。需要说明的是:①D1Q3 模型的多尺度的处理方式、平衡态分布函数的选择以及边界条件的选择思路同 D1Q5 模型。②算例计算时,空间步长 $\Delta x = 1\text{ m}$,时间步长 $\Delta t = 1\text{ s}$ 。

表 1 D1Q5 速度模型中不同弛豫时间下坡脚水深和坡面水深的计算相对误差
Tab.1 Calculation relative errors of water depth at bottom of slope and water depth along slope under different relaxation time by using velocity model of D1Q5

相对误差		格子 Boltzmann 方法 D1Q5 速度模型中弛豫时间/s											Preissmann 隐式差分法
		0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	%
平均相对误差	坡脚水深	1.96	2.04	2.01	1.96	1.89	1.82	1.75	1.66	1.58	1.49	1.39	7.94
	$t = 5\text{ min}$ 坡面水深	0.41	0.18	0.16	0.30	0.43	0.54	0.65	0.75	0.84	0.92	1.00	0.33
	$t = 10\text{ min}$ 坡面水深	0.44	0.21	0.11	0.16	0.24	0.32	0.40	0.46	0.52	0.58	0.66	0.04
最大相对误差	坡脚水深	5.24	2.84	2.86	2.89	2.91	2.92	2.92	2.92	2.92	2.91	2.90	41.08
	$t = 5\text{ min}$ 坡面水深	2.45	0.90	1.62	2.83	4.27	5.86	7.49	9.04	10.48	11.84	13.14	1.86
	$t = 10\text{ min}$ 坡面水深	2.45	0.81	1.62	2.83	4.26	5.81	7.42	9.06	10.72	12.41	14.12	0.16
$x = 1\text{ m}$ 时相对误差	$t = 5\text{ min}$ 坡面水深	0.79	0.81	1.62	2.83	4.27	5.86	7.49	9.04	10.48	11.84	13.14	0.16
	$t = 10\text{ min}$ 坡面水深	0.79	0.81	1.62	2.83	4.26	5.81	7.42	9.06	10.72	12.41	14.12	0.16

表 2 D1Q3 速度模型中不同弛豫时间下坡脚水深和坡面水深的计算相对误差
Tab.2 Calculation relative errors of water depth at bottom of slope and water depth along slope under different relaxation time by using velocity model of D1Q3

相对误差		格子 Boltzmann 方法 D1Q3 速度模型中弛豫时间/s											%
		0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	
平均相对误差	坡脚水深	2.29	2.19	2.10	2.01	1.90	1.79	1.68	1.56	1.43	1.30	1.18	
	$t = 5\text{ min}$ 坡面水深	0.16	0.22	0.29	0.35	0.41	0.47	0.52	0.60	0.69	0.80	0.90	
	$t = 10\text{ min}$ 坡面水深	0.42	0.32	0.40	0.52	0.66	0.80	0.95	1.09	1.23	1.36	1.49	
最大相对误差	坡脚水深	4.15	2.97	2.92	2.88	2.84	2.80	2.76	2.72	2.69	2.65	2.62	
	$t = 5\text{ min}$ 坡面水深	1.15	1.34	1.74	2.10	2.43	2.73	3.02	3.30	3.57	3.84	4.09	
	$t = 10\text{ min}$ 坡面水深	5.24	2.97	2.92	2.89	4.27	5.86	7.49	9.06	10.72	12.41	14.12	
$x = 1\text{ m}$ 时相对误差	$t = 5\text{ min}$ 坡面水深	0.23	0.26	0.30	0.34	0.39	0.37	0.20	0.16	0.72	1.45	2.31	
	$t = 10\text{ min}$ 坡面水深	0.23	0.26	0.30	0.34	0.38	0.42	0.46	0.48	0.48	0.44	0.34	

比较表 1 和表 2 可以看出:对于坡脚水深,分别采用 2 个速度模型时,其平均相对误差和最大相对误差几乎均是随着 τ 的增大而减小,但对于未达到平衡时间之前和达到平衡时间之后的坡面水深其平均相对误差和最大相对误差总体是随着 τ 的增大而增大,所以在将格子 Boltzmann 方法应用于坡面流运动时, τ 的选取不宜太大,也不宜太小,建议选择范围为[1,1.2]。为了更加直观地表示速度模型对计算精度的影响,图 3 描述了 τ 取 1.0、1.1、1.2 s 时 2 个速度模型下,坡面水深和坡脚水深的相对误差,其中图例采用 A - B 表示方法,A 表示选用的速度模型,B 表示 τ 的取值,譬如 D1Q3 - 1 表示采用的速度模型为 D1Q3, τ 为 1 s。

理论上讲,D1Q5 模型具有 4 阶精度而 D1Q3 模型只有 2 阶精度,因此 D1Q5 模型的计算精度要高于 D1Q3 模型,但在表 1、表 2 以及图 3 中表现并不

明显。从图 3 中可以明显看出,对于未达到平衡时间之前和达到平衡时间之后,采用 D1Q5 速度模型时,其相对误差要大于采用 D1Q3 速度模型时的相对误差。这可能与选用的上边界条件有关,D1Q5 模型的边界格式的处理要比 D1Q3 模型繁琐得多,必然会对计算精度有一定的影响^[20]。

5 结论

(1)对于模拟坡脚断面水深和单宽流量过程,格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 模型的计算精度高于 Preissmann 4 点隐式差分法,尤其在退水阶段。

(2)对于达到平衡时间之前的坡面水深和坡面单宽流量,Preissmann 4 点隐式差分法在平衡位置以后出现误差振荡现象,格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型在 $x = 1\text{ m}$ 点和 $x = 28\text{ m}$ 点上出现了相对误差峰值,但格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型

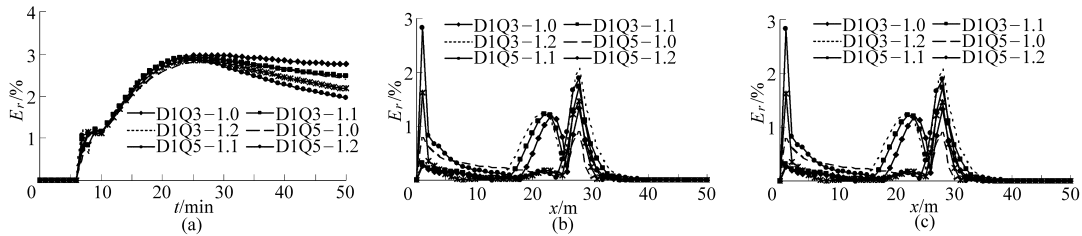


图 3 弛豫时间 τ 取 1.0、1.1、1.2 s 时, D1Q3 和 D1Q5 速度模型下坡面水深和坡脚水深的计算相对误差变化曲线
Fig.3 When relaxation time is set as 1.0, 1.1 and 1.2 s, calculation relative errors of water depth along slope and water depth at bottom of slope using velocity models of D1Q3 and D1Q5
(a) 坡脚水深 (b) $t=5$ min 坡面水深 (c) $t=10$ min 坡面水深

的坡面水深和坡面单宽流量的平均相对误差小于 Preissmann 4 点隐式差分法的坡面水深和坡面单宽流量的平均相对误差。

(3)对于达到平衡时间之后的坡面水深和坡面单宽流量,格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型的坡面水深和坡面单宽流量的平均相对误差则大于 Preissmann 4 点隐式差分法的坡面水深和坡面单宽流量的平均相对误差,其主要原因是格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型在 $x=1$ m 点上出现了较大的相对误差,这可能与选用的上边界条件有关。

(4) τ 愈小,格子 Boltzmann 方法的 D1Q5 速度模型和 D1Q3 速度模型在 $x=1$ m 点上出现的相对

误差愈小。

(5)对于坡脚水深,采用 D1Q5 速度模型和 D1Q3 速度模型时,其平均相对误差和最大相对误差几乎均是随着 τ 的增大而减小,但对于未达到平衡时间之前和达到平衡时间之后的坡面水深,其平均相对误差和最大相对误差总体是随着 τ 的增大而增大,所以在将格子 Boltzmann 方法应用于坡面流运动时, τ 建议的选择范围为 $[1, 1.2]$ s。在格子 Boltzmann 方法中,边界处理直接影响计算格式的数值精度和稳定性。边界条件对格子 Boltzmann 方法在坡面流运动过程中应用的影响尚有待深入研究。

参 考 文 献

- 1 李占斌,鲁克新. 透水坡面降雨径流过程的运动波近似解析解[J]. 水利学报,2003,34(6):8-13.
Li Zhanbin, Lu Kexin. Approximate analytical solution of rainfall runoff process on permeable slope[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2003,34(6):8-13. (in Chinese)
- 2 左长清,张国华. 红壤坡地降雨产流的数学模拟及其过程分析[J]. 水利学报,2012,43(4):392-397.
Zuo Changqing, Zhang Guohua. Numerical simulation of runoff generation on red soil slope under the condition of natural rainfall and its process analysis[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2012,43(4):392-397. (in Chinese)
- 3 朱德军,陈永灿,王智勇,等. 复杂河网水动力数值模型[J]. 水科学进展,2011,22(2):203-207.
Zhu Dejun, Chen Yongcan, Wang Zhiyong, et al. Hydrodynamic model for complex flow in open-channel networks[J]. Advances in Water Science, 2011,22(2):203-207. (in Chinese)
- 4 杨敏,李强,李琳,等. 有压管道充水过程数值模拟[J]. 水利学报,2007,38(2):171-175.
Yang Min, Li Qiang, Li Lin, et al. Numerical simulation of water-filling process in pressure conduit[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2007,38(2):171-175. (in Chinese)
- 5 Wang Haoming, Zhao Haibo, Guo Zhaoli, et al. Lattice Boltzmann method for simulations of gas-particle flows over a backward-facing step[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 239: 57-71.
- 6 Eitel-Amor G, Meinke M, Schroder W. A lattice-Boltzmann method with hierarchically refined meshes[J]. Computers & Fluids, 2013, 75: 127-139.
- 7 Chai Zhenhua, Zhao Tianshou. A pseudopotential-based multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for multicomponent / multiphase flows[J]. Acta Mechanica Sinica, 2012, 28(4): 983-992.
- 8 Guo Zhaoli, Shi Baochang, Zheng Chuguang. Velocity inversion of micro cylindrical Couette flow: a lattice Boltzmann study[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 61(12): 3519-3527.
- 9 Yan Bo, Yan Guangwu. A steady-state lattice Boltzmann model for incompressible flows[J]. Computers and Mathematics with Applications Archive, 2011, 61(5): 1348-1354.
- 10 Zhang Hua, Zhang Xiaodong. Numerical simulation of ski-jump jet motion using lattice Boltzmann method[J]. Science China Technological Sciences, 2011, 54(1): 72-75.
- 11 Guo Z Y, Liu X B, Tao W Q, et al. Effectiveness-thermal resistance method for heat exchanger design and analysis[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2010, 53(13): 2877-2884.
- 12 Cheng Yongguang, Zhang Hui. Immersed boundary method and lattice Boltzmann method coupled FSI simulation of mitral leaflet

flow[J]. Computers & Fluids, 2010, 39(5): 871 – 881.

13 Chen H, Chen S, Matthaeus W H. Recovery of the Navier – Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method[J]. Physical Review A, 1992, 45(8): R5339 – R5342.

14 McNamara G R, Zanetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata[J]. Physical Review Letters, 1988, 61(20): 2332 – 2335.

15 Higuera F, Jimenez J. Boltzmann approach to lattice gas simulations[J]. Europhys Letter, 1989, 9(7): 663 – 668.

16 Bhatnagar P L, Gross E P, Krook M K. A model for collision processes in gases I: small amplitude processes in charged and neutral one-component system[J]. Physical Review, 1954, 94(3): 511 – 525.

17 Qian Y, Humieres D, Lallemand P. Lattice BGK model for Navier – Stokes equation[J]. Europhys Letter, 1992, 17(6): 479 – 484.

18 张东辉. 格子玻尔兹曼方法在水文学中的应用研究[D]. 南京:河海大学,2008.
Zhang Donghui. Lattice Boltzmann method and some application to hydrology [D]. Nanjing: Hohai University, 2008. (in Chinese)

19 芮孝芳. 水文学原理[M]. 北京:中国水利水电出版社,2004:197 – 199.

20 Januszewski M, Kostur M. Sailfish: a flexible multi-GPU implementation of the lattice Boltzmann method [J]. Computer Physics Communications, 2014, 185(9): 2350 – 2368.

Comparison of Lattice Boltzmann Method and Preissmann Implicit Difference Method in Application to Overland Flow

Zhang Xiaona¹ Feng Jie² Zhang Donghui³ Liu Ningning⁴

(1. College of Hydrometeorology, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China
2. Water Resources Research Institute, China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100044, China
3. School of Naval Architecture & Ocean Engineering, Jiangsu University of Science & Technology, Zhenjiang 212003, China
4. Hydraulic Engineering Administration Bureau of Shandong Province, Ji'nan 250013, China)

Abstract: Lattice Boltzmann method is applied extensively in the field of fluid motion for concise programming, parallel computing, and dealing with complex geometrical boundary easily and so on. As the main force of soil water erosion process, accurate simulation of the process of overland flow has important significance for analyzing the mechanism of slope erosion and building the physical process of soil erosion model. However, there is less research on the application of the lattice Boltzmann method to overland flow at present. In this paper, lattice Boltzmann method with D1Q5 velocity model is applied in motion equation of overland flow, in which, only time is considered in the process of multiple scales, and undetermined coefficient method is adopted to determine the equilibrium distribution function by means of multi-scale analysis. And then using analytical solution as a standard, lattice Boltzmann method and Preissmann four-point implicit scheme method are compared through ideal numerical example. The results indicate that the calculation precision of lattice Boltzmann method using D1Q5 velocity model is higher than that of Preissmann four-point implicit scheme method in simulating the variations of water depth and discharge per unit width at the bottom of slope, especially in the stage of recession flow, and in describing the distribution of water depth and discharge per unit width along the slope length before equilibrium time. But after equilibrium time, the calculation precision of lattice Boltzmann method using D1Q5 velocity model is lower in calculating the distribution of water depth and discharge per unit width along the slope length because at the point of $x = 1\text{ m}$, a large relative error occurs. The relaxation time is recommended to be taken in $[1, 1.2]\text{ s}$ when lattice Boltzmann method is applied to solve the motion equation of overland flow.

Key words: Overland flow Lattice Boltzmann method Preissmann implicit difference method D1Q5 velocity model Relaxation time