

四次带参 Bézier 旋转曲面设计*

胡钢^{1,2} 吉晓民¹ 秦新强²

(1. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 西安 710048; 2. 西安理工大学理学院, 西安 710054)

摘要: 针对传统旋转曲面绘制中存在计算复杂和形状难以调节的问题, 提出了一种带形状参数的旋转曲面设计方法。该方法基于超限向量值有理插值函数的基本思想, 利用带形状参数的四次 Bézier 曲线来进行旋转曲面的设计, 并得到生成整个旋转曲面的一个显式函数表达式。所生成的旋转曲面不仅计算简单, 而且具有灵活的局部形状可调性。最后, 对所设计的旋转曲面进行形状与性质分析, 给出了一些旋转曲面的几何造型实例。实例结果表明, 所提方法不仅直观、有效, 而且易于修改旋转曲面的形状, 可以在工程旋转曲面的构造与外形设计中得到应用。

关键词: 四次 λ -Bézier 曲线 形状参数 旋转曲面 超限向量值有理插值函数

中图分类号: TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2014)04-0304-06

引言

自由曲线曲面造型设计一直是 CAD/CAM 领域中重要的研究课题, 其中著名的 Bézier 曲线曲面由于具有许多优良的性质, 如今已成为 CAD/CAM 领域用于描述形状信息的主要工具之一。然而随着现代几何造型工业的快速发展, 传统基于 Bézier 的曲线曲面造型方法已难以满足实际应用中的各种需求, 为此人们开始构造了一些非有理形式的带参 Bézier 曲线曲面^[1-7]。四次带参 Bézier 曲线曲面作为一种新颖的曲线曲面造型方法^[7], 不仅保留传统 Bézier 方法全部的优点, 而且还具有优良的形状可调性, 同时其计算复杂度低于一些非代数多项式曲线^[1-4], 所以这种曲线曲面在 CAD/CAM 中得到广泛的应用^[8-9]。

为了增强四次带参 Bézier 曲线曲面的几何造型能力, 学者们进一步研究了该曲线的一些关键技术, 如光滑拼接^[8]、形状分析^[9]、近似合并^[10]以及可展曲面设计^[11]等。然而, 在 CAD/CAM 中经常会遇到旋转曲面的快速生成问题, 且在航天航空、机械加工、工业产品设计以及 3-D 动画设计等领域, 旋转曲面是经常遇到的一类简单而又非常重要的曲面, 很多模型都是由一个或多个旋转曲面构成的。在现有的 CAD/CAM 系统中, 通常把旋转曲面表示为

Bézier 参数形式, 因此对 Bézier 旋转曲面的研究具有重要的理论与实际应用价值。

目前, 生成旋转曲面的常用方法有三维坐标变换法^[12]、B 样条曲线理论^[13]、散乱数据三角剖分^[14]、轮廓约束的曲面绘制^[15]、多点调形法^[16]以及基于参数方法构造旋转曲面^[17-18]等。在很多情况下, 需要方便地对旋转曲面的整体(或局部)形状进行调整。为此, 本文基于超限向量值有理插值函数的思想, 结合四次带参 Bézier 曲线的相关理论^[7-8], 提出一种生成四次带参 Bézier 旋转曲面的方法。

1 四次带参 Bézier 曲线族

定义 1: 给定 4 个控制顶点 $P_j \in \mathbf{R}^d$ ($d=2, 3; j=0, 1, 2, 3$), 对 $t \in [0, 1]$, 定义

$$P(t; \lambda) = \sum_{j=0}^3 P_j b_{j,4}(t) \quad (1)$$

式(1)中所定义的曲线称为带形状参数 λ 的四次 Bézier 曲线, 简称四次带参 Bézier 曲线^[7]。四次多项式基函数 $b_{j,4}(t)$ ($j=0, 1, 2, 3$) 定义为

$$\begin{cases} b_{0,4}(t) = (1 - \lambda t)(1 - t)^3 \\ b_{1,4}(t) = (3 + \lambda - \lambda t)t(1 - t)^2 \\ b_{2,4}(t) = (3 + \lambda t)t^2(1 - t) \\ b_{3,4}(t) = (1 - \lambda + \lambda t)t^3 \end{cases} \quad (2)$$

式中, $\lambda \in [-3, 1]$ 称为形状参数。显然, 当 $\lambda = 0$

收稿日期: 2013-09-29 修回日期: 2013-12-12

* 国家自然科学基金资助项目(51305344)、国家自然科学基金重大研究计划培育资助项目(91120014)和陕西省教育厅基金资助项目(2013JK1029)

作者简介: 胡钢, 副教授, 博士生, 主要从事 CAGD/CAD/CAM、产品造型设计理论研究, E-mail: hg_xaut@xaut.edu.cn

通讯作者: 吉晓民, 教授, 博士生导师, 主要从事机械设计理论与方法、CAD/CAM、产品造型与仿真研究, E-mail: jixiaomin@xaut.edu.cn

时,式(1)便退化为传统三次 Bézier 曲线。由式(1)可以推出四次带参 Bézier 曲线具有对称性、端点性质、凸包性、几何不变性以及仿射不变性等。此外,该曲线形状参数的几何意义也明显,即随着形状参数 λ 逐渐地增大,四次带参 Bézier 曲线逐渐地靠近其控制多边形。

类似于传统的 Bézier 曲线,可以推导出四次带参 Bézier 曲线间 C^1 、 G^1 光滑拼接的条件。

定理1 由式(1)定义的两相邻曲线 $P(t; \lambda_1)$ 和 $Q(t; \lambda_2)$ 间 G^1 光滑拼接的充要条件为^[8]

$$Q_0 = P_3 = \frac{3\alpha + \alpha\lambda_1}{3\alpha + \alpha\lambda_1 + 3 + \lambda_2} P_2 + \frac{3 + \lambda_2}{3\alpha + \alpha\lambda_1 + 3 + \lambda_2} Q_1 \quad (3)$$

式中, $\alpha > 0$ 为常数; P_i 和 Q_i ($i = 0, 1, 2, 3$) 分别为曲线 $P(t; \lambda_1)$ 和 $Q(t; \lambda_2)$ 的控制顶点。若令式(3)中 $\alpha = 1$, 则定理1中曲线 G^1 光滑拼接的条件退化为曲线 C^1 光滑拼接的条件。

2 超限向量值有理插值函数

定义2: 对于给定的 d 维复向量 $V \in C^d$, 它的 Samelson 逆定义为^[19]

$$V^{-1} = \frac{1}{V} = \frac{V^*}{\|V\|^2} \quad (4)$$

式中 V^* —— V 的共轭向量

$\|V\|$ —— 向量 V 的模

根据定义2中向量的 Samelson 逆, 定义二元超限向量值有理插值函数, 本文只需用到3个插值条件, 故定义二元超限向量值有理插值函数^[19]

$$R(s, t) = \frac{N(s, t)}{q(s, t)} = b_0(s) + \frac{t - t_0}{b_1(s) + \frac{t - t_1}{b_2(s)}} \quad (5)$$

且满足插值条件

$$R(s, t_i) = \frac{N(s, t_i)}{q(s, t_i)} = V_i(s) \quad (i = 0, 1, 2) \quad (6)$$

式中, $N(s, t) = \{\lambda_1(s, t), \lambda_2(s, t), \lambda_3(s, t)\}$ 是三维向量值函数, $\lambda_j(s, t)$ ($j = 0, 1, 2$) 和 $q(s, t)$ 都是关于 s, t 的实函数; 而 $V_i(s), b_i(s)$ ($i = 0, 1, 2$) 都是变量 s 的三维向量值函数, t_i ($i = 0, 1, 2$) 都是实数。

3 四次带参 Bézier 旋转曲面的设计

3.1 问题的描述

本文研究的主要问题是构造空间任意形状的旋转曲面。这里, 所谓四次带参 Bézier 旋转曲面的设计是指: 利用第2节中的超限向量值有理插值函数的思想, 结合一条分段的组合四次带参 Bézier 曲线

给出一种旋转曲面的生成算法。

3.2 算法基本步骤

(1) 在空间直角坐标系的某个平面 Σ (这里 Σ 取为 xoy 平面, 其他平面可类似讨论) 上, 首先构造一条以 $P_{i,0}, P_{i,1}, P_{i,2}, P_{i,3}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为控制顶点的分段组合 (曲线共分为 n 段) 四次带参 Bézier 曲线 S_0 , 并将 S_0 写成向量形式为

$$V_{i,0}(s; \lambda_i) = \{x_{i,0}(s), y_{i,0}(s), 0\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

式中, 曲线段 $V_{i,0}(s; \lambda_i)$ 由式(1)所定义, 它表示四次带参 Bézier 曲线 S_0 的第 i 段曲线, 其控制顶点为 $P_{i,0}, P_{i,1}, P_{i,2}, P_{i,3}$, 形状参数为 λ_i ; 曲线 S_0 的每相邻两曲线段 $V_{i,0}(s)$ 和 $V_{i+1,0}(s)$ 间通常要达到 G^0, G^1 或 C^1 连续, 即其控制顶点应满足曲线 G^0, G^1 或 C^1 光滑拼接条件。

其次, 在垂直于平面 Σ (xoy 平面) 的平面 $\bar{\Sigma}$ (取为 xoz 平面) 上作曲线 S_1 , 写成向量形式为

$$V_{i,1}(s; \lambda_i) = \{x_{i,1}(s), 0, z_{i,1}(s)\} = \{x_{i,0}(s), 0, y_{i,0}(s)\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

式中, 曲线段 $V_{i,1}(s; \lambda_i)$ 表示曲线 S_1 的第 i 段, 该曲线段是由曲线 S_0 的第 i 段 $V_{i,0}(s; \lambda_i)$ 绕着 x 轴顺时针旋转 90° 得到的。

最后以 x 轴为对称轴 L , 在平面 Σ (xoy 平面) 上作曲线 S_0 关于 L 对称的曲线 S_2 , 记为

$$V_{i,2}(s; \lambda_i) = \{x_{i,2}(s), y_{i,2}(s), 0\} = \{x_{i,0}(s), -y_{i,0}(s), 0\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

式中, 曲线段 $V_{i,2}(s; \lambda_i)$ 表示曲线 S_2 的第 i 段。

于是, 得到了分布在2块相互垂直平面 (xoy 平面和 xoz 平面) 上的3条参数曲线

$$\begin{cases} V_{i,0}(s; \lambda_i) = \{x_{i,0}(s), y_{i,0}(s), 0\} \\ V_{i,1}(s; \lambda_i) = \{x_{i,0}(s), 0, y_{i,0}(s)\} \\ V_{i,2}(s; \lambda_i) = \{x_{i,0}(s), -y_{i,0}(s), 0\} \\ (0 \leq s \leq 1; i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (10)$$

(2) 将式(10)中曲线 $V_{i,0}(s; \lambda_i), V_{i,1}(s; \lambda_i)$ 和 $V_{i,2}(s; \lambda_i)$ 作为3个插值条件函数, 根据式(6)中应满足的插值条件, 来构造形如式(5)的二元超限向量值有理插值函数。具体步骤为:

① 假设 $t_0 = 0, t_1 = 0.5, t_2 = 1$, 并定义三维向量值函数

$$b_{i,0}(s; \lambda_i) = V_{i,0}(s; \lambda_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

② 根据向量 Samelson 逆的定义, 令

$$R_{i,1}(s, t_1; \lambda_i) = \frac{t_1 - t_0}{V_{i,1}(s; \lambda_i) - b_{i,0}(s; \lambda_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

并结合式(11)将 $R_{i,1}(s, t_1; \lambda_i)$ 记为

$$\mathbf{b}_{i,1}(s; \lambda_i) = \mathbf{R}_{i,1}(s, t_1; \lambda_i) = \frac{t_1 - t_0}{\mathbf{V}_{i,1}(s; \lambda_i) - \mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

③ 依次定义

$$\mathbf{R}_{i,1}(s, t_2; \lambda_i) = \frac{t_2 - t_0}{\mathbf{V}_{i,2}(s; \lambda_i) - \mathbf{b}_{i,0}(s; \lambda_i)} = \frac{t_2 - t_0}{\mathbf{V}_{i,2}(s; \lambda_i) - \mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\mathbf{R}_{i,2}(s, t_2; \lambda_i) = \frac{t_2 - t_1}{\mathbf{R}_{i,1}(s, t_2; \lambda_i) - \mathbf{b}_{i,1}(s; \lambda_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

并记

$$\mathbf{b}_{i,2}(s; \lambda_i) = \mathbf{R}_{i,2}(s, t_2; \lambda_i) = \frac{t_2 - t_1}{\frac{t_2 - t_0}{\mathbf{V}_{i,2}(s; \lambda_i) - \mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i)} - \frac{t_1 - t_0}{\mathbf{V}_{i,1}(s; \lambda_i) - \mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i)}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

④ 将式(11)~(13)中所得的 $\mathbf{b}_{i,j}(s; \lambda_i)$ ($j=0, 1, 2; i=1, 2, \dots, n$) 代入式(5), 可以得到二元超限向量值有理插值函数

$$\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i) = \mathbf{b}_{i,0}(s; \lambda_i) + \frac{t - t_0}{\mathbf{b}_{i,1}(s; \lambda_i) + \frac{t - t_1}{\mathbf{b}_{i,2}(s; \lambda_i)}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

式中, $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ 。易验证式(14)中二元超限向量值有理插值函数满足插值条件

$$\mathbf{R}_i(s, t_j; \lambda_i) = \mathbf{V}_{i,j}(s; \lambda_i) \quad (j = 0, 1, 2; i = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

(3) 对式(14)中函数 $\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i)$ 进行由后向前的有理化, 即可得到二元超限向量值有理插值函数 $\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i)$ 的显式表达式

$$\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i) = \left\{ x_{i,0}(s), \frac{1-2t}{2t^2-2t+1}y_{i,0}(s), \frac{2t-2t^2}{2t^2-2t+1}y_{i,0}(s) \right\}$$

并将 $\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i)$ 重新记为

$$\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i) = \frac{\mathbf{N}_i(s, t_i)}{q_i(s, t_i)} = \{r_{i,1}(s, t; \lambda_i), r_{i,2}(s, t; \lambda_i), r_{i,3}(s, t; \lambda_i)\} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} r_{i,1}(s, t; \lambda_i) &= x_{i,0}(s) \\ r_{i,2}(s, t; \lambda_i) &= \frac{1-2t}{2t^2-2t+1}y_{i,0}(s) \\ r_{i,3}(s, t; \lambda_i) &= \frac{2t-2t^2}{2t^2-2t+1}y_{i,0}(s) \end{aligned}$$

利用文献[19-20]中的结论, 易证明 $\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i)$ 所表示的空间曲面是以 xoy 平面上的一条参数曲线 $\mathbf{S}_0: \mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i) = \{x_{i,0}(s), y_{i,0}(s), \mathbf{0}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为母线的旋转曲面的一半(具体证明过程不再赘述)。如果需要得到一个完整的旋转曲面, 还

须进一步将

$$\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i) = \{r_{i,1}(s, t; \lambda_i), r_{i,2}(s, t; \lambda_i), r_{i,3}(s, t; \lambda_i)\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

中的第3个分量 $r_{i,3}(s, t; \lambda_i)$ 反号, 即可得到另一半的旋转曲面

$$\widetilde{\mathbf{R}}_i(s, t; \lambda_i) = \{r_{i,1}(s, t; \lambda_i), r_{i,2}(s, t; \lambda_i), -r_{i,3}(s, t; \lambda_i)\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

显然, 两半旋转曲面 $\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i)$ 和 $\widetilde{\mathbf{R}}_i(s, t; \lambda_i)$ 是关于平面 Σ (本文 Σ 取为 xoy 平面) 对称的, 它们组合在一起就组成了一个完整的旋转曲面。特别的, 本文方法生成的旋转曲面含有 n 个相互独立的形状控制参数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 通过改变形状参数 λ_i 可以灵活地修改旋转曲面每一部分的形状。

3.3 旋转曲面的性质分析

由于四次带参 Bézier 旋转曲面的母线 \mathbf{S}_0 是一条以 $\mathbf{P}_{i,0}, \mathbf{P}_{i,1}, \mathbf{P}_{i,2}, \mathbf{P}_{i,3}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为控制顶点的分段组合四次带参 Bézier 曲线, 所以该旋转曲面会继承四次带参 Bézier 曲线的一些基本性质。

性质1: 插值性质。根据四次带参 Bézier 曲线的端点性质可知, 旋转曲面母线 \mathbf{S}_0 的每一段曲线 $\mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 均插值于其始末控制顶点 $\mathbf{P}_{i,0}, \mathbf{P}_{i,3}$, 且相邻曲线段 $\mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i)$ 和 $\mathbf{V}_{i+1,0}(s; \lambda_{i+1})$ 的控制顶点满足 $\mathbf{P}_{i,3} = \mathbf{P}_{i+1,0}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), 所以四次带参 Bézier 旋转曲面插值于 $n+1$ 个由其始末控制顶点 $\mathbf{P}_{i,0}, \mathbf{P}_{i,3}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 分别绕着 x 轴旋转一周生成的圆。

性质2: 凸包性。即整个四次带参 Bézier 旋转曲面是位于一个空间旋转立体凸包之中的, 该旋转立体凸包是由旋转曲面母线 \mathbf{S}_0 的控制多边形凸包绕着 x 轴旋转一周生成的。

性质3: 光滑性。如果旋转曲面母线 \mathbf{S}_0 的每相邻两曲线段 $\mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i)$ 和 $\mathbf{V}_{i+1,0}(s; \lambda_{i+1})$ 间要达到了 G^0, G^1 或 C^1 连续, 则生成的旋转曲面沿其母线方向必然具有 G^0, G^1 或 C^1 光滑连续性。

性质4: 形状参数的几何意义。因为随着形状参数 λ 逐渐地增大, 四次带参 Bézier 曲线逐渐地靠近其控制多边形。所以随着参数 λ 的逐渐增大, 四次带参 Bézier 旋转曲面会逐渐地逼近由其母线控制多边形绕 x 轴旋转一周生成的控制旋转曲面。

4 数值实例

4.1 单段四次带参 Bézier 曲线绕 x 轴旋转

本节给出一个以单段四次带参 Bézier 曲线为母线绕 x 轴生成旋转曲面的实例。假设给定 xoy 平面上的点向量 \mathbf{P}_j ($j = 0, 1, 2, 3$), 它们坐标取值分别为

$$\begin{cases} P_0 = (0, 0, 0) \\ P_1 = (0.5, 0.4, 0) \\ P_2 = (0.2, 1.8, 0) \\ P_3 = (1, 2, 0) \end{cases} \quad (17)$$

由定义 1 和式(17)可知, 以 $P_j (j=0, 1, 2, 3)$ 为控制顶点生成的 1 段四次带参 Bézier 曲线 $V_0(s; \lambda)$ 的参数方程为

$$V_0(s; \lambda) = \{x_0(s), y_0(s), 0\} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x_0(s) &= (1.5 + 0.5\lambda)s - (2.4 + 1.5\lambda)s^2 + \\ &\quad (1.9 + 0.7\lambda)s^3 + 0.3\lambda s^4 \\ y_0(s) &= (1.2 + 0.4\lambda)s + (3.0 - 1.2\lambda)s^2 - \\ &\quad (2.2 - \lambda)s^3 - 0.2\lambda s^4 \end{aligned}$$

由 3.2 小节中的结论可知, 以 $V_0(s; \lambda)$ 为母线绕 x 轴旋转一周生成的旋转曲面方程为

$$\begin{cases} R(s, t; \lambda) = \\ \quad \{r_1(s, t; \lambda), r_2(s, t; \lambda), r_3(s, t; \lambda)\} \\ \tilde{R}(s, t; \lambda) = \\ \quad \{r_1(s, t; \lambda), r_2(s, t; \lambda), -r_3(s, t; \lambda)\} \end{cases} \quad (19)$$

式中, $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1; R(s, t; \lambda)$ 与 $\tilde{R}(s, t; \lambda)$ 关于 xoy 平面对称, 它们合在一起构成完整的旋转曲面; 3 个分量 $r_j(s, t; \lambda) (j=1, 2, 3)$ 取值为

$$\begin{cases} r_1(s, t; \lambda) = x_0(s) \\ r_2(s, t; \lambda) = \frac{1-2t}{2t^2-2t+1}y_0(s) \\ r_3(s, t; \lambda) = \frac{2t-2t^2}{2t^2-2t+1}y_0(s) \\ (-3 \leq \lambda \leq 1) \end{cases} \quad (20)$$

式中, $x_0(s), y_0(s)$ 按式(18)中取值, λ 为形状参数。

图 1 给出式(19)中当形状参数 λ 取不同值时的四次带参 Bézier 旋转曲面。由图 1 可知, 通过修改旋转曲面方程式(19)中的形状参数 λ , 可以灵活调整旋转曲面的形状, 无需重新设计旋转曲面, 省时省力。此外, 本文方法还容易得到母线 $V_0(s; \lambda)$ 绕 x 轴旋转一定角度 $\theta (0 < \theta < 2\pi; \theta \neq \pi)$ 生成的旋转曲面, 具体做法为: ①如果 $0 < \theta < \pi$, 此时只需用旋转曲面方程式(19)中的 $R(s, t; \lambda)$ 来生成旋转曲面, 但变量 t 的范围应限定为 $0 \leq t \leq \theta/\pi$ 。②若 $\pi < \theta < 2\pi$, 此时可先用 $R(s, t; \lambda)$ 生成一半的旋转曲面, 然后再用 $\tilde{R}(s, t; \lambda)$ 生成剩余的不到一半的旋转曲面, 但函数 $\tilde{R}(s, t; \lambda)$ 中变量 t 的范围应限定为 $0 \leq t \leq (\theta - \pi)/\pi$ 。图 2 给出一个母线绕 x 轴旋转一定角度 $\theta (0 < \theta < 2\pi; \theta \neq \pi)$ 生成旋转曲面的实例, 图中旋转曲面母线控制顶点和形状参数取值与图 1b 相同。

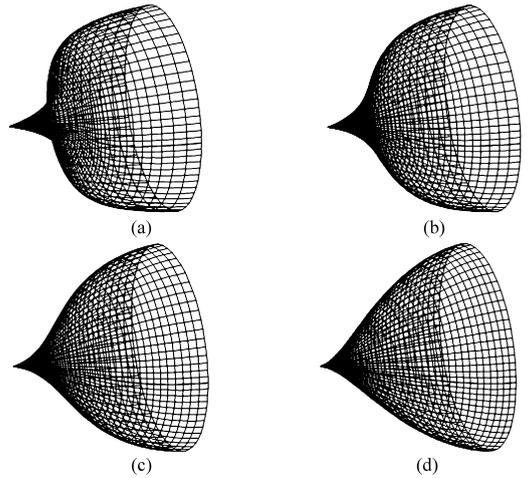


图 1 单段四次带参 Bézier 曲线生成旋转曲面的实例
Fig. 1 Rotation surfaces with different shape parameters based on one quartic λ -Bézier curve

(a) $\lambda = 1$ (b) $\lambda = 0$ (c) $\lambda = -0.75$ (d) $\lambda = -1.5$

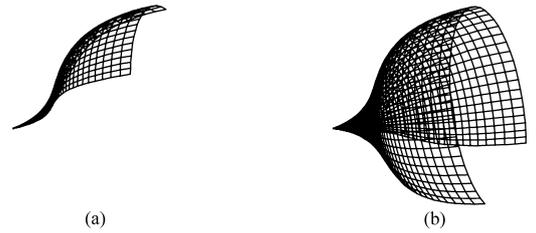


图 2 不同旋转角度 θ 的旋转曲面

Fig. 2 Rotation surfaces with different rotation angle

(a) $\theta = 0.5\pi$ (b) $\theta = 1.5\pi$

4.2 两段四次带参 Bézier 曲线绕 x 轴旋转

本节给出以 2 段光滑拼接的四次带参 Bézier 曲线为母线绕 x 轴生成旋转曲面的例子。假设给定 xoy 平面上的 8 个点向量 $P_{i,j} (i=1, 2; j=0, 1, 2, 3)$, 它们的坐标取值分别为

$$\begin{cases} P_{1,0} = (0, 0.5, 0) \\ P_{1,1} = (0.5, 1.0, 0) \\ P_{1,2} = (0.5, 1.6, 0) \\ P_{1,3} = (1.0, 2.0, 0) \\ P_{2,0} = P_{1,3} \\ P_{2,1} = (2.0, 1.5, 0) \\ P_{2,2} = (3.0, 0.5, 0) \\ P_{2,3} = (4.0, 1.0, 0) \end{cases} \quad (21)$$

由定义 1 和式(21)可知, 以 $P_{i,j} (i=1, 2; j=0, 1, 2, 3)$ 为控制顶点生成的 2 段组合四次带参 Bézier 曲线 $V_{i,0}(s; \lambda_i) (i=1, 2)$ 的参数方程为

$$V_{i,0}(s; \lambda_i) = \{x_{i,0}(s), y_{i,0}(s), 0\} \quad (i=1, 2) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad x_{1,0}(s) &= (1.5 + 0.5\lambda_1)s - \\ &\quad (1.5 + 1.5\lambda_1)s^2 + (1 + \lambda_1)s^3 \end{aligned}$$

$$y_{1,0}(s) = 0.5 + (1.5 + 0.5\lambda_1)s + (0.3 - 1.5\lambda_1)s^2 - (0.3 - 1.1\lambda_1)s^3 - 0.1\lambda_1s^4$$

$$x_{2,0}(s) = 1 + (3 + \lambda_2)s - 3\lambda_2s^2 + 2\lambda_2s^3$$

$$y_{2,0}(s) = 2 - (1.5 + 0.5\lambda_2)s - (1.5 - 1.5\lambda_2)s^2 + (2 - 2\lambda_2)s^3 + \lambda_2s^4$$

根据 3.2 小节中的结论, 可得以 $V_{i,0}(s; \lambda_i)$ 为母线绕 x 轴旋转一周生成的旋转曲面方程为

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i) = \{r_{i,1}(s, t; \lambda_i), r_{i,2}(s, t; \lambda_i), r_{i,3}(s, t; \lambda_i)\} \\ \tilde{\mathbf{R}}_i(s, t; \lambda_i) = \{r_{i,1}(s, t; \lambda_i), r_{i,2}(s, t; \lambda_i), -r_{i,3}(s, t; \lambda_i)\} \\ (0 \leq s \leq 1; 0 \leq t \leq 1; i = 1, 2) \end{cases} \quad (23)$$

式中, $\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i)$ 与 $\tilde{\mathbf{R}}_i(s, t; \lambda_i)$ 关于 xoy 平面对称, 它们合在一起构成完整的旋转曲面; 3 个分量 $r_{i,j}(s, t; \lambda)$ ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$) 取值为

$$\begin{cases} r_{i,1}(s, t; \lambda_i) = x_{i,0}(s) \\ r_{i,2}(s, t; \lambda_i) = \frac{1-2t}{2t^2-2t+1}y_{i,0}(s) \\ r_{i,3}(s, t; \lambda_i) = \frac{2t-2t^2}{2t^2-2t+1}y_{i,0}(s) \\ (-3 \leq \lambda_i \leq 1; i = 1, 2) \end{cases} \quad (24)$$

式中, $x_{i,0}(s)$ 、 $y_{i,0}(s)$ 按式 (22) 计算; λ_1 、 λ_2 为局部形状控制参数。

图 3 给出式 (23) 中当形状参数取不同值时的四次带参 Bézier 旋转曲面。从图 3 中可以看出, 由于旋转曲面具有 2 个独立的形状参数, 故其具有更加灵活的形状可调性。图 3 中的旋转曲面沿其母线方向仅具有 G^0 光滑连续, 若要达到 G^1 光滑连续, 可按定理 1 中 G^1 光滑拼接的条件进一步调整式 (21) 中母线 $V_{i,0}(s; \lambda_i)$ ($i = 1, 2$) 的控制顶点坐标。图 4 为一个沿母线方向 G^1 连续的旋转曲面造型实例。

5 结束语

基于二元超限向量值有理插值函数的基本思

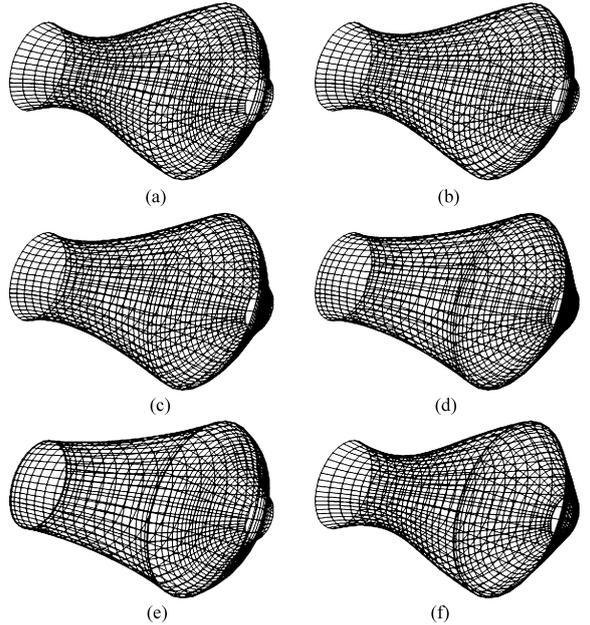


图 3 两段四次带参 Bézier 曲线生成旋转曲面的实例

Fig. 3 Rotation surfaces with different shape parameters

based on two quartic λ -Bézier curves

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (c) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

(d) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ (e) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$ (f) $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1$

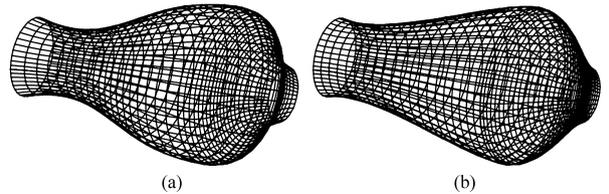


图 4 沿母线方向 G^1 连续的旋转曲面

Fig. 4 Rotation surfaces with directrix of G^1 continuity

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (b) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

想, 提出了一种设计四次带参 Bézier 旋转曲面的新方法。该方法通过引入形状控制参数可以整体或局部地修改旋转曲面的形状, 增加了旋转曲面造型的自由度。并且给出了生成旋转曲面的具体显式函数表达式, 算法简单、有效, 不仅方便计算旋转曲面上任意点的值, 而且方便生成旋转一定角度 θ ($0 < \theta \leq 2\pi$) 的旋转曲面。

参 考 文 献

- 1 Chen Q Y, Wang G Z. A class of Bézier-like curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(1): 29-39.
- 2 Oruc H, Phillips G H. q-Bernstein polynomials and Bézier curves[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 151(1): 1-12.
- 3 Han Xian, Ma Yichen, Huang Xili. The cubic trigonometric Bézier curve with two shape parameters[J]. Applied Mathematic Letters, 2009, 22(3): 226-231.
- 4 檀结庆, 王燕, 李志明. 三次 H-Bézier 曲线的分割、拼接及其应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(5): 584-588. Tan Jieqing, Wang Yan, Li Zhiming. Subdivision algorithm, connection and applications of cubic H-Bézier curves[J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(5): 584-588. (in Chinese)
- 5 Han Xian, Ma Yichen, Huang Xili. A novel generalization of Bézier curve and surface[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 217(1): 180-193.
- 6 陈军, 周联. 两类带两个形状参数的三角 Quasi-Bézier 曲面[J]. 农业机械学报, 2013, 44(6): 263-268.

- Chen Jun, Zhou Lian. Two kinds of triangular Quasi-Bézier surfaces with two shape parameters[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(6): 263–268. (in Chinese)
- 7 吴晓勤, 韩旭里. 三次 Bézier 曲线的扩展[J]. 工程图学学报, 2005, 26(6): 98–102.
Wu Xiaoqin, Han Xuli. Extension of cubic Bézier curve[J]. Journal of Engineering Graphics, 2005, 26(6): 98–102. (in Chinese)
- 8 胡钢, 戴芳, 秦新强, 等. 四次带参 Bézier 曲线曲面的光滑拼接[J]. 上海交通大学学报, 2010, 44(11): 1481–1485, 1490.
Hu Gang, Dai Fang, Qin Xinqiang, et al. On continuity conditions for quartic Bézier curves and surfaces with shape parameters [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2010, 44(11): 1481–1485, 1490. (in Chinese)
- 9 吴荣军, 彭国华, 罗卫民, 等. 四次带参 Bézier 曲线的形状分析[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(6): 725–729.
Wu Rongjun, Peng Guohua, Luo Weimin, et al. Shape analysis of quartic Bézier curve with shape parameter [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(6): 725–729. (in Chinese)
- 10 胡钢, 段献葆, 秦新强, 等. 4次 λ -Bézier 曲线的近似合并算法[J]. 华中科技大学学报, 2011, 37(9): 45–49.
Hu Gang, Duan Xianbao, Qin Xinqiang, et al. Approximate merging of a pair of quartic λ -Bézier curves with shape parameters [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology, 2011, 37(9): 45–49. (in Chinese)
- 11 胡钢, 吉晓民, 秦新强, 等. 四次带参 Bézier 可展曲面的设计[J]. 上海交通大学学报, 2012, 46(4): 601–606.
Hu Gang, Ji Xiaomin, Qin Xinqiang, et al. Geometric design and adjustment of shape for developable quartic λ -Bézier surfaces with shape parameters [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2012, 46(4): 601–606. (in Chinese)
- 12 Gerald Faring. Curves and surfaces for CAGD; a practical guide[M]. 5th ed. San Diego: Academic Press, 2002.
- 13 Bourguignon D, Cani M P, Drettakis G. Drawing for illustration and annotation in 3D[J]. Computer Graphics Forum, 2001, 20(3): 114–122.
- 14 Rodrigues A B, Jorge J A. Free form modeling with variational implicit surfaces[C]//Proceedings of the 12th Encontro Português de Computacao Gráfica. Porto, Portugal, 2003: 17–26.
- 15 韩丽, Raffaele D A. Cubic B 样条旋转曲面的自由绘制技术[J]. 小型微型计算机系统, 2009, 30(7): 1141–1144.
Han Li, Raffaele D A. Rotation surface modeling technique by Cubic B-spline free drawing[J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2009, 30(7): 1141–1144. (in Chinese)
- 16 龚学鹏, 李明哲, 卢启鹏, 等. 基于多点调形原理的旋转曲面连续成形[J]. 光学精密工程, 2012, 20(1): 117–123.
Gong Xuepeng, Li Mingzhe, Lu Qipeng, et al. Continuous forming for rotary surface based on multi-point adjusting principle[J]. Optics and Precision Engineering, 2012, 20(1): 117–123. (in Chinese)
- 17 丁汉, 朱利民. 复杂曲面数字化制造的几何学理论和方法[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 63–64.
- 18 Piegl L A, Tiller W. The NURBS book[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1997: 340–348.
- 19 檀结庆. 连分式理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 337–392.
- 20 朱晓临. 一种快速构造圆弧的新方法[J]. 合肥工业大学学报, 2002, 25(2): 269–272.
Zhu Xiaolin. A new method for constructing circular arc[J]. Journal of Hefei University of Technology, 2002, 25(2): 269–272. (in Chinese)

Quickly Construction of Quartic λ -Bézier Rotation Surfaces with Shape Parameters

Hu Gang^{1,2} Ji Xiaomin¹ Qin Xinqiang²

(1. School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China

2. School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: A method for constructing rotation surfaces with local shape parameters was proposed to solve the problems in adjusting and controlling shapes of rotation surfaces. Based on the transfinite vectored rational interpolating function, the quartic λ -Bézier rotation surfaces with multiple shape parameters were constructed using a quartic λ -Bézier curve. Then, the explicit function expression of the quartic λ -Bézier rotation surfaces was presented. The proposed quartic λ -Bézier rotation surfaces inherited the outstanding properties of the Bézier rotation surfaces, and had a good performance on adjusting their local shapes by changing the value of shape parameters. Finally, some properties of the quartic λ -Bézier rotation surfaces and applications in rotation surfaces design were discussed. The modeling examples showed that the proposed method was simple and effective, and easy to control the shape of rotation surfaces, which provided a valuable way for the design of rotation surfaces.

Key words: Quartic λ -Bézier curve Shape parameter Rotation surface Transfinite vectored rational interpolating function