

# 基于核密度估计的散乱点云边界特征提取\*

孙殿柱 刘华东 史阳 李延瑞

(山东理工大学机械工程学院, 淄博 255091)

**摘要:** 为获得逆向工程中复杂散乱点云的边界特征, 提出了一种基于  $k$  邻域点集核密度估计的边界特征识别与提取算法, 通过  $R^*$  树索引结构和动态扩展空心球算法实现样点  $k$  邻域点集的快速查询, 将查询区域半径作为带宽对点集进行核密度估计, 由核密度估计获得反映点集分布的模式点, 依据模式点到样点的距离与带宽的比值判别边界点特征。实验结果表明, 该算法能够快速、准确提取逆向工程中均匀及非均匀分布的散乱点云的边界特征。

**关键词:** 散乱点云 边界特征  $R^*$  树  $k$  邻域查询 核密度估计

**中图分类号:** TP391.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2013)12-0275-05

## Boundary Feature Abstraction of Unorganized Points Based on Kernel Density Estimation

Sun Dianzhu Liu Huadong Shi Yang Li Yanrui

(School of Mechanical Engineering, Shandong University of Technology, Zibo 255091, China)

**Abstract:** In order to obtain the boundary feature of unorganized points, a method of boundary feature recognition and abstraction was proposed based on the kernel density estimation on  $k$ -neighborhood of every sample point.  $k$ -neighborhood of a sample point could be acquired quickly based on  $R^*$ -tree index, and the radius of query area viewed as bandwidth was used to kernel density estimation on the point set consisted of the sample point and its  $k$ -neighborhood. In this way, the mode points reflected the distribution of point sets could be obtained. According to the ratio of distance between mode points and sample points to the bandwidth of kernel density estimation, the sample points located on boundary could be recognized and abstracted. The experimental results show that the algorithm can obtain the boundary feature of the unorganized points in uniform or nonuniform distribution exactly and rapidly.

**Key words:** Unorganized points Boundary feature  $R^*$ -tree  $k$ -neighborhood query Kernel density estimation

### 引言

在逆向工程领域, 散乱点云边界特征是实物表面边界区域的采样点, 它不仅作为表达曲面的重要几何特征, 而且作为求解曲面的定义域, 对重建曲面模型的品质和精度起着重要作用<sup>[1-5]</sup>。

由于散乱点云中各样点之间不具备任何拓扑信息<sup>[6]</sup>, 对于任一目标样点是否为边界点的判定需要借助该样点及其邻域点集所反映的几何特征而实

现<sup>[7-8]</sup>。文献[9]根据实物原始曲面特征选择广义平面、广义柱面或广义球面对样点进行投影, 在投影面上对投影点进行栅格划分并根据几何判据提取边界点, 将其还原到三维空间即可获得边界特征, 该算法仅适用于符合投影面特征的均匀点云。文献[10~12]都是基于点云局部几何特征识别边界, 当点云分布不规则时, 边界凹陷的地方边界点缺失严重。文献[13]以点云密度为基本参数将点云的包围盒划分为空间栅格, 通过种子边界栅格的识别

和生长算法查询边界栅格并从中提取边界特征,此方法可在一定程度避免凹陷区域的边界点缺失情况,但由于单一的点云密度无法反映散乱点云中样点的整体分布状况,所提取的边界特征存在较多噪声点,此外从边界栅格所包含的数据中提取边界点的方法是基于栅格内部点集的凸包结构实现的,需要根据栅格所包含样点分布的几何特征区分多种边界栅格类型,不仅增加了算法实现的难度,而且过程较为繁琐,并且根据定义此方法难以提取棱线等内部特征边界线。

本文根据逆向工程中散乱点云内部点和边界点的邻域点集分布不同,基于核密度估计提取边界特征。为提高散乱点云内部点与边界点的邻域点集查询效率,引入R\*树作为散乱点云的动态索引,基于该索引采用扩展空心球算法获取目标样点的 $k$ 邻域点集。将查询目标样点 $k$ 近邻点集的空心球半径作为核密度估计的带宽求解样点对应的模式点,通过样点到模式点的偏移距离判断点集的分布情况,提取偏移距离与空心球半径比值大于给定阈值的样点作为边界特征。

## 1 样点邻域查询

在散乱点云中,通过设定邻域尺寸或 $k$ 邻域查询获取目标样点的邻域点集。因为散乱点云存在分布不均匀的样点,通过指定邻域的尺寸难以获得准确的邻域点集,而 $k$ 邻域查询则不依赖于样点分布,所以采用 $k$ 邻域查询确定目标样点的邻域点集。为了快速准确的获得目标样点的 $k$ 邻域点集,采用构建速度快、查询效率高的改进R\*树<sup>[14]</sup>对散乱点云构建空间索引结构,通过索引及自适应动态扩展空心球法<sup>[15]</sup>快速获取 $k$ 邻域点集。

基于改进的R\*树对图1a所示的型面特征点云进行 $k$ 邻域查询,图1b~1e为R\*树根结点到叶结点的查询过程,最终获得叶节点(图1e),图1f为 $k=8$ 时从叶节点中提取的目标样点 $k$ 邻域点集。

## 2 曲面拓扑空间与模式点

核密度估计可以较好地估计样点 $k$ 邻域点集的分布特征<sup>[16-18]</sup>,其重要参数是核函数<sup>[19]</sup>,直观地说,核密度估计函数是每个采样点处的核函数加权求和的结果

$$p(x) = C \sum K(x) \quad (1)$$

式中  $C$ ——与带宽和点集相关的常数

$K(x)$ ——核函数

核函数是采样点与核中心之间的距离度量,反映了两点之间的相似度。当采用平滑的核时,核密

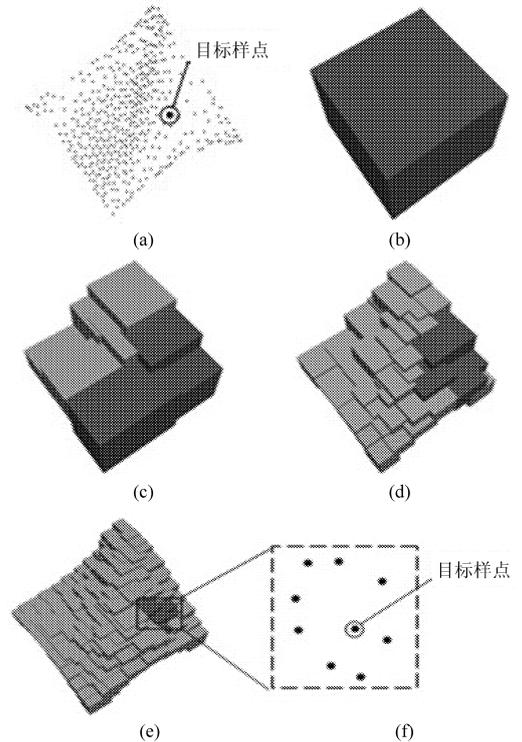


图1 型面特征点云的R\*树索引结构及 $k$ 邻域查询

Fig.1 R\*-tree index and  $k$ -neighborhood

query of surface feature points

(a) 型面特征点云 (b) 根节点 (c) 第1层结点

(d) 第2层结点 (e) 叶结点 (f) 目标样点的邻域点集

度估计函数也是平滑的,收敛路径平滑,对点集的分布情况估计较准确,如图2中的曲线所示。选择非平滑核时,核密度估计函数也是不连续的,收敛速度虽然较快,但精度差<sup>[20]</sup>,如图2中折线所示。可见采用平滑核函数可以较好地估计 $k$ 邻域点集的分布特征。

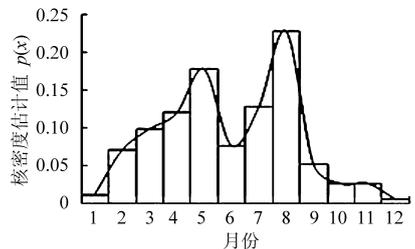


图2 采用平滑和非平滑核函数对一年中发生某疾病次数的核密度估计

Fig.2 Kernel density estimations based on smooth and unsmooth kernels for frequency of disease

计算点集内所有点与核中心的相似度之和得到核密度估计函数,通过求解其极值获得的模式点则为相似度之和最大的点<sup>[20]</sup>,因此模式点总是偏向点密集的区域。

为了充分体现目标样点 $k$ 邻域点集的几何特征,采用样点和其邻域模式点之间的距离定义样点邻域点集的疏密,以此判断样点类型。内部样点 $P$

的邻域点集遍布整个区域,  $P$  与其邻域模式点  $O_1$  之间的距离  $\Delta d_1$  较小, 此种情况定义为密集(图 3a); 边界样点  $Q$  的邻域点集分布于样点一侧, 出现一侧密度极大, 另一侧密度为零的情况, 这导致  $Q$  与其邻域模式点  $O_2$  之间的距离  $\Delta d_2$  相对较大, 这种情况定义为稀疏(图 3b)。

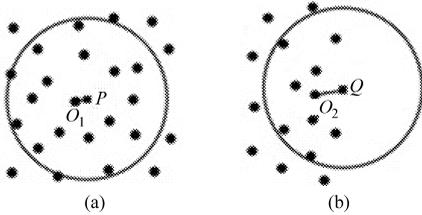


图 3  $k$  邻域模式点与样点的关系

Fig. 3 Relationship between  $k$ -neighborhood mode points and sample points

(a) 内部点 (b) 边界点

通过以上分析可知, 核密度估计中核函数形式的多变性决定了模式点调节方式的灵活性, 可以根据  $k$  邻域点集的具体分布特征获得反应点集分布特征的模式点, 并基于样点邻域点集疏密的定义准确识别样点的类型。

### 3 基于核密度估计获取模式点

通过  $R^*$  树获取目标样点的  $k$  邻域点集后, 对点集的密度函数进行非参数估计<sup>[16]</sup> 确定点集的分布情况。非参数估计是从样本本身出发对其进行密度估计, 不利用样本分布的先验知识, 能够处理任意分布的样本。

非参数估计中最常用的是核密度估计<sup>[17]</sup>, 它根据核函数  $K(x)$  对点集进行密度估计。常用的核函数包括 Epanechnikov 核、高斯核、Biweight 核等, 由于高斯核密度估计得到的密度精度更高, 所以选用高斯核, 其形式为

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2)$$

给定  $d$  维欧式空间中的散乱点云, 通过  $R^*$  树索引获取样点的  $k$  邻域点集  $S = \{x_i, 1 \leq i \leq k\}$ , 其中各点均用列向量表示, 则密度函数为

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{kh^d} \sum_{i=1}^k K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad (3)$$

其中,  $h$  为带宽, 它决定了核函数的影响范围。因为点集  $S$  为样点的  $k$  邻域点集, 所以  $h$  的取值为最终包含样点  $k$  邻域点集的最小空心球半径。

密度函数梯度估计等于密度函数估计的梯度, 即

$$\nabla \hat{f}(x) = \frac{2C}{kh^{d+2}} \left[ \sum_{i=1}^k g\left(\left\|\frac{x-x_i}{h}\right\|^2\right) \cdot \left[ \frac{\sum_{i=1}^k x_i g\left(\left\|\frac{x-x_i}{h}\right\|^2\right)}{\sum_{i=1}^k g\left(\left\|\frac{x-x_i}{h}\right\|^2\right)} - x \right] \right] \quad (4)$$

其中,  $C$  为归一化常量;  $g(x) = -k'(x)$ ,  $k(x)$  为核函数的轮廓函数, 满足  $k(\|x\|^2) = K(x)$ ,  $k'(x)$  为  $k(x)$  的导数。根据 Cheng<sup>[20]</sup> 提出的均值漂移算法可从式(4)中得到点集  $S$  的模式点

$$m(x) = \frac{\sum_{i=1}^k g\left(\left\|\frac{x-x_i}{h}\right\|^2\right) x_i}{\sum_{i=1}^k g\left(\left\|\frac{x-x_i}{h}\right\|^2\right)} \quad (5)$$

### 4 边界特征识别与提取

基于样点  $k$  邻域点集的核密度估计获得模式点, 该点到样点的距离可以作为判别边界点的依据, 但是散乱点云样点的分布不均匀特性导致无法用单一的距离作为判别的标准。判断模式点到样点距离的远近程度取决于核密度估计的带宽大小, 所以将距离  $d$  与  $k$  邻域点集的空心球半径  $r$  的比值作为判别标准, 通过设定阈值  $\varepsilon$  来区分边界点和内部点。

边界特征提取算法包含 2 个参数: 邻域点数  $k$  和阈值  $\varepsilon$ , 2 个参数对于点云特征边界识别的计算效率和计算精度都具有重要的影响。当  $k$  值增大或减小时, 邻域点集的空心球半径  $r$  及距离  $d$  也会相应增大或减小, 但其比值变化不大, 所以  $k$  的取值主要对求解效率影响较大, 为了充分表达样点的拓扑关系并且减小计算量, 通常  $k$  取  $[10, 20]$  内的整数。

边界点求得的距离  $d$  与半径  $r$  比值较大, 所以将比值大于阈值  $\varepsilon$  的样点判定为边界点, 不同的  $\varepsilon$  值提取的边界点数量不同。对如图 4a 所示的人脸模型进行边界提取, 令  $k = 15$ ,  $\varepsilon$  分别取 0.35、0.25 和 0.15, 求解结果分别为图 4b、4c 和 4d 所示,  $\varepsilon$  取值较大时, 会丢失部分边界点;  $\varepsilon$  取值较小时, 提取的边界点数量过多, 会增大后续操作的计算量。所以,  $\varepsilon$  的取值对于求解精度有较大的影响, 通常  $\varepsilon$  的取值范围为 0.15 ~ 0.50。

### 5 时间复杂度分析

设散乱点云中样点的个数为  $n$ , 对散乱点云构建  $R^*$  树动态索引结构的时间复杂度为  $O(n\delta_1)$ ,  $\delta_1$  为  $R^*$  树的高度, 一般小于 6, 遍历所有样点并求解其  $k$  邻域点集模式点的时间复杂度为  $O(n)$ , 所以本

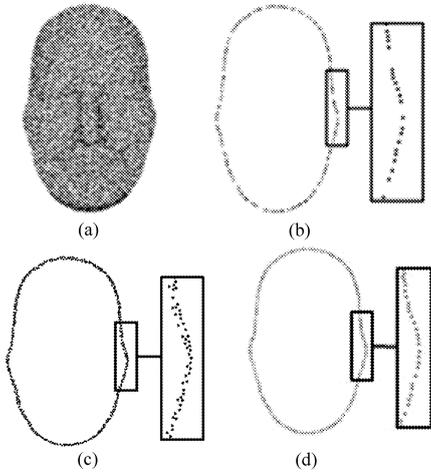


图4 不同  $\epsilon$  值的人脸模型边界提取

Fig.4 Boundaries abstraction of face mold under different  $\epsilon$  values

(a) 人脸数据 (b)  $\epsilon=0.35$  (c)  $\epsilon=0.25$  (d)  $\epsilon=0.15$

文算法的时间复杂度为  $O(n\delta_1)$ 。文献[13]复杂度为  $O(n\delta_2)$ ,  $\delta_2$  为每个空间栅格的相邻栅格数,最大值为 26,此种情况包括点连接 8 个,边连接 12 个和面连接 6 个,最小值为 6,此时相邻栅格只有面连接。因此,  $n$  相同时本文算法效率较高。

### 6 应用实例

分别采用本文算法和文献[13]算法对图 5~8 中图 a 所示的散乱点云进行边界提取,点云数目分别为:9 626、9 033、8 466 及 4 967 个,本文算法中的参数设置为: $k=15, \epsilon=0.25$ ,运行结果分别如图 5~8 中的图 b 和图 c 所示。

表 1 为本文算法和文献[13]算法分别对 4 个点云数据进行边界提取时所运行的时间。从表 1 中可看出,本文算法的计算效率有明显的提高,比文献[13]算法的效率提高约 30%~40%。

表 1 提取边界的运行时间比较

Tab.1 Boundary extraction time compare

算法	图 5a 模型	图 6a 模型	图 7a 模型	图 8a 模型
本文算法	0.211	0.189	0.181 4	0.106 4
文献[13]	0.365	0.286	0.294 5	0.172 8

由图 5a 可知,叶轮模型的样点分布不均匀,利用文献[13]求解的点云密度为 0.361,空间栅格的尺寸取 0.5,叶片根部靠近叶轮边缘的位置样点稀疏,点间距远大于栅格尺寸,出现内部栅格为空的情况,导致邻近栅格误判为边界栅格,最终提取的边界特征包含噪声点,此外文献[13]无法提取叶片棱线,本文算法避免了噪声点的出现,并且准确提取出完整的边界特征。

图 6a 所示的钣金件模型包含曲率平滑过渡的

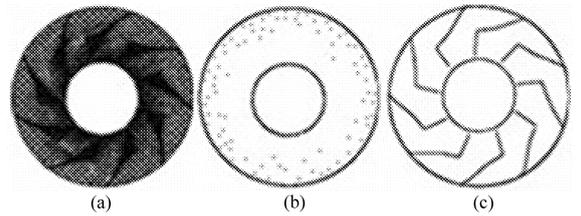
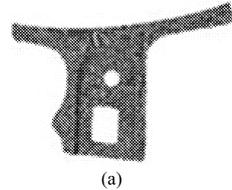


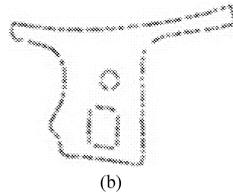
图 5 叶轮模型的边界提取

Fig.5 Boundary abstraction of impeller mold

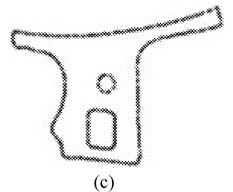
(a) 散乱点云 (b) 文献[13]算法 (c) 本文算法



(a)



(b)

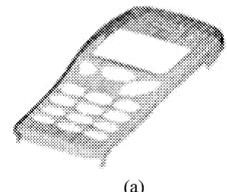


(c)

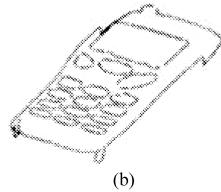
图 6 钣金件模型的边界提取

Fig.6 Boundary abstraction of sheet metal part mold

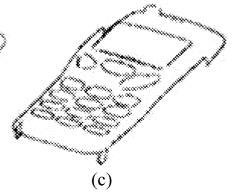
(a) 散乱点云 (b) 文献[13]算法 (c) 本文算法



(a)



(b)



(c)

图 7 手机模型的边界提取

Fig.7 Boundary abstraction of phone mold

(a) 散乱点云 (b) 文献[13]算法 (c) 本文算法

凹区域和孔洞,以及图 7a 所示的手机外壳模型同样包含曲率平滑过渡的棱角和相对比较密集的孔洞特征,文献[13]算法求解该类区域时,根据几何判据提取栅格内的边界点出现样点缺失,造成边界提取的不完整,本文算法只依赖于样点的  $k$  邻域点集,能够避免边界点的缺失,获得的边界特征更加精确。

图 8a 所示的小鱼模型包含尖锐的棱角边界,通过局部放大可以看出在这些边界处曲率变化较大。文献[13]算法无法根据栅格的拓扑关系识别此类区域的点云特征,造成具有尖锐棱角的边界特征无法直接提取,而本文算法即可通过调

节参数  $k$  和  $\varepsilon$  获得曲率变化较大区域的边界特征点。

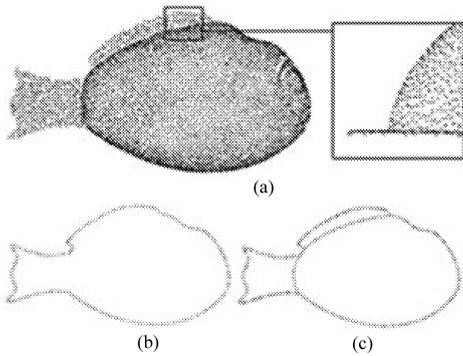


图 8 小鱼模型的边界提取

Fig. 8 Boundary abstraction of fish mold

(a) 散乱点云 (b) 文献[13]算法 (c) 本文算法

## 7 结论

(1) 采用  $R^*$  树组织散乱点云的动态空间索引结构, 可反映散乱点云样点的整体分布情况, 基于该结构实现的样点邻域查询更为准确, 有效提高了算法对均匀及非均匀数据的适应性。

(2) 采用自适应带宽的核密度估计求解点对应的模式点, 使得边界点的判别只依赖于样点邻域点集的空间分布, 避免了因样点分布不均造成的边界点误判, 从而防止了噪声点的出现, 并显著提高了边界特征提取的精度。

(3) 算法对参数的依赖性低, 仅需设定邻域点数  $k$  和阈值  $\varepsilon$ , 并可根需求调整阈值  $\varepsilon$ , 实现了边界特征提取精度的可控性。

## 参 考 文 献

- Weiss V, Andor L. Advanced surface fitting techniques[J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(1): 19~42.
- 柯映林, 肖尧先, 李江雄. 反求工程 CAD 建模技术研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2001, 13(6): 570~575.  
Ke Yinglin, Xiao Yaoxian, Li Jiangxiong. Study of CAD modeling for reverse engineering[J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2001, 13(6): 570~575. (in Chinese)
- 刘大峰, 廖文和, 戴宁, 等. 散乱点云去噪算法的研究与实现[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2007, 37(6): 1108~1112.  
Liu Dafeng, Liao Wenhe, Dai Ning, et al. Research and implementation for denoising noisy scattered point data[J]. Journal of Southeast University: Natural Science Edition, 2007, 37(6): 1108~1112. (in Chinese)
- 温银放. 数据点云预处理及特征角点检测算法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2007.  
Wen Yinfang. Research on the algorithms of point cloud pre-processing and feature corner detection [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2007. (in Chinese)
- 何朝明. 离散点云处理的关键技术研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2007.  
He Chaoming. Research on the key technologies of discrete point clouds process [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2007. (in Chinese)
- Huang J, Meng C H. Combinatorial manifold mesh reconstruction and optimization from unorganized points with arbitrary topology [J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(2): 149~165.
- 吕震, 贾明, 柯映林. 三角曲面数字样品的特征提取与再现技术[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(8): 768~771.  
Lü Zhen, Jia Ming, Ke Yinglin. Feature extraction and embedding based on the digital sample of triangular Bézier patches [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2002, 14(8): 768~771. (in Chinese)
- 钱锦锋, 陈志杨, 张三元, 等. 点云数据压缩中的边界特征检测[J]. 中国图象图形学报, 2005, 10(2): 164~169.  
Qian Jinfeng, Chen Zhiyang, Zhang Sanyuan, et al. The detection of boundary point of point cloud compression [J]. Journal of Image and Graphics, 2005, 10(2): 164~169. (in Chinese)
- 白仲栋, 彭炎午. 复杂曲面反求工程中的边界处理技术研究[J]. 机械科学与技术, 2001, 20(4): 481~483.  
Bai Zhongdong, Peng Yanwu. Study on methods for surface boundary processing in reverse engineering [J]. Mechanical Science and Technology, 2001, 20(4): 481~483. (in Chinese)
- 陈义仁, 王一宾, 彭张节, 等. 一种改进的散乱点云边界特征点提取算法[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(23): 177~180.  
Chen Yiren, Wang Yibin, Peng Zhangjie, et al. Improved algorithm for extraction of boundary characteristic point from scattered point cloud [J]. Computer Engineering and Applications, 2012, 48(23): 177~180. (in Chinese)
- 孙殿柱, 朱昌志, 李延瑞. 散乱点云边界特征快速提取算法[J]. 山东大学学报: 工学版, 2009, 39(1): 84~86.  
Sun Dianzhu, Zhu Changzhi, Li Yanrui. An improved extraction of boundary characteristic from scattered data [J]. Journal of Shandong University: Engineering Science, 2009, 39(1): 84~86. (in Chinese)
- 孙殿柱, 范志先, 李延瑞. 散乱数据点云边界特征自动提取算法[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2008, 36(8): 82~84.  
Sun Dianzhu, Fan Zhixian, Li Yanrui. Automatic extraction of boundary characteristic from scatter data [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2008, 36(8): 82~84. (in Chinese)

- Communications in Computer and Information Science, 2010, 90(1): 114 ~ 123.
- 9 Yuan Haidong, Ma Huadong, Liao Hongyu. Coordination mechanism in wireless sensor and actor networks[C] // Proceedings of the First International Multi-symposiums on Computer and Computational Sciences, Washington DC, USA, 2006: 627 ~ 634.
  - 10 Melodia T, Pompili D, Gungor V C, et al. Communication and coordination in wireless sensor and actor networks[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2007, 6(10): 1 116 ~ 1 129.
  - 11 Melodia T, Pompili D, Akyildiz I F. A communication architecture for mobile wireless sensor and actor networks[C] // 2006 3rd Annual IEEE Communications Society on Sensor and Ad Hoc Communications and Networks, Reston, USA, 2006: 109 ~ 118.
  - 12 Hossein M, Mohsen S, Morteza O. Distributed assignment of real-time tasks in wireless sensor actor networks[J]. IEICE Electronics Express, 2011, 8(7): 429 ~ 435.
  - 13 Chao G, Jantti R. Link-state clustering based on IEEE 802.15.4 MAC for wireless ad-hoc/sensor networks[C] // 2006 IEEE Wireless Communications and Networking Conference, Las Vegas, USA, 2006: 499 ~ 504.
  - 14 Dragos N, Badri N. Ad hoc positioning system (APS) using AOA[C] // 22nd Annual Joint Conference on the IEEE Computer and Communications Societies, San Francisco, USA, 2003: 1 734 ~ 1 743.
  - 15 Rakesh B K, Xue Guoliang. Angle routing protocol: location aided routing for mobile ad-hoc networks using dynamic angle selection [C] // 2002 MILCOM Proceedings: Global Information Grid-enabling Transformation through 21st Century Communications, Anaheim, USA, 2002: 501 ~ 506.
  - 16 Gilg M, Lorenz P, Rodrigues J. Location-aided routing using image representation for wireless sensor networks[C] // 2011 IEEE International Conference on Communications, Kyoto, Japan, 2011: 1 ~ 5.
  - 17 张文波,赵海,苏威积,等. 基于合同网模型的多代理协作研究[J]. 电子学报,2006,34(5):837 ~ 844.  
Zhang Wenbo, Zhao Hai, Su Weiji, et al. Research on cooperation of multiple agent based on contract-net model[J]. Chinese Journal of Electronics, 2006, 34(5): 837 ~ 844. (in Chinese)
  - 18 刘宁,邵静楠,高飞. 多 Agent 协作中改进的合同网协议[J]. 广西师范大学学报:自然科学版,2008,26(3):125 ~ 128.  
Liu Ning, Shao Jingnan, Gao Fei. Auction mechanism based contract net protocol in multi-agent cooperation [J]. Journal of Guangxi Normal University: Natural Science Edition, 2008, 26(3): 125 ~ 128. (in Chinese)
  - 19 潘刚,苏厚勤. 一种关于合同网协作改进模型的研究与实践[J]. 计算机应用与软件,2012,29(3):212 ~ 215.  
Pan Gang, Su Houqin. One kind of research and practice about contract net cooperation improvement model[J]. Computer Applications and Software, 2012, 29(3): 212 ~ 215. (in Chinese)
  - 20 彭鸿广. 激励供应商创新投入的采购拍卖机制[J]. 计算机集成制造系统,2011,11(17):2 475 ~ 2 482.  
Peng Hongguang. Auction mechanism to motivate suppliers' innovation investment [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2011, 11(17): 2 475 ~ 2 482. (in Chinese)

~~~~~

(上接第 279 页)

- 13 柯映林,范树迁. 基于点云的边界特征直接提取技术[J]. 机械工程学报,2004,40(9):116 ~ 120.  
Ke Yinglin, Fan Shuqian. Research on direct extraction of boundary from point clouds [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(9): 116 ~ 120. (in Chinese)
- 14 孙殿柱,田中朝,李延瑞,等. 基于四维聚类的 R\* -树结点分裂算法[J]. 机械工程学报,2009,45(10):180 ~ 184.  
Sun Dianzhu, Tian Zhongchao, Li Yanrui, et al. Node splitting algorithm of R\* -tree based on four-dimensional clustering [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(10): 180 ~ 184. (in Chinese)
- 15 孙殿柱,朱昌志,范志先,等. 散乱点云自适应滤波算法[J]. 北京航空航天大学学报,2011,37(1):76 ~ 80.  
Sun Dianzhu, Zhu Changzhi, Fan Zhixian, et al. Self-adaptive filtering algorithm for scattered points [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2011, 37(1): 76 ~ 80. (in Chinese)
- 16 邓飙,于传强,李天石,等. 基于估计点的双窗核密度估计算法[J]. 仪器仪表学报,2011,32(3):615 ~ 620.  
Deng Biao, Yu Chuanqiang, Li Tianshi, et al. Dual-bandwidth kernel density estimation algorithm based on estimate points [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2011, 32(3): 615 ~ 620. (in Chinese)
- 17 张保强,陈国平,郭勤涛. 结构动力学模型确认问题的核密度估计方法[J]. 机械工程学报,2011,47(17):29 ~ 36.  
Zhang Baoqiang, Chen Guoping, Guo Qintao. Structural dynamic model validation problem solution using kernel density estimation method [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(17): 29 ~ 36. (in Chinese)
- 18 Vikas R, Ramani D. Fast optimal bandwidth selection for kernel density estimation [C] // Proceedings of the 6th SIAM International Conference on Data Mining, 2006: 524 ~ 528.
- 19 Wand M P, Jones M C. Kernel smoothing [M]. London: Chapman & Hall/CRC, 1994: 1 ~ 20.
- 20 Cheng Yizong. Mean shift, mode seeking, and clustering [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 17(8): 790 ~ 799.