

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.09.033

基于分水岭和改进 MRF 的马铃薯丁粘连图像在线分割*

王开义^{1,2} 张水发^{1,2} 杨 锋^{1,2} 刘忠强^{1,2} 王晓锋^{1,2}

(1. 北京农业信息技术研究中心, 北京 100097; 2. 国家农业信息化工程技术研究中心, 北京 100097)

摘要: 针对马铃薯丁粘连图像分割问题, 提出一种融合分水岭和改进马尔科夫随机场(MRF)的分割方法。分水岭方法可以将粘连图像分割为若干一致性较好的区域, 恰好有利于 MRF 进行标记, 同时, 针对实际应用中区域势函数不一致的情况, 通过改进势函数确定 MRF 的条件概率, 使其在全局上具有一致性, 从而解决粘连分割问题。用分水岭方法对图像进行初始分割, 将图像转化为块状表示。综合考虑初始分割区域的相对高度和面积, 用改进的 MRF 标记正确分割区域和过分割区域。计算过分割区域与邻域的紧密度, 选择紧密度最大的邻域并与其合并。试验结果表明, 该方法在继承了分水岭方法优点的前提下, 解决了过分割的问题, 正确率为 95%。

关键词: 马铃薯丁 粘连 图像分割 马尔科夫随机场 分水岭 过分割

中图分类号: TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2013)09-0187-06

Online Segmentation of Clustering Diced-potatoes Using Watershed and Improved MRF Algorithm

Wang Kaiyi^{1,2} Zhang Shuifa^{1,2} Yang Feng^{1,2} Liu Zhongqiang^{1,2} Wang Xiaofeng^{1,2}

(1. Beijing Research Center for Information Technology in Agriculture, Beijing 100097, China

2. National Engineering Research Center for Information Technology in Agriculture, Beijing 100097, China)

Abstract: To solve the unsupervised segmentation problem of clustering diced-potatoes, a watershed and improved Markov random field (MRF) algorithm was proposed. The original image was easily transformed from pixel-based to region-based by watershed algorithm, which was good for labeling by MRF. At the same time, the ISING model was improved to make the consistent of probability of MRF. Firstly the original image was transformed from pixel-based to region-based by watershed algorithm. Secondly the improved MRF was applied to distinguish over-segmentation regions from right segmentation regions by fusing the relative height and area of the original segmentation regions. Finally the most compactness adjoining over-segmentation regions were connected into bigger ones. Using this algorithm, 95% of the test clusters were correctly segmented in potatoes preparations.

Key words: Diced-potato Clustering Image segmentation Markov random field Watershed Over-segmentation

引言

我国是世界主要的鲜切马铃薯丁生产和出口国家。马铃薯通过机械设备切割为马铃薯丁后, 一般合格率为 70% 左右, 需要根据客户的尺寸要求剔除不合格的马铃薯丁。目前国内马铃薯丁生产企业分级挑选环节一直依赖人工在流水线上手工操作, 人

为不确定因素时常导致产品合格率不稳定, 企业也无法获得挑选后马铃薯丁的准确合格率, 增加了马铃薯丁抽检不合格的风险, 经常有出口企业因此而遭受经济损失。

经验证明, 采用机器视觉技术挑选马铃薯丁是一种有效的方法^[1~4], 张水发等研制设备来在线监测流水线上马铃薯丁合格率, 进而指导人工挑选操

收稿日期: 2013-03-06 修回日期: 2013-04-09

* “十二五”国家科技支撑计划资助项目(2012BAD38B07)和农业科技成果转化资金资助项目(2011GB2A000004)

作者简介: 王开义, 副研究员, 主要从事农产品流通信息化、智能信息处理研究, E-mail: wangky@nercita.org.cn

作,显著降低了过度挑选造成的人工成本浪费,并提高了马铃薯丁合格率的精度和稳定性^[1]。该设备目前还存在的一个难点问题是马铃薯丁之间的粘连^[3]导致的误判,是进一步提高设备性能的关键点。

国内外学者提出了多种粘连图像分割方法,如:数学形态学方法^[5]、分水岭方法^[6-10]、傅里叶级数近似算法^[11]、基于曲率的算法^[12]、椭圆拟合方法^[13]等。

分水岭方法是图像分割中的一类有效方法,但是对噪声敏感,容易产生过分割^[7]现象,Patino^[9]根据模糊 C-均值聚类算法设计了区域之间的模糊关系,通过计算过分割区域的模糊关系进行区域合并。试验表明该方法较 Meyer^[7]方法有了较大提高。但是,直接合并 Meyer 方法的分割结果,时间开销较大,对于复杂的图像,最终分割结果仍不太理想。Ning^[10]提出一种人工引导复杂背景自然图像分割的方法。运用 Mean-Shift 算法得到初始分割结果,在后期的区域合并过程中通过简单的人工标注引导区域合并,能够从复杂背景中提取感兴趣目标。然而,该算法只有在人工监督下才能获得理想结果,难以满足自动化程度较高的系统要求。

文献[6,11,12]中的方法都是在满足一定条件的应用场景中取得了很好的效果,但对于存在大量粘连的图像来说,用上述方法很难得到满意的分割结果。本文针对马铃薯丁粘连图像分割问题,提出一种融合分水岭^[14]和改进马尔可夫随机场(MRF)^[15]的分割方法。

1 分水岭方法

分水岭方法常用在梯度图像上,梯度是图像灰度差异的度量,在连通区域中灰度差异小,容易形成梯度极小区。梯度图像的每个极小区域都对应一个初始分割区域。梯度极小区除了是灰度极大和极小区域外,还存在既不是灰度极大也不是极小区域的过渡区域和噪声区域。图像中目标的灰度应该是均匀的,但是由于光照、角度、位置和成像系统的噪声

影响,使目标灰度不均匀,存在极值区和一些灰度相近的中间区域,这些中间区域和噪声区域在梯度图像中很可能会成为极小区域被分割出来,从而造成过分割。文献[1]中的设备为了降低推广成本采用非专业光源,导致该问题尤其突出,如图1所示。其中图1b中灰色部分表示过分割区域。

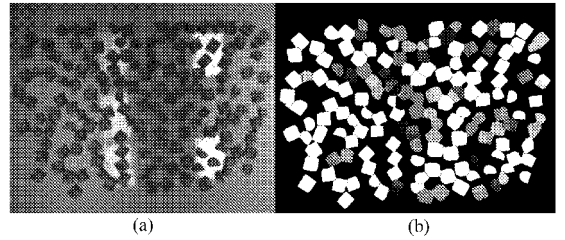


图1 过分割现象

Fig. 1 Over-segmentation

(a) 原始图像 (b) 过分割

由初始分割区域特征可见,过分割区域和正确分割区域的特征相互混合,用简单的阈值方法并不能很好区分。图2是初始分割区域的面积和相对高度分布图。针对此问题,提出融合分水岭和改进 MRF 的马铃薯丁粘连图像分割方法,算法流程如图3所示。其中,阈值分割、形态学去噪、图像变换和分水岭初始分割结果如图4所示。

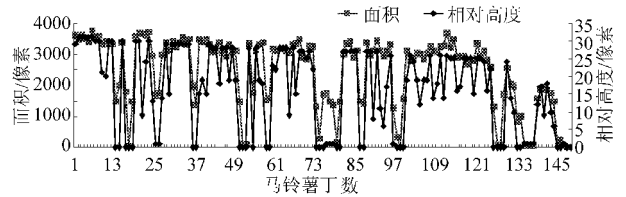


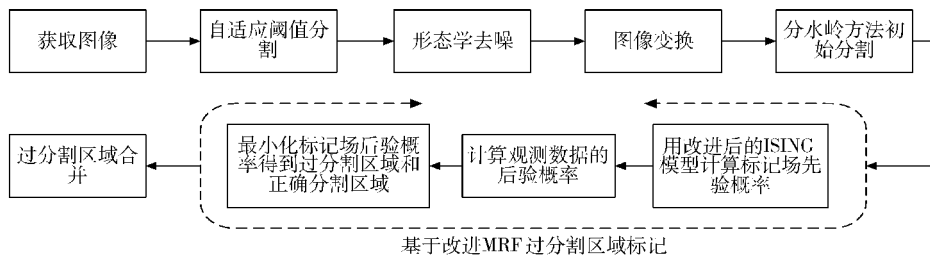
图2 区域面积与相对高度

Fig. 2 Area and relative height

2 基于改进 MRF 的区域标记与合并

2.1 新方法思想分析

用分水岭方法对图像进行初始分割,将图像分割为若干一致性较好的区域,从而转换为块状表示,但是分水岭方法容易受噪声影响,初始分割区域中正确分割区域与过分割区域同时存在,需要进行区分;通过 MRF 将区域区分问题转换为场标记问题;



基于改进MRF过分割区域标记

图3 算法流程图

Fig. 3 Flowchart

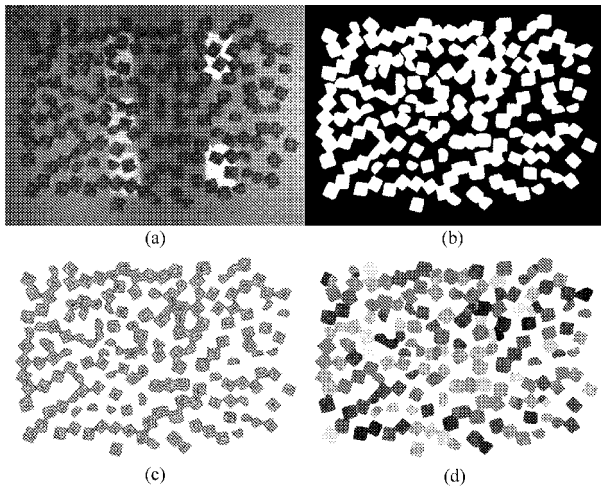


图4 中间结果图像

Fig.4 Intermediate results

(a) 原始图像 (b) 去噪后二值图像
(c) 图像变换 (d) 分水岭分割

同时,针对区域势团势能不一致的情况,通过改进 ISING 势能模型解决 MRF 在全局上的一致性问题。最后,计算过分割区域与邻域的紧密度,选择紧密度最大的邻域并与之合并,从而解决粘连图像分割问题。

2.2 基于 MRF 的过分割区域标记

分水岭^[7]初始分割区域集记为 $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, n 为区域总数, $r_1 \sim r_n$ 为分割区域,由分水岭方法得到。令观测数据集为 $F = \{f_1, f_2, \dots, f_i\}$, 其中 $f_i (0 < i < n + 1)$ 为特征向量,本文取面积和相对高度作为观测特征;令 $L = (L_{r_1}, L_{r_2}, \dots, L_{r_n})$ 为标记场, $L_{r_n} \in \Omega = \{1, 2, \dots, s_{lab}\}$, s_{lab} 是标记类别总数,本文 s_{lab} 取 2, 分别表示正确分割区域和过分割区域。将过分割问题转换为求解标记场 L

$$P(L = l | F = f) = \frac{P(L = l)P(F = f | L = l)}{P(F = f)} \quad (1)$$

式中 $P(L = l | F = f)$ —— L 的条件概率
 $P(F = f | L = l)$ —— F 的条件概率
 $P(L = l)$ —— L 的先验概率,表示区域标记概率
 f —— 观测数据的特征向量
 $P(F = f)$ —— 观测数据的先验概率
 l —— 观测数据的标记场

假设 f 中的两个特征分量:面积和相对高度相互独立,则

$$P(L = l | F = f) = \frac{\prod_{k=1}^2 [P(f^k | L = l)]P(L = l)}{P(F = f)} \quad (2)$$

式中 $P(f^k | L = l)$ —— 相对高度属于标记 l 的概率分布

$P(f^k | L = l)$ —— 面积属于标记 l 的概率分布
 f^k —— 相对高度分量 f^2 —— 面积分量
 给定 F , 有

$$P(L = l | F = f) \propto \prod_{k=1}^2 [P(f^k | L = l)]P(L = l) \quad (3)$$

令 E_L 为 $P(L = l)$, E_F 为 $\prod_{k=1}^2 [P(f^k | L = l)]$, E 表示 $P(L = l | F = f)$, 则有

$$E = E_L + E_F \quad (4)$$

假设 $P(L)$ 符合 MRF 模型的条件,因为对于大多数图像而言,当前区域是否为过分割区域只由其邻域决定。由 Hammersley - Clifford 定理^[16]: MRF 与 Gibbs 随机场^[17]等价,因此,定义 Gibbs 随机场能量函数以确定 MRF 标记场的先验概率

$$P(L) = z^{-1} e^{-\frac{1}{T}U_1(L)} \quad (5)$$

其中 $z = \sum_L e^{-\frac{1}{T}U_1(L)}$ $U_1(L) = \sum_{c \in C} V_c(L_c)$

式中 z —— 归一化常数 $V_c(L_c)$ —— 势团势能
 C —— 双点势团的集合

本文用 ISING 模型^[18]定义 $V_c(L_c)$ 。通常,双点势能被设定为固定常数,但是本文将图像由点阵表示转换为块状表示,在此基础上定义邻域,区域八连通则互为邻域。如果为邻域赋予相同的双点势能,可能出现如下 3 种结果:①某些区域因为噪声影响与其他区域相邻,赋予相同的势能,大大增加了噪声的影响。②通常来说,每个区域对全局的影响一致,如果双点势能赋予相同的系数,那么邻域越多,影响越大。③噪声区域对邻域的影响等于非噪声区域,降低了标记结果的鲁棒性。

基于以上考虑,本文将邻域之间的影响因子做归一化处理,以改进 MRF

$$V_c(L_s, L_r) = V_{[s,r]}(L_s, L_r) = \begin{cases} -\beta_s \frac{k_r}{\sum_{r \in N_s} k_r} & (L_s = L_r) \\ \beta_s \frac{k_r}{\sum_{r \in N_s} k_r} & (L_s \neq L_r) \end{cases} \quad (6)$$

式中 β_s —— 耦合系数

L_s, L_r —— 区域 s, r 对应的标号

控制区域的同构性,在各向同性的系统中, β_s 是一个常数。 r 为 s 的邻域。 N_s 为 s 的所有邻域, k_r 为 s 与 r 的紧密度,通过计算 r 和 s 的公共边长得到, $\frac{k_r}{\sum_{r \in N_s} k_r}$ 为邻域间紧密度的归一化常数。因此 E_L 为

$$E_L(\mathbf{I}) = \sum_s \beta_s \frac{k_r}{\sum_{r \in N_s} k_r} \sum_{r \in N_s} \delta(L_s, L_r) \quad (7)$$

$$\text{其中 } \delta(L_s, L_r) = \begin{cases} -1 & (L_s = L_r) \\ 1 & (L_s \neq L_r) \end{cases} \quad (8)$$

一般来说,每个标记对应的观测向量可以用高斯函数表示,即使不是精确的高斯分布,也可以用高斯函数估计。令 μ_m^k 和 σ_m^k 为 m 类标号的第 k 个特征分量的均值和方差, f_s^k 表示区域 s 的第 k 个特征分量,有

$$P(f_s^k | l_s = m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m^k} \exp\left(-\frac{(f_s^k - \mu_m^k)^2}{2\sigma_m^k}\right) \quad (9)$$

因此, $E_f(f)$ 表示为

$$E_f(f) = \sum_{s, L_s = m} \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[\frac{(f_s^k - \mu_m^k)^2}{2\sigma_m^k} + \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_m^k) \right] \right\} \quad (10)$$

于是,过分割问题转化为组合优化问题,使贝叶斯后验概率 $P(\mathbf{L}|\mathbf{F})$ 最大

$$\mathbf{L} = \arg \min \mathbf{L}(E_L(\mathbf{I}) + E_f(\mathbf{f})) \quad (11)$$

2.3 MRF 参数

为了得到最终标记场,需要计算3个参数: β_s 、 μ_m 和 σ_m 。其中, β_s 按照经验和试验结果设为4。一般来说,对于每一类标记 m ,获得 μ_m 和 σ_m 需要一系列的训练样本,但是本文采用无监督的训练方法,没有训练样本集,因此,采用期望最大化方法(Expectation maximization, EM)^[19]计算 μ_m 和 σ_m ,具体步骤如下:

(1)获取初始分割区域的特征向量(相对高度和面积)二维直方图,最大化类间距离获得初始标记。

(2)用初始标记的特征向量计算 μ_m 和 σ_m

$$\mu_m^k = \frac{1}{N_m} \sum_{s, L_s = m} f_s^k \quad (12)$$

$$\sigma_m^k = \sqrt{\frac{1}{N_m - 1} \sum_{s, L_s = m} (f_s^k - \mu_m^k)^2} \quad (13)$$

式中 N_m ——属于第 m 类标号的特征向量个数

(3)根据步骤(2)得到的 μ_m 和 σ_m ,用模拟退火法最小化式(11)并重新标记图像,更新 μ_m 和 σ_m 。

(4)重复步骤(2)和(3)直到相邻两次的差值小于一定阈值。

其中,步骤(4)的阈值根据先验知识选取。

过分割区域的标记结果如图5所示。图5b中灰色表示所有的分割区域,白色表示背景,图5c中灰色部分表示过分割区域,白色部分表示正确分割区域,黑色部分表示背景。

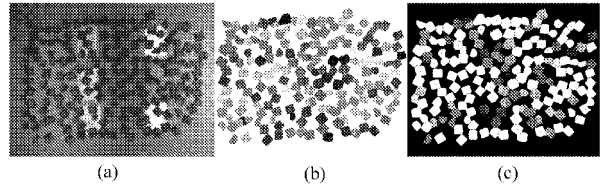


图5 过分割区域标记结果

Fig. 5 Labeling results of over-segmentation

(a) 原始图像 (b) Meyer方法分割结果
(c) 过分割区域标记结果

2.4 过分割区域合并

过分割区域可能存在2个或多个邻域,因此过分割区域合并策略也是决定粘连马铃薯丁分割效果的重要因素。

考虑过分割区域和邻域是否合并的因素不仅包括灰度相似性,还包括区域之间的距离和区域之间的公共边长。通过计算原始图像中邻域的灰度直方图和面积比例的相似度计算灰度相似性,记为 S

$$S = \frac{\sum_{j=1}^{256} jN_j}{\sum_{i=1}^{256} iN_i} \bigg/ \frac{\sum_{j=1}^{256} N_j}{\sum_{i=1}^{256} N_i} \quad (14)$$

式中 i ——当前过分割区域的灰度

N_i ——灰度 i 对应像素数

j ——当前过分割区域的邻域的灰度

N_j ——灰度 j 对应的像素数

距离为邻域重心之间的欧氏距离,记为 d ;邻域之间的影响因子通过归一化公共边长获得,记为

$$p = \frac{k_{\text{pub}}}{\sum_{r \in N_s} k_{\text{pub}}} \quad (15)$$

式中 k_{pub} ——邻域的公共边长

过分割区域与邻域的紧密度为

$$t = \alpha S + \beta d + \gamma p \quad (16)$$

式中 α 、 β 、 γ 为权重系数,根据不同的形状特征和纹理特征赋予不同的权值。马铃薯丁纹理特征单一,赋予距离更大的权值,赋予灰度相似性更低的权值。

通过相似性方法选取合并后特征与马铃薯丁类别特征最相近的区域进行合并的结果如图6b所示,

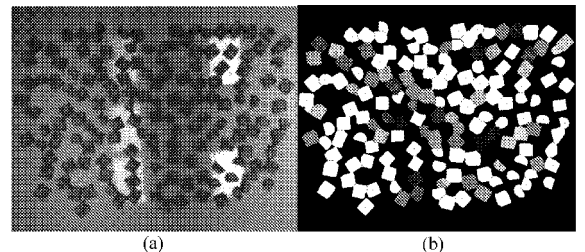


图6 区域合并

Fig. 6 Region merging

(a) 原始图像 (b) 合并结果

要合并的区域用相同灰色表示,浅灰色线表示消除的分水岭,深灰色线表示保留的分水岭,深灰色点表示初始分割区域的初始浸水点。

3 试验结果

本文以马铃薯丁作为研究对象,通过大恒 SV1410FM 型摄像机采集流水线上的马铃薯丁图像,分辨率为 1 392 像素 × 1 040 像素,共采集 8 帧,1422 个马铃薯丁作为试验样本。算法用 C++ 和 OpenCV 实现,试验平台为 DELL Precision M6600,处理器为 Intel(R) Core(TM) i7-2960XM @ 2.70 GHz(8CPUs),Windows7 操作系统。

为了比较本文方法的试验结果,用 Meyer 方法与 MRF 方法进行分割试验。分割结果如图 7、8、9 所示。从图中可以看出,本文方法相比 Meyer 方法有了很大的改进;并进一步用改进的 ISING 模型为邻域赋予不同势能的 MRF 方法更好地利用了图像的二维空间关系,更好地解决了过分割问题。统计结果如表 1 所示,初始分水岭方法存在过分割区域为 36.43% (518/1422),通过 MRF 进行过分割区域标记和合并后,82.24% 的过分割区域能被准确合并,通过改进的 MRF 方法,97.88% 的过分割区域被准确合并。

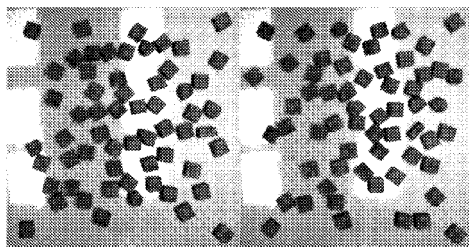


图7 Meyer 分水岭方法分割结果

Fig. 7 Segmentation results of Meyer's approach

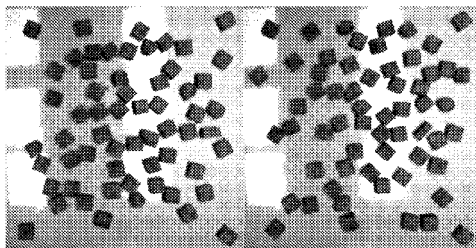


图8 基于 MRF 方法分割结果

Fig. 8 Segmentation results of MRF-based approach

为了证明本文方法的有效性,将本文方法应用到所采集的所有 8 帧图像中。尽管每帧图像的差异很大,并且算法的所有参数都不做任何改变,使用本文方法处理所有 8 帧图像都得到了满意的分割结果,能达到良好的分割精度,图 10 给出了分割比较结果。

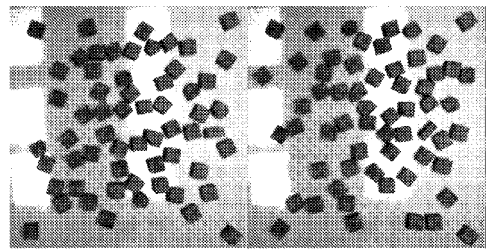


图9 基于改进的 MRF 方法分割结果

Fig. 9 Segmentation results of improved MRF-based approach

表1 分割准确率

Tab.1 Segmentation accuracy

方法	初始盆地	过分割区域	正确消除	欠分割	过分割	准确率 /%
Meyer 方法	1 422	518			518	
融合分水岭和 MRF 方法	1 422	518	426	4	88	82.24
融合分水岭和改进 MRF 方法	1 422	518	507	4	7	97.88

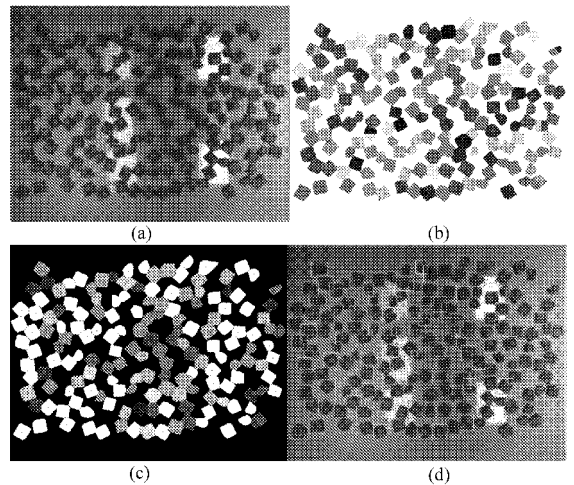


图10 试验结果

Fig. 10 Results of algorithm

(a) 原始图片 (b) Meyer 分割结果

(c) 过分割区域标记 (d) 合并结果

通过人工计算的方式得到每帧图像中马铃薯丁的个数,并且将 Meyer 方法、MRF 方法和本文方法分割后得到的马铃薯丁个数与之比较。具体结果如表 2 所示,本文方法平均错误率为 1.46%,平均检测 1 帧(图片分辨率为 1 392 像素 × 1 040 像素)耗时 10.43 ms,能够达到实时性的要求。

可见,本文方法的计数结果十分接近人工计数结果,明显优于 Meyer 和 MRF 方法。因此,试验结果表明本文方法在不同的数据集中有良好地表现。

4 结束语

针对马铃薯丁粘连图像分割问题,提出一种融合分水岭和改进 MRF 的方法。结合了分水岭方法

表2 各方法马铃薯丁计数结果

Tab.2 Error counts of the proposed method

图像 编号	粘连 整体	马铃薯丁数量				本文方法 错误率 /%	本文方法 分割时间 /ms
		人工 计算	Meyer 方法	MRF 方法	本文 方法		
1	33	180	184	2.17	12.81	2.17	12.81
2	24	186	192	3.13	10.02	3.13	10.02
3	38	191	194	1.55	10.31	1.55	10.31
4	20	162	164	1.22	8.45	1.22	8.45
5	18	163	163	0	11.88	0	11.88
6	25	170	174	2.30	9.37	2.30	9.37
7	17	170	170	0	9.53	0	9.53
8	7	200	202	0.99	11.09	0.99	11.09
平均	22.8	177.8	218.6	198.3	180.4	1.46	10.43

将粘连图像分割为若干一致性较好区域的优点和改进的 MRF 能在全局上对初始分割区域进行一致性标记的优点,解决了马铃薯丁粘连图像分割问题。试验结果表明:MRF 能很好地利用初始分割区域的空间特征,将其标记为过分割区域和正确分割区域;改进的 ISING 模型很好地降低了噪声区域的影响,显著提高过分割区域标记的准确率。本文方法分割准确率在 95% 以上。

本文在分水岭方法初始分割的基础上,用基于改进的 MRF 标记过分割区域和正确分割区域,并合并过分割区域,不仅能用来分割粘连马铃薯丁,并且能分割不同大小和形状的粘连物。

参 考 文 献

- 1 张水发,王开义,王书锋,等. 基于优化矩不变特征的鲜切菜在线分级技术[J]. 农业工程学报, 2011, 27(10): 354~358. Zhang Shuifa, Wang Kaiyi, Wang Shufeng, et al. Optimal invariant moment-based fresh-cut vegetables classification online method [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2011, 27(10): 354~358. (in Chinese)
- 2 毛璐,赵春江,王开义,等. 机器视觉在农产品物流分级检测中的应用[J]. 农机化研究, 2011, 33(7): 7~13. Mao Lu, Zhao Chunjiang, Wang Kaiyi, et al. Application of machine vision in classification and detection of agricultural products [J]. Journal of Agricultural Mechanization Research, 2011, 33(7): 7~13. (in Chinese)
- 3 荀一,鲍官军. 粘连玉米籽粒图像的自动分割方法[J]. 农业机械学报, 2010, 41(4): 163~167. Xun Yi, Bao Guanjun. Automatic segmentation of touching corn kernels in digital image [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(4): 163~167. (in Chinese)
- 4 Igathinathane C, Pordesimo L O, Columbus E P, et al. Shape identification and particles size distribution from basic shape parameters using ImageJ[J]. Computers and Electronics in Agriculture, 2008, 63(2): 163~182.
- 5 Shatadal P, Jayas D S, Bulley N R. Digital image analysis for software separation and classification of touching grains[J]. Transactions of the ASAE, 1995, 38(2): 635~643.
- 6 Qufa Zhong, Ping Zhou, Qingxing Yao, et al. A novel segmentation algorithm for clustered slender-particles[J]. Computers and Electronics in Agriculture, 2009, 69(2): 118~127.
- 7 Meyer F. Topographic distance and watershed lines[J]. Signal Processing, 1994, 38(1): 113~125.
- 8 Wang W, Paliwal J. Separation and identification of touching kernels and dockage components in digital images[J]. Canadian Biosystems Engineering, 2006, 48: 71~77.
- 9 Patino L. Fuzzy relations applied to minimize over segmentation in watershed algorithms[J]. Pattern Recognition Letters, 2005, 26(6): 819~828.
- 10 Ning Jifeng, Zhang Lei, Zhang David, et al. Interactive image segmentation by maximal similarity based region merging[J]. Pattern Recognition, 2010, 43(2): 445~456.
- 11 Mebatsion H K, Paliwal J. A fourier analysis based algorithm to separate touching kernels in digital images[J]. Biosystems Engineering, 2011, 108(1): 66~74.
- 12 Mebatsion H K, Paliwal J. Machine vision based automatic separation of touching convex shaped objects[J]. Computers in Industry, 2012, 63(7): 723~730.
- 13 Zhang G, Jayas D, White D G. Separation of touching grain kernels in an image by ellipse fitting algorithm[J]. Biosystems Engineering, 2005, 92(2): 135~142.
- 14 Roerdink JBTM, Meijster A. The watershed transform: definitions, algorithms and parallelization strategies[J]. Fundamenta Informaticae, 2000, 41(1~2): 187~228.
- 15 Zhang Y, Brady M, Smith S. Segmentation of brain MR images through a hidden Markov random field model and the expectation-maximization algorithm[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2001, 20(1): 45~57.
- 16 Yousefi S, Azmi R. Brain tissue segmentation in MR images based on a hybrid of MRF and social algorithms[J]. Medical Image Analysis, 2012, 16(4): 840~848.
- 17 Li S Z. Markov random field modeling in image analysis[M]. London: Springer, 2009.
- 18 Blume M, Emery V J, Griffiths R B. Ising model for the λ transition and phase separation in $\text{He}^3 - \text{He}^4$ mixtures[J]. Physical Review A, 1971, 4(3): 1071~1077.
- 19 Zhang Jun. The mean field theory in EM procedures for Markov random fields[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(10): 2570~2583.