doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.07.046

并联机器人可操作度分析的蒙特卡罗方法*

张建富　王健健　冯平法　李铁民
（清华大学摩擦学国家重点实验室，北京 100084）

摘要：对蒙特卡罗法生成的并联机器人工作空间上的随机点分布不均匀性进行了研究，基于多维随机变量函数的分布密度公式，推导出蒙特卡罗法生成的并联机器人工作空间点概率密度与雅可比行列式的关系式，建立了输出空间概率密度与并联机器人可操作度之间的关系。以平面两自由度 5R 并联机器人为研究对象，采用蒙特卡罗法分析了其工作空间上的可操作度，并根据工作模式将输入空间划分成 4 个子空间，指出了子空间交界处的逆向奇异性。仿真结果表明，蒙特卡罗法是分析并联机器人可操作度和逆向奇异的一种有效方法。

关键词：并联机器人　可操作度　概率密度　蒙特卡罗法　逆向奇异
中图分类号：TP24　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2013)07-0269-05

Monte Carlo Method for Manipulability Analysis of Parallel Manipulators

Zhang Jianfu　Wang Jianjian　Feng Pingfa　Li Tiemin
(*The State Key Laboratory of Tribology*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084, *China*)

Abstract: Nonuniform distribution characteristics of random points generated by Monte Carlo method in the workspace of parallel manipulators were discussed. Based on the density of distribution of the multiple random variable function, the relationship between Jacobian matrix and the probability density function of workspace points generated by Monte Carlo method was deduced, and the relationship between the probability density of the output space and the manipulability of the parallel manipulator was also constructed. The manipulability of a 2-DOF 5R parallel manipulator was analyzed based on the Monte Carlo method. According to the working mode of the robot, the input space was divided into four subspaces, and the inverse singularity occurred in the boundary among different subspaces was pointed out. Simulation experiment illustrated that the Monte Carlo method could work well for manipulability analysis of parallel manipulators.

Key words: Parallel manipulators　Manipulability　Probability density　Monte Carlo method　Inverse singularity

引言

蒙特卡罗法是以概率统计理论为指导的一类非常重要的数值计算方法，以其简单、实用、通用性强的特点而被广泛应用于机器人工作空间的研究中[1~6]。

研究发现，蒙特卡罗法生成的工作空间的随机点分布是不均匀的[3]，这种不均匀性中蕴含着与机器人运动特性有关的信息。文献[7~8]在 D-H 法求串联机器人位置正解的基础上，基于卷积理论推导出了蒙特卡罗法生成的串联机器人工作空间上点的分布不均匀程度与机器人可操作度的关系，并将其应用于蛇形机器人的可操度分析中，取得了良好效果。但是由于并联机器人与串联机器人采用不同的运动学求解方法[9~10]，该方法不能直接扩展到并联机器人的可操作度分析中。

收稿日期：2013-01-06　修回日期：2013-01-30
*国家科技重大专项资助项目(2012ZX04002-061)和摩擦学国家重点实验室基金资助项目(SKLT11C7)
作者简介：张建富，助理研究员，博士，主要从事先进制造技术研究，E-mail：zhjf@tsinghua.edu.cn
通讯作者：冯平法，教授，博士生导师，主要从事高效精密制造技术与装备研究，E-mail：fengpf@tsinghua.edu.cn

本文依据多维随机变量函数的分布密度公式[11],考虑不同的装配模式和工作模式的影响,建立蒙特卡罗法生成的并联机器人的工作空间点概率密度与机器人可操作度的关系。并以平面两自由度5R并联机器人为例,对该方法的有效性进行验证。

1 工作空间的点概率密度与可操作度的关系

1.1 多维随机变量函数的分布密度

设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_n)'$ 和 $\boldsymbol{Q}=(Q_1,\cdots,Q_i,\cdots,Q_n)'$ 是 n 维随机变量,$\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 之间有函数关系

$$\boldsymbol{X}=h(\boldsymbol{Q}) \tag{1}$$

$$X_i=h_i(Q) \tag{2}$$

对时间求导得

$$\dot{X}_i=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial Q_i}\dot{Q}_i \tag{3}$$

写成矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{Q}} \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial X_1}{\partial Q_1} & \cdots & \dfrac{\partial X_1}{\partial Q_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial X_n}{\partial Q_1} & \cdots & \dfrac{\partial X_n}{\partial Q_n}\end{bmatrix} \tag{5}$$

设方程

$$\boldsymbol{x}=h(\boldsymbol{q}) \tag{6}$$

有 m 个实数解,第 j 个解是 $\boldsymbol{q}^{(j)}=(q_1^{(j)},\cdots,q_i^{(j)},\cdots,q_n^{(j)})$。并有

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{J}_j\dot{\boldsymbol{q}}^{(j)} \tag{7}$$

设随机变量 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度为 $f_Q(\boldsymbol{q})$ 和 $f_X(\boldsymbol{x})$,由多维随机变量函数的概率密度公式[11]得到

$$f_X(\boldsymbol{x})=\sum_{j=0}^{m}f_Q(\boldsymbol{q}^{(j)})\,|\det(\boldsymbol{J}_j^{-1})| \tag{8}$$

若 $Q_i\sim U\left(a,a+\dfrac{1}{d_i}\right)$($a$、$d_i$为均匀分布的两个参数),且 Q_l 与 Q_g($1\leqslant l<g\leqslant n$)相互独立,则随机变量 Q_i 和 $\boldsymbol{Q}$ 的概率密度分别为

$$f_{Q_i}(q_i)=d_i \tag{9}$$

$$f_Q(\boldsymbol{q})=\prod_{i=0}^{n}d_i \tag{10}$$

由式(8)和式(10)得到

$$f_X(\boldsymbol{x})=\prod_{i=0}^{n}d_i\sum_{j=0}^{m}|\det(\boldsymbol{J}_j^{-1})| \tag{11}$$

式(11)将概率密度与雅可比行列式的关系联系在一起,在机器人运动性能的分析中常用雅可比行列式的绝对值$|\det(\boldsymbol{J})|$来度量其工作空间内的可操作度[12~13],这为蒙特卡罗法分析并联机器人可操作度提供了基本依据。

1.2 并联机器人可操作度分析的蒙特卡罗方法

设 n 自由度机器人的输入变量为 $\boldsymbol{Q}=(Q_1,\cdots,Q_n)'$,输出变量为 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)'$,$\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 之间存在函数关系 $\boldsymbol{X}=h(\boldsymbol{Q})$(即存在从 $\boldsymbol{Q}$ 到 $\boldsymbol{X}$ 的映射关系 h),此时机器人在一种装配模式下工作。使用蒙特卡罗法对 $\boldsymbol{Q}$ 按均匀分布进行随机取值 t 次,取值构成的输入点空间记为 $\boldsymbol{V}_Q$,计算得到的 $\boldsymbol{X}$ 构成的输出点空间记为 $\boldsymbol{V}_X$,称该过程为使用蒙特卡罗法的一次模拟。对 $\boldsymbol{V}_X$ 进行统计分析

$$f_X(\boldsymbol{x})=\lim_{s\to0}\left(\frac{P(|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}|<s)}{s}\right)=\lim_{s\to0}\left(\lim_{\mathrm{card}(\boldsymbol{V}_X)\to\infty}\left(\frac{\mathrm{card}(\{\boldsymbol{X}||\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}|<s,\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{V}_X\})}{\mathrm{card}(\boldsymbol{V}_X)s}\right)\right)=\lim_{s\to0}\left(\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\mathrm{card}(\{\boldsymbol{X}||\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}|<s,\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{V}_X\})}{ts}\right)\right) \tag{12}$$

式中$|\cdot|$表示向量的模,card(·)表示集合中元素的个数,s 表示广义体积。由式(12)可以看到,当取值次数 t 足够大,s 取值足够小时,可以使用统计量 $\dfrac{\mathrm{card}(\{\boldsymbol{X}||\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}|<s,\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{V}_X\})}{ts}$ 来近似度量 $f_X(\boldsymbol{x})$。

对蒙特卡罗法的一次模拟进行考察,在整个输出点空间 $\boldsymbol{V}_X$ 上,t 是定值,将 $\boldsymbol{V}_X$ 等分成足够小的单元,设单元中心处 $\boldsymbol{X}$ 取值为 $\boldsymbol{x}$,等分后每个单元的广义体积 s 也是定值,此时统计量 $\mathrm{card}(\{\boldsymbol{X}||\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}|<s,\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{V}_X\})$ 可以用来近似度量输出点空间 $\boldsymbol{V}_X$ 内 $f_X(\boldsymbol{x})$ 的相对大小。而对于机器人可操作的研究,更多时候是需要工作空间上相对可操作度的分布情况。

方程(6)实数解的个数 m 不同时,蒙特卡罗法分析机器人可操作度的过程会有所差异。

当 $m=1$ 时,h 是一一映射,此时式(11)退化为

$$f_X(\boldsymbol{x})=|\det(\boldsymbol{J}^{-1})|\prod_{i=0}^{n}d_i \tag{13}$$

又因为

$$|\det(\boldsymbol{J}^{-1})|=|\det(\boldsymbol{J})|^{-1} \tag{14}$$

得到

$$f_X(\boldsymbol{x})=|\det(\boldsymbol{J})|^{-1}\prod_{i=0}^{n}d_i \tag{15}$$

可以看到输出空间的点概率密度与可操作度成反比例关系,即输出空间上的点分布越密集,统计量 $\mathrm{card}(\{\boldsymbol{X}||\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}|<s,\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{V}_X\})$ 值越大,则$|\det(\boldsymbol{J})|$的值越小,可操作度越差。

当 $m>1$ 时,机器人系统的运动方程有 m 组反解,即该系统有 m 组工作模式,每组工作模式各自满足约束条件 C_{trj}。将 $\boldsymbol{V}_Q$ 按约束 C_{trj} 分成 m 个子空间

$$\boldsymbol{V}_{Qj}=\{\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{Q}\quad\text{s.t.}\quad C_{trj},\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{V}_Q\}$$

且

$$\bigcup_{j=1}^{m}\boldsymbol{V}_{Qj}=\boldsymbol{V}_Q\quad\boldsymbol{V}_{Ql}\cap\boldsymbol{V}_{Qg}=\varnothing\quad(0<l<g\leqslant m) \tag{16}$$

对应有　$\boldsymbol{V}_{Xj}=\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{X}=h(\boldsymbol{Q}),\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{V}_{Qj}\}$

在每个输出子空间 $\boldsymbol{V}_{Xj}$ 上，子空间的点概率密度为

$$f_{Xj}(\boldsymbol{x})=\left|\det\left(\boldsymbol{J}_j^{-1}\right)\right|\prod_{i=0}^{n}d_i \tag{17}$$

在控制机器人工作时，一般只在一种特定的工作模式下进行，式(17) 建立了输出子空间的点概率密度与该空间对应的工作模式下并联机器人的可操作度之间的关系，此后分析方法与 $m=1$ 时相同。

2　平面两自由度 5R 机器人运动学分析

平面两自由度 5R 对称并联机器人由 4 根杆组成，通过 5 个转动副首尾相连，其中两个杆连接到驱动平台。其机构简图如图 1 所示。

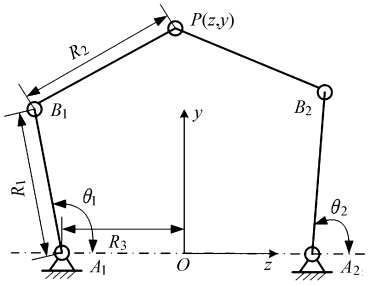

图 1　5R 对称并联机器人结构简图

Fig. 1　Schematic diagram of 5R parallel manipulator

该机构的运动学方程为

$$\begin{cases}(z-R_1\cos\theta_1+R_3)^2+(y-R_1\sin\theta_1)^2=R_2^2\\(z-R_1\cos\theta_2-R_3)^2+(y-R_1\sin\theta_2)^2=R_2^2\end{cases} \tag{18}$$

2.1　位置正解

方程(18)可化简为

$$\begin{cases}w_1y^2+w_2y+w_3=0\\z=e_1y+e_2\end{cases} \tag{19}$$

式中 w_1、w_2、w_3、e_1、e_2 是与 R_1、R_2、R_3、θ_1、θ_2 有关的系数[14]。

解方程组(19)中二元一次方程，可以得到

$$y=\frac{-w_2\pm\sqrt{w_2^2-4w_1w_3}}{2w_1} \tag{20}$$

从式(20)可以看到，5R 两自由度并联机器人有两组位置正解[14]，对应两种装配模式。当式(20)中取“+”时称为“上位形装配模式”，取“-”时称为“下位形装配模式”，如图 2 所示。

2.2　位置反解

方程(18)可变化为

$$\begin{cases}f_{1k}\lambda_k^2+f_{2k}\lambda_k+f_{3k}=0\\\theta_k=2\arctan\lambda_k\end{cases}\quad(k=1,2) \tag{21}$$

式中 f_{1k}、f_{2k}、f_{3k}、λ_k 是与 R_1、R_2、R_3、z、y 有关的系数[14]。

解方程组(21)，可得

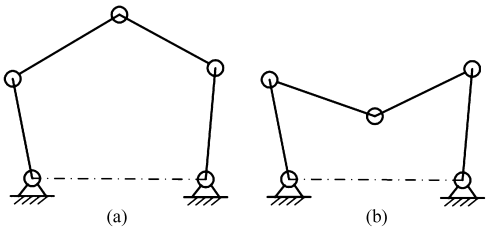

图 2　两组位置正解构型示意图

Fig. 2　Configuration of forward solution

(a) 上位形装配模式　(b) 下位形装配模式

$$\lambda_k=\frac{-f_{2k}\pm\sqrt{f_{2k}^2-4f_{1k}f_{3k}}}{2f_{1k}} \tag{22}$$

由式(22)可见，平面两自由度 5R 并联机器人有 4 组位置反解[14]，对应“++”、“+-”、“-+”、“--”4 种工作模式，如图 3 所示。

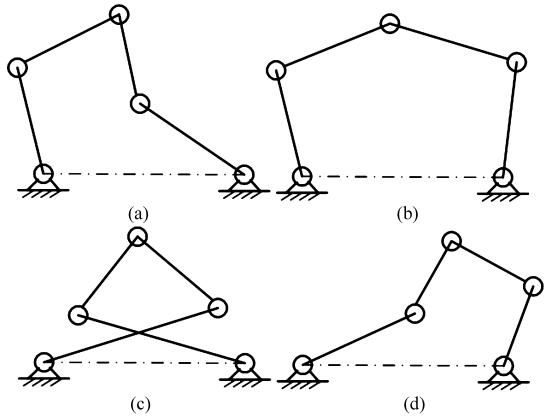

图 3　4 组位置反解构型示意图

Fig. 3　Configuration of inverse solution

(a)“++”工作模式　(b)“+-”工作模式

(c)“-+”工作模式　(d)“--”工作模式

3　基于蒙特卡罗法的 5R 机器人可操作度分析

3.1　一般方法

平面 5R 机器人的输入变量为 $\boldsymbol{Q}=(\theta_1,\theta_2)'$，输出变量为 $\boldsymbol{X}=(z,y)'$。由图 2 可知，该类型机器人具有两种装配模式。本文选取“上位形装配模式”进行研究，建立从 $\boldsymbol{Q}$ 到 $\boldsymbol{X}$ 的映射关系，此时式(20)中的“±”取“+”，运动学方程只有一个正解，满足蒙特卡罗法对输入输出变量之间函数关系的要求。平面 5R 机器人有 4 种工作模式，式(8)中 $m=4$。

使用蒙特卡罗法分析平面 5R 机器人可操作度的步骤如下：

(1) 使用均匀分布对 $(\theta_1,\theta_2)'$ 定义 t 个随机值，构成输入空间 $\boldsymbol{V}_Q$，定义时要保证 θ_1 与 θ_2 之间相互独立。

(2) 使用式(20)建立的映射关系，生成输出空间 $\boldsymbol{V}_X$，此时 $\boldsymbol{V}_Q$ 与 $\boldsymbol{V}_X$ 的元素一一对应。

(3) 通过判断是否满足 C_{trj}，将 $\boldsymbol{V}_{Qj}$ 分成 4 个子

空间 $\boldsymbol{V}_{Qj}(j=1,2,3,4)$；将 $\boldsymbol{V}_{Xj}$ 分成 4 个子空间 $\boldsymbol{V}_{Xj}$ $(j=1,2,3,4)$。

由式(22)得到：

$$C_{tr1}:2\lambda_1 f_{11}+f_{21}>0 \text{ 且 } 2\lambda_2 f_{12}+f_{22}>0$$

$$C_{tr2}:2\lambda_1 f_{11}+f_{21}>0 \text{ 且 } 2\lambda_2 f_{12}+f_{22}<0$$

$$C_{tr3}:2\lambda_1 f_{11}+f_{21}<0 \text{ 且 } 2\lambda_2 f_{12}+f_{22}>0$$

$$C_{tr4}:2\lambda_1 f_{11}+f_{21}<0 \text{ 且 } 2\lambda_2 f_{12}+f_{22}<0$$

(4) 将 $\boldsymbol{V}_{Xj}$ 等分成足够小的子单元，统计每个单元里的元素个数，画出元素个数分布图，根据式(17)分析第 j 种工作模式下平面 5R 机器人在输出空间上的可操作度。

(5) 绘出 $\boldsymbol{V}_{Qj}$ 的分布情况，分析逆向奇异位置。

3.2 分析实例

使用 Matlab 对 3.1 节的方法进行实例仿真，取 $(R_1,R_2,R_3)=(5,20,8)$，$\boldsymbol{V}_Q=\{(\theta_1,\theta_2)\mid\theta_i\in[-\pi,\pi);i=1,2\}$，$t=10^6$。取上位形装配模式进行研究，得到 4 种装配模式对应的子输出空间 $\boldsymbol{V}_{Xj}$ 上的元素分布统计图如图 4 所示。

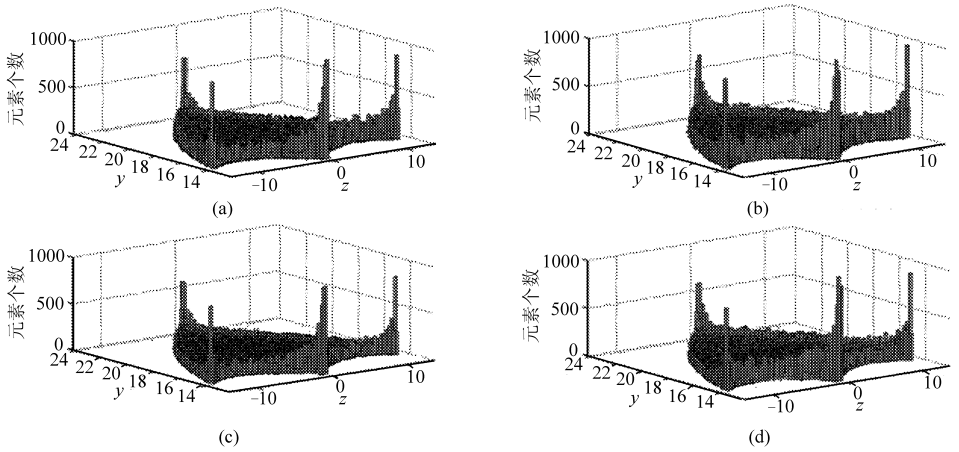

图 4 输出空间元素个数分布示意图

Fig. 4 Distribution of element numbers in output space

(a)“+ +”工作模式下 $\boldsymbol{V}_{X1}$ 分布图 (b)“+ −”工作模式下 $\boldsymbol{V}_{X2}$ 分布图

(c)“− +”工作模式下 $\boldsymbol{V}_{X3}$ 分布图 (d)“− −”工作模式下 $\boldsymbol{V}_{X4}$ 分布图

从图 4 可以看到：当平面 5R 机器人的结构参数取 $(R_1,R_2,R_3)=(5,20,8)$ 时，在上位形装配模式下，4 种工作模式对应的输出空间 $\boldsymbol{V}_{Xj}$ 都呈现以下现象：$\boldsymbol{V}_{Xj}$ 内部远离边界处的元素分布远比边界处稀疏，这说明此种机器人的输出空间内部的可操作度远高于边界处的可操作度；在 $\boldsymbol{V}_{Xj}$ 的边界上，边界拐点处的元素分布要比非拐点处密集，说明在拐点处的可操作度要低于非拐点处的可操作度；机器人在 $\boldsymbol{V}_{Xj}$ 边界拐点处的可操作度最低。

4 种装配模式对应的子输入空间 $\boldsymbol{V}_{Qj}$ 上的分布统计图如图 5 所示。

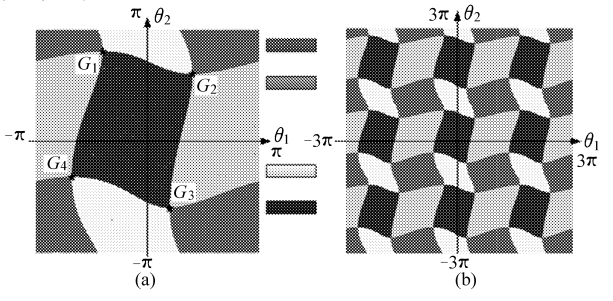

图 5 输入空间 $\boldsymbol{V}_Q$ 分布示意图

Fig. 5 Distribution of input space

(a) 输入空间 $\boldsymbol{V}_Q$ 分布图 (b) 输入空间 $\boldsymbol{V}_Q$ 拼图

从图 5a 可以看到两个子空间 $\boldsymbol{V}_{Qj}$ 之间具有明确的边界（$\boldsymbol{V}_{Qj}$ 间的边界通过图像处理技术容易确定[15]），没有出现子空间相互重合与渗透的现象；图 5b是将 9 个图 5a 按照坐标拼在一起组成图像，相同颜色的 $\boldsymbol{V}_{Qj}$ 的边界重合在一起；这说明输入子空间 $\boldsymbol{V}_{Qj}$ 是连续的，表明机器人的每种工作模式都是平滑可控的。机器人工作时，要求控制 $(\theta_1,\theta_2)'$ 在对应的 $\boldsymbol{V}_{Qj}$ 内变动，不能越过 $\boldsymbol{V}_{Qj}$ 间的边界。

在 $\boldsymbol{V}_{Qj}$ 的边界线处，式(21)解的个数发生退化，机器人发生逆向奇异：边界线处，解的个数退化成 2 个；在边界线的交点 G_j 处，解的个数退化成 1 个。图 6 表示了点 G_j 处机器人的位形。

4 结论

(1) 研究了蒙特卡罗法生成的并联机器人工作空间上的点的分布不均匀性，基于多维随机变量函数的分布密度公式，推导了其与雅可比矩阵之间的关系，建立了蒙特卡罗方法下输出空间概率密度与并联机器人可操作度的关系式，提出了一种用于并联机器人可操作度分析的新方法。

(2) 以平面两自由度 5R 并联机器人为对象，采用蒙特卡罗法分析了其在上位形装配模式下不同

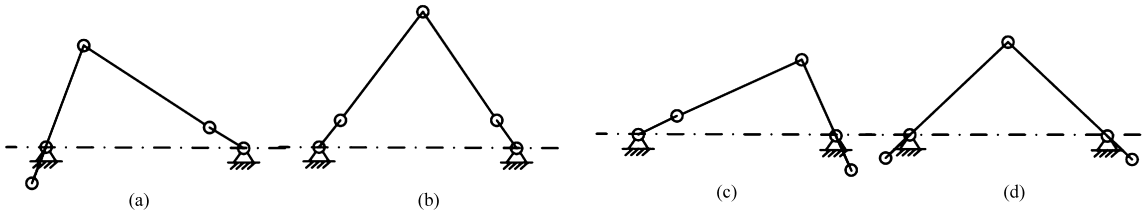

图 6　G_j 对应的机器人位形图

Fig. 6　Configuration of G_j

（a）G_1 对应的位形　（b）G_2 对应的位形　（c）G_3 对应的位形　（d）G_4 对应的位形

工作模式输出空间上的可操作度分布情况，以及不同工作模式对应的输入空间的分布情况，指出了不同输入子空间边界上存在着逆向奇异性，验证了理论研究的有效性。

参 考 文 献

1　David G, Alciatore, Chung-Ching, et al. Determining manipulator workspace boundaries using the Monte Carlo method and least squares segmentation [C]// ASME Design Engineering Division 23rd Biennial Mechanisms Conference, 1994: 141 ~ 146.

2　Snyman J A, du Plessis L J, Duffy J. An optimization approach to the determination of the boundaries of manipulator workspace [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2000, 122(4): 447 ~ 456.

3　刘志忠，柳洪义，罗忠，等. 机器人工作空间求解的蒙特卡罗法改进[J]. 农业机械学报，2013，44(1)：230 ~ 235.
Liu Zhizhong, Liu Hongyi, Luo Zhong, et al. Improvement on Monte Carlo method for robot workspace determination [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(1): 230 ~ 235. (in Chinese)

4　Kwon S J, Youm Y, Chung K C. General algorithm for automatic generation of the workspace for n-link planar redundant manipulators[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1994, 116(3): 967 ~ 969.

5　印峰，王耀南，余洪山. 基于蒙特卡罗方法的除冰机器人作业空间边界提取[J]. 控制理论与应用，2010，27(7)：891 ~ 896.
Yin Feng, Wang Yaonan, Yu Hongshan. Workspace boundary extraction of de-icing robot based on Monte Carlo method [J]. Control Theory & Application, 2000, 27(7): 891 ~ 896. (in Chinese)

6　Ebert-Uphoff I, Chirikjian G S. Efficient workspace generation for binary manipulators with many actuators [J]. Journal of Robotic Systems, 1995, 12(6): 383 ~ 400.

7　Chirikjian G S, Ebert-uphoff I. Numerical convolution on the Euclidean group with applications to workspace generation [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1998, 14(1): 123 ~ 136.

8　Wang Yunfeng, Chirikjian G S. A diffusion-based algorithm for workspace generation of highly articulated manipulators [J]. Proceedings—IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2002(2): 1 525 ~ 1 530.

9　黄真，孔宪文. 6-SPS 并联机器人机构运动分析[J]. 东北重型机械学院学报，1992，16(4)：283 ~ 289.
Huang Zhen, Kong Xianwen. Kinematic analysis of 6-SPS parallel mechanism[J]. Journal of Northeast Heavy Machinery Institute, 1992, 16(4): 283 ~ 289. (in Chinese)

10　黄真，孔令富，方跃华. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京：机械工业出版社，1997.

11　盛骤等. 概率论与数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，2010.

12　杨新刚，黄玉美，杨文栋，等. 基于可操作性的串联机器人相对传动比优化[J]. 农业机械学报，2009，40(8)：209 ~ 213.
Yang Xin'gang, Huang Yumei, Yang Wendong, et al. Relative proportion of serial robot transmission ratios optimization based on manipulability [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(8): 209 ~ 213. (in Chinese)

13　Yoshikawa T. Manipulability of robotic mechanism [J]. International Journal of Robotics Research, 1985, 4(2): 3 ~ 9.

14　Liu Xinjun, Wang Jinsong, Pritschow Gfinter. Kinematics, singularity and workspace of planar 5R symmetrical parallel mechanisms [J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(2): 145 ~ 169.

15　曹智睿，张铁强，李洋，等. 基于小波技术的模糊边界定位方法研究[J]. 光电子·激光，2007，18(12)：1 462 ~ 1 464.
Cao Zhirui, Zhang Tieqiang, Li Yang, et al. The research define the illegibility borderline based on microwave technology[J]. Journal of Optoelectronics·Laser, 2007, 18(12): 1 462 ~ 1 464. (in Chinese)