

基于分形理论的结合面法向接触阻尼与损耗因子模型^{*}

张学良 丁红钦 兰国生 温淑花 张宗阳 王南山

(太原科技大学机械工程学院, 太原 030024)

摘要: 基于结合面法向阻尼耗能机理及 MB 接触分形修正模型, 提出了一种结合面法向接触阻尼模型及结合面间阻尼损耗因子模型。仿真结果表明, 分形维数在较小范围内, 法向阻尼与法向总载荷呈微凹弧非线性关系, 且随着法向总载荷和分形维数的增大而减小, 随着分形尺度参数的增大而增大; 分形维数在较大范围内, 法向阻尼与法向总载荷呈微凸弧非线性关系, 且随着法向总载荷和分形维数的增大而增大, 随着分形尺度参数的增大而减小。而结合面损耗因子与法向总载荷呈微凹弧非线性关系且随着法向总载荷的增大而减小, 随着分形尺度参数的增大而增大, 分形维数在较大值范围内, 结合面损耗因子随其增大而增大。

关键词: 结合面 分形理论 法向阻尼 损耗因子

中图分类号: TH113.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2013)06-0287-08

Normal Contact Damping and Dissipation Factor Model of Joint Interfaces Based on Fractal Theory

Zhang Xueliang Ding Hongqin Lan Guosheng Wen Shuhua Zhang Zongyang Wang Nanshan

(College of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: Based on the modified MB fractal model and mechanism of contact normal damping dissipating energy, a fractal model of normal damping of joint interfaces was proposed. Furthermore, numerical simulation revealed that the micro concave nonlinear relation of normal damping versus dimensionless total normal load was very evident, which decreased with increasing fractal dimension and normal total load, and increased with increasing fractal scale parameter in the smaller fractal dimension. Besides, the micro convex nonlinear relation of normal damping versus dimensionless total normal load was also very evident, which increased with increasing fractal dimension and normal total load, and decreased with increasing fractal scale parameter in the larger fractal dimension. But the micro concave nonlinear relation of normal dissipation factor versus dimensionless total normal load was very evident, which decreased with increasing normal total load, and increased with increasing fractal scale parameter and fractal dimension.

Key words: Joint interfaces Fractal theory Normal damping Dissipation factor

引言

结合面在机械结构中大量存在, 当受到动载荷作用时, 结合面会产生微小的相对线位移或角位移, 使结合面既存储能量又消耗能量, 表现出既有弹性又有阻尼, 即存在接触刚度和接触阻尼, 严重影响机械结构的静、动态特性^[1]。对于机床、齿轮箱、动力

机械等, 其总阻尼的 90% 以上来源于结合面的接触阻尼。和机械零件本身的阻尼相比, 结合面接触阻尼占绝对优势^[2]。文献[3~11]对于结合面接触刚度和接触阻尼进行了研究, 提出了结合面法向和切向接触刚度分形模型, 也提出了结合面法向阻尼和切向阻尼模型。

本文基于结合面法向阻尼耗能机理及文献[12~

收稿日期: 2012-04-21 修回日期: 2012-05-10

^{*} 国家自然科学基金资助项目(51275328)、山西省回国留学人员科研资助项目(2011-076)和山西省自然科学基金资助项目(2012011023-4)

作者简介: 张学良, 教授, 博士生导师, 主要从事机械结构动态特性和现代优化理论研究, E-mail: zhang_xue_l@sina.com

13]中的MB接触分形修正模型,提出一种基于分形理论的结合面法向接触阻尼模型,并通过对法向阻尼和损耗因子的数字仿真揭示各相关参数对其的影响规律。

1 结合面建模

为了能够更准确地得到结合面最大接触点的实际接触面积 a_i 与粗糙表面的真实接触面积 A_r 之比 a_i/A_r , Wang 和 Komvopoulos^[12-13] 引入了微接触大小分布的域扩展因子 ψ , 微接触截面积分布函数为

$$n(a') = \frac{D}{2} \psi^{\frac{2-D}{2}} a_i^{\frac{D}{2}} a'^{-\frac{D+2}{2}} \quad (0 < a' \leq a_i) \quad (1)$$

式中 a_i ——最大微接触截面积

ψ ——扩展系数 D ——分形维数

可以通过二分法得到 ψ 的值,即

$$\frac{\psi^{(2-D)/2} - (1 + \psi^{-D/2})^{-(2-D)/D}}{(2-D)/D} = 1 \quad (\psi > 1)$$

结合面实质上是由 2 个粗糙表面组成的,可以将其简化为 1 个粗糙表面与 1 个刚性平面的接触问题,微凸体和刚性表面接触示意图如图 1 所示^[12]。图中 r' 为微接触截面积的半径, r 为微接触半径, δ 为法向变形量, R 为微凸体曲率半径。微接触截面积 a' 是被刚性平面所截得的微凸体截面的面积,即 $a' = \pi r'^2$ 。微凸体曲率半径 R 可表示为 $R^2 = (R - \delta)^2 + r'^2$, 根据变形后微凸体的几何形状,考虑到 $R \gg \delta$, 则有 $r'^2 = 2R\delta$, 即 $a' = \pi r'^2 = 2\pi R\delta$, 因此

$$R = \frac{a'}{2\pi\delta} \quad (2)$$

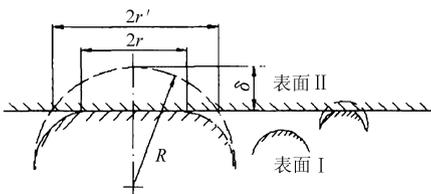


图 1 当量粗糙表面 I 与理想刚性表面 II 的接触

Fig. 1 A rough surface I with spherical asperities in contact with a rigid flat surface II

根据文献[12]微凸体顶端的变形量 δ 与微接触截面积 a' 的关系式为

$$\delta = G^{D-1} a'^{\frac{2-D}{2}} \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)中,得到微凸体曲率半径

$$R = \frac{a'^{\frac{D}{2}}}{2\pi G^{D-1}} \quad (4)$$

据赫兹理论弹性接触点上接触面积与载荷的关系式为^[14]

$$P_c = \frac{4}{3} E^* R^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}} \quad (5)$$

结合面的复合弹性模量可以表示为

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

式中 E^* ——两接触材料复合弹性模量

E_1, E_2 ——两接触材料弹性模量

ν_1, ν_2 ——两接触材料泊松比

将式(3)、(4)代入式(5)中得

$$P_c(a') = \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} E^* G^{D-1} a'^{\frac{3-D}{2}} \quad (6)$$

塑性接触点上截面积 a' 与法向塑性接触载荷 P_p 的关系为^[15]

$$P_p = k\sigma_y a = Ha = Ha' \quad (7)$$

式中 H ——较软材料硬度

σ_y ——较软材料屈服强度

因此,结合面法向载荷 P 与结合面真实接触面积之间的关系为

$$P = \frac{4E^* G^{D-1}}{3\sqrt{2\pi}} \int_{a_c}^{a_i} n(a') a'^{\frac{3-D}{2}} da' + k\sigma_y \int_0^{a_c} n(a') a' da' \quad (8)$$

当 $1 < D < 2, D \neq 1.5$ 时

$$P = \frac{4E^* DG^{D-1} \psi^{\frac{2-D}{2}}}{3\sqrt{2\pi}(3-2D)} a_i^{\frac{D}{2}} \left(a_i^{\frac{3-2D}{2}} - a_c^{\frac{3-2D}{2}} \right) + \frac{Dk\sigma_y \psi^{\frac{2-D}{2}}}{2(2-D)} a_i^{\frac{D}{2}} a_c^{\frac{2-D}{2}} = \frac{2^{\frac{6-D}{2}} E^* DG^{D-1} \psi^{\frac{2-D}{2}}}{3\sqrt{\pi}(3-2D)} a_i^{\frac{D}{2}} \left(a_i^{\frac{3-2D}{2}} - a_c^{\frac{3-2D}{2}} \right) + \frac{Dk\sigma_y \psi^{\frac{2-D}{2}}}{2-D} a_i^{\frac{D}{2}} a_c^{\frac{2-D}{2}} \quad (9)$$

当 $D = 1.5$ 时

$$P = \frac{E^* G^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} a_i^{\frac{3}{4}} \ln \frac{a_i'}{a_c'} + \frac{3}{2} k\sigma_y \psi^{\frac{1}{4}} a_i^{\frac{3}{4}} a_c'^{\frac{1}{4}} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} E^* G^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{4}} a_i^{\frac{3}{4}} \ln \frac{a_i}{a_c} + 3k\sigma_y \psi^{\frac{1}{4}} a_i^{\frac{3}{4}} a_c^{\frac{1}{4}} \quad (10)$$

结合面无量纲法向总载荷为

$$P^* = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} G^{*D-1} g_2(D) \psi^{\frac{2-D}{2}} \cdot$$

$$A_r^{\frac{D}{2}} \left[\psi^{\frac{-2D^2+7D-6}{4}} \left(\frac{2-D}{D} \right)^{\frac{3-2D}{2}} A_r^{\frac{3-2D}{2}} - a_c^{\frac{3-2D}{2}} \right] +$$

$$k\varphi g_3(D) \psi \left(\frac{2-D}{2} \right)^2 A_r^{\frac{D}{2}} a_c^{\frac{2-D}{2}} \quad (D \neq 1.5) \quad (11)$$

$$P^* = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} G^{*\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{16}} \left(\frac{A_r^*}{3} \right)^{\frac{3}{4}} \ln \left(\frac{A_r^*}{3\psi^{\frac{1}{4}} a_c^*} \right) +$$

$$3k\varphi \psi^{\frac{1}{16}} \left(\frac{A_r^*}{3} \right)^{\frac{3}{4}} a_c^{\frac{1}{4}} \quad (D = 1.5) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad P^* &= \frac{P}{E^* A_a} \quad k = \frac{H}{\sigma_y} \quad \varphi = \frac{\sigma_y}{E^*} \\ g_2(D) &= 2^{\frac{6-D}{2}} \left(\frac{2-D}{D} \right)^{\frac{D}{2}} \frac{D}{3-2D} \\ g_3(D) &= \left(\frac{D}{2-D} \right)^{\frac{2-D}{2}} \end{aligned}$$

2 结合面法向接触阻尼模型

(1) 弹性接触区单个微凸体弹性应变能为

$$\omega_e = \int_0^\delta P_e d\delta = \int_0^\delta \frac{4}{3} E^* R^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}} d\delta = \frac{8}{15} E^* R^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{5}{2}} \quad (13)$$

弹性接触区产生的弹性应变能为

$$\begin{aligned} W_e &= \int_{a'_c}^{a'_i} \omega_e n(a') da' = \int_{a'_c}^{a'_i} \frac{8}{15} E^* \left(\frac{a'^{\frac{D}{2}}}{2\pi G^{D-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left(G^{D-1} a'^{\frac{2-D}{2}} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{D}{2} \psi^{\frac{2-D}{2}} a_i^{\frac{D}{2}} a'^{-\frac{D+2}{2}} da' = \\ &\quad \frac{8E^* DG^{2(D-1)}}{15\sqrt{2\pi}(5-3D)} \psi^{\frac{2-D}{2}} \left(a_i^{\frac{5-2D}{2}} - a_i^{\frac{D}{2}} a_c^{\frac{5-3D}{2}} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

(2) 塑性接触区单个微凸体塑性应变能为

$$\omega_p = \int_0^\delta P_p d\delta = \int_0^\delta k\sigma_y a d\delta = k\sigma_y a' \delta \quad (15)$$

塑性接触区微凸体塑性应变能为

$$\begin{aligned} C_n^* &= \frac{15k\varphi\sqrt{\pi}(5-3D)a_c^{*2-D} \left\{ \frac{2D}{\sqrt{\pi}(1-D)} \left(\frac{2-D}{D} \right)^{\frac{D}{2}} \psi^{\frac{(D-2)2}{4}} A_r^{\frac{D}{2}} \left[\psi^{\frac{-D2+3D-2}{4}} \left(\frac{2-D}{D} \right)^{\frac{1-D}{2}} A_r^{*1-\frac{D}{2}} - a_c^{*1-\frac{D}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{8-D}{2}} G^{*D-1} (2-D) \left[\psi^{\frac{-3D2+11D-10}{4}} \left(\frac{2-D}{D} \right)^{\frac{5-3D}{2}} A_r^{* \frac{5-3D}{2}} - a_c^{* \frac{5-3D}{2}} \right]} \quad (21) \end{aligned}$$

$$\text{其中} \quad C_n^* = \frac{C_n}{A_a^{\frac{1}{4}} \sqrt{ME^*}} \quad G^* = \frac{G}{A_a^{\frac{1}{2}}} \quad A_r^* = \frac{A_r}{A_a}$$

式中 A_a ——名义接触面积

A_r^* ——无量纲真实接触面积

A_r ——真实接触面积

G^* ——无量纲特征长度尺度参数

G ——特征长度尺度参数

3 结合面法向阻尼分形模型数字仿真

由式(11)、(12)、(18)和(20)可知,给定一固定的无量纲真实接触面积 A_r^* ,可计算得到无量纲法向总载荷 P^* 、法向阻尼 C_n^* 和阻尼损耗因子 η 。根据文献[9]及文献[16],给定 φ 分别为 1.0、0.1 和 0.01, $A_a = 10^{-6} \text{ m}^2$, $H = 9 \text{ GPa}$, $E^* = 130 \text{ GPa}$, G 分别为 10^{-12} 、 10^{-13} 和 10^{-14} m , G^* 分别为 10^{-9} 、 10^{-10} 和 10^{-11} , D 分别取 1.1~1.9, 仿真计算结果如图 2~11 所示。

$$\begin{aligned} W_p &= \int_0^{a'_c} \omega_p n(a') da' = \int_0^{a'_c} k\sigma_y a' G^{D-1} a'^{\frac{2-D}{2}} \cdot \\ &\quad \frac{D}{2} \psi^{\frac{2-D}{2}} a_i^{\frac{D}{2}} a'^{-\frac{D+2}{2}} da' = \frac{k\sigma_y DG^{D-1}}{2(2-D)} \psi^{\frac{2-D}{2}} a_i^{\frac{D}{2}} a_c'^{2-D} \quad (16) \end{aligned}$$

结合面法向阻尼损耗因子为

$$\eta = \frac{W_p}{W_e} = \frac{15\sqrt{2\pi}k\sigma_y(5-3D)a_c'^{2-D}}{16E^*G^{D-1}(2-D)(a_i^{\frac{5-3D}{2}} - a_i^{\frac{D}{2}}a_c^{\frac{5-3D}{2}})} \quad (17)$$

根据文献[5]结合面法向接触刚度为

$$K_n = \frac{2E^*D}{\sqrt{2\pi}(1-D)} \psi^{\frac{2-D}{2}} a_i^{\frac{D}{2}} \left(a_i^{\frac{1-D}{2}} - a_c^{\frac{1-D}{2}} \right) \quad (18)$$

设定粗糙表面所在基体质量为 M , 则法向阻尼系数为^[4]

$$C_n = \eta \sqrt{MK_n} \quad (19)$$

将式(17)、(18)代入式(19)得

$$\begin{aligned} C_n &= \eta \sqrt{MK_n} = \frac{15\sqrt{2\pi}k\sigma_y(5-3D)a_c'^{2-D}}{16E^*G^{D-1}(2-D)(a_i^{\frac{5-3D}{2}} - a_c^{\frac{5-3D}{2}})} \\ &\quad \sqrt{M \frac{2E^*D}{\sqrt{2\pi}(1-D)} \psi^{\frac{2-D}{2}} a_i^{\frac{D}{2}} (a_i^{\frac{1-D}{2}} - a_c^{\frac{1-D}{2}})} \quad (20) \end{aligned}$$

对式(20)进行无量纲化,可以得到无量纲法向阻尼为

仿真计算结果表明:

(1) 分形维数 D 在 1.1~1.4 范围内,结合面法向阻尼 C_n^* 与法向总载荷 P^* 呈微凹弧非线性关系,随着法向总载荷的增大而减小,如图 2a~2d 所示;分形维数 D 在 1.5~1.9 范围内,法向阻尼 C_n^* 与法向总载荷 P^* 呈微凸弧非线性关系,随着法向总载荷的增大而增大,如图 2e~2h 所示。结合面损耗因子 η 与法向总载荷 P 呈微凹弧非线性关系且随着法向总载荷的增大而减小,如图 8a~8d 所示。

(2) 当 φ 为 1.0、0.1 和 0.01 时, D 在 1.1~1.6 范围内,结合面法向阻尼 C_n^* 随着分形维数 D 的增大而减小,如图 3a~3b、图 4a~4b、图 5a~5b 所示; D 在 1.5~1.9 范围内,法向阻尼 C_n^* 随着分形维数 D 的增大而增大,如图 3c~3d、图 4c~4d、图 5c~5d 所示。结合面损耗因子 η 随着分形维数 D 的增大而增大,如图 9 所示。

(3) 分形维数 D 在 1.1~1.5 范围内,结合面法

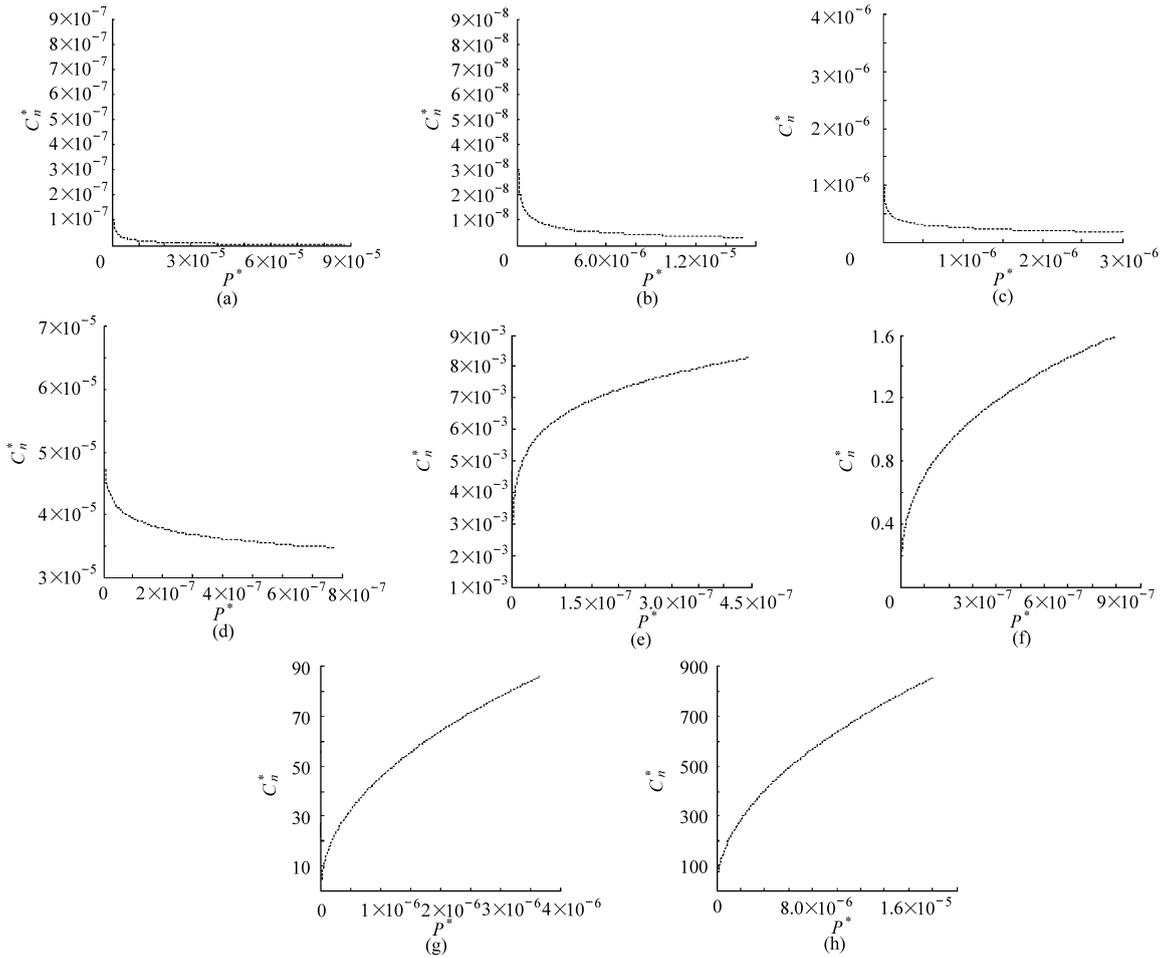


图2 C_n^* 随 P_n^* 的变化规律 ($k=1.0, \varphi=1.0, G^*=10^{-10}$)

Fig.2 Change of C_n^* with P_n^*

(a) $D=1.1$ (b) $D=1.2$ (c) $D=1.3$ (d) $D=1.4$ (e) $D=1.5$ (f) $D=1.6$ (g) $D=1.7$ (h) $D=1.8$

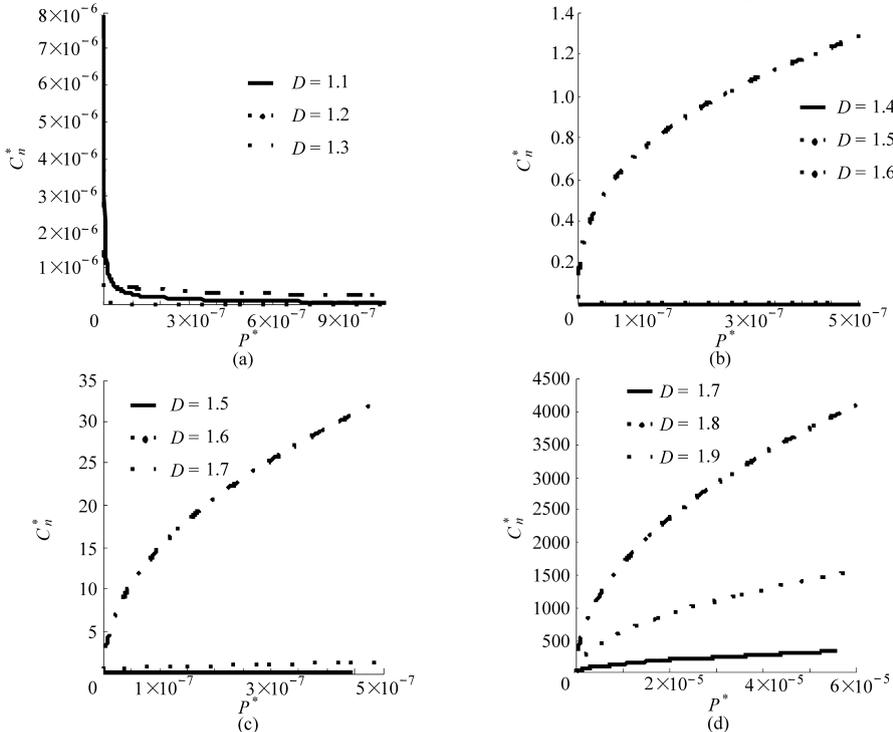


图3 D 对 C_n^* 的影响曲线 ($k=1.0, \varphi=1.0, G^*=1.0 \times 10^{-10}$)

Fig.3 Influence of D on C_n^*

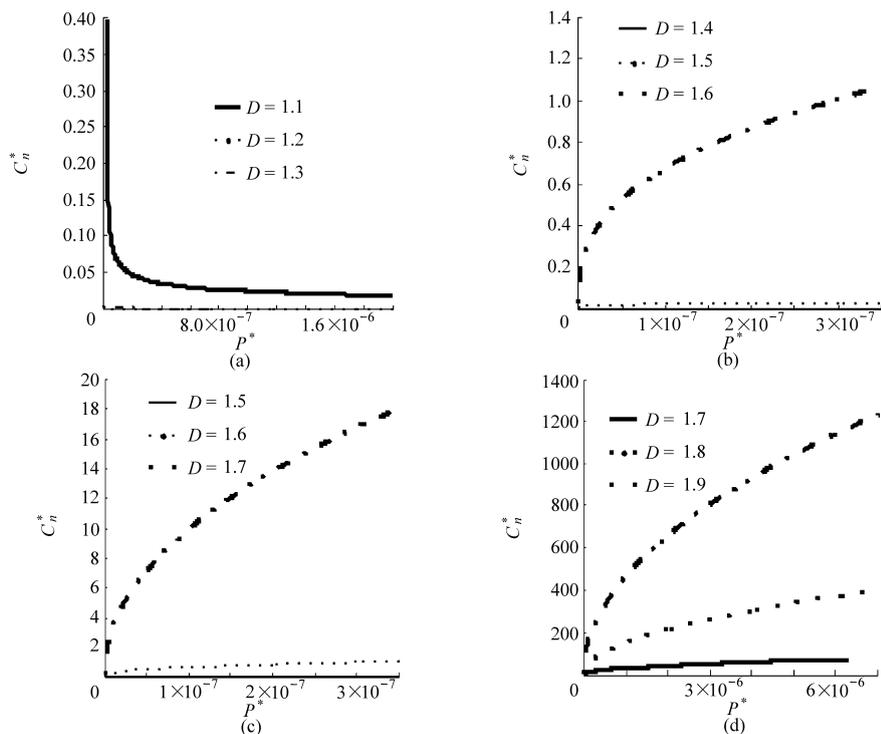


图 4 D 对 C_n^* 的影响曲线 ($k=1.0, \varphi=0.1, G^*=10^{-10}$)

Fig.4 Influence of D on C_n^*

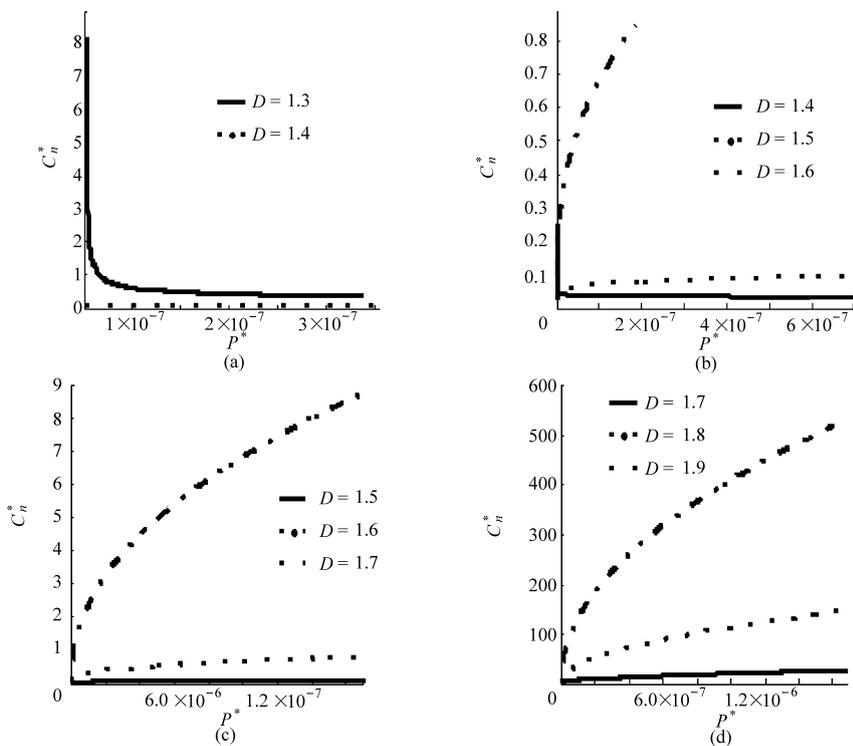


图 5 D 对 C_n^* 的影响曲线 ($k=1.0, \varphi=0.01, G^*=10^{-10}$)

Fig.5 Influence of D on C_n^*

向阻尼 C_n^* 随着分形特征长度尺度参数 G^* 的增大而增大,如图 6a ~ 6d 所示; D 在 1.6 ~ 1.9 范围内,结合面法向阻尼 C_n^* 随着分形特征长度尺度参数 G^* 的增大而减小,如图 6e ~ 6f 所示。结合面损耗因子 η 随着分形特征长度尺度参数 G 的增大而增大,如图 10a ~ 10f 所示。

(4) 结合面法向阻尼 C_n^* 随着 k 和 φ 的增大而增大,如图 7 所示。

4 结论

(1) 提出一种基于分形理论的结合面法向阻尼、损耗因子接触模型。

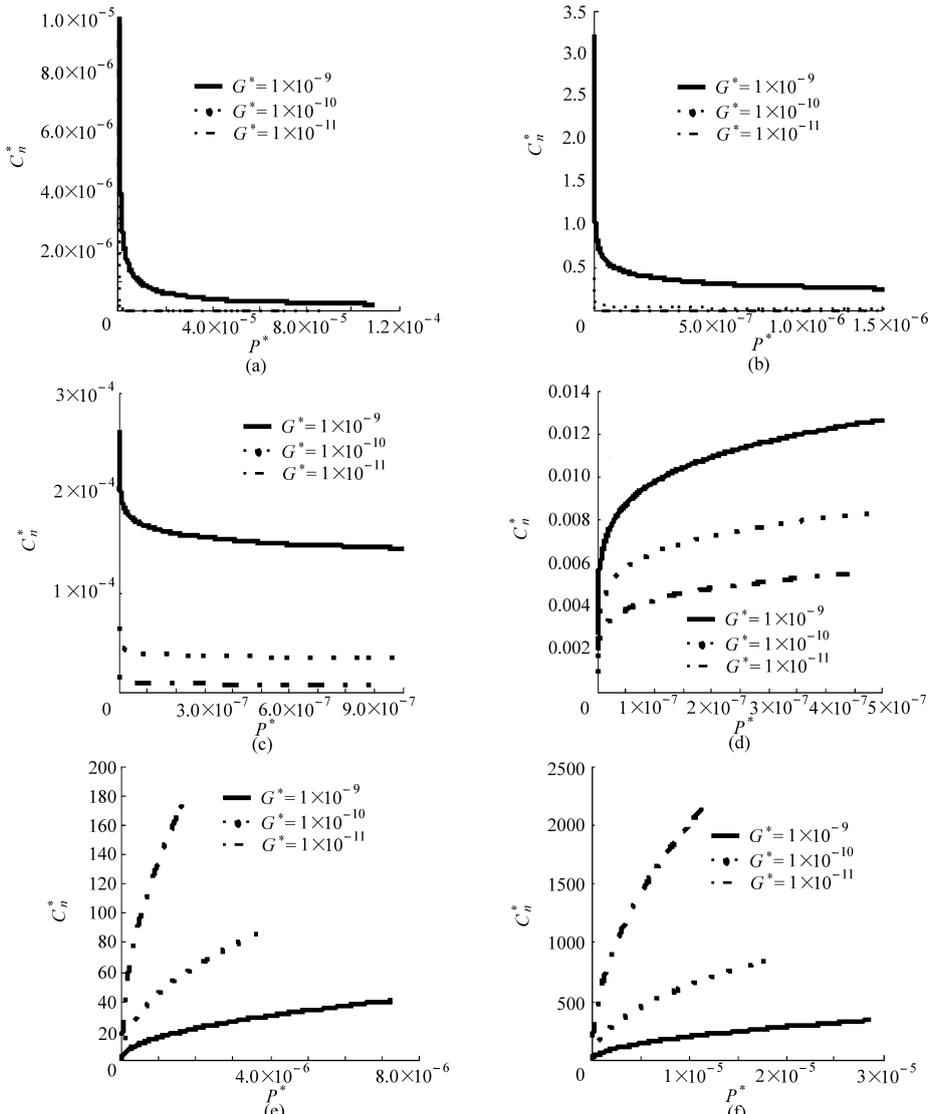


图6 G^* 对 C_n^* 的影响曲线 ($k=1.0, \varphi=1.0, G^*=10^{-10}$)

Fig.6 Influence of G^* on C_n^*

(a) $D=1.1$ (b) $D=1.3$ (c) $D=1.4$ (d) $D=1.5$ (e) $D=1.7$ (f) $D=1.8$

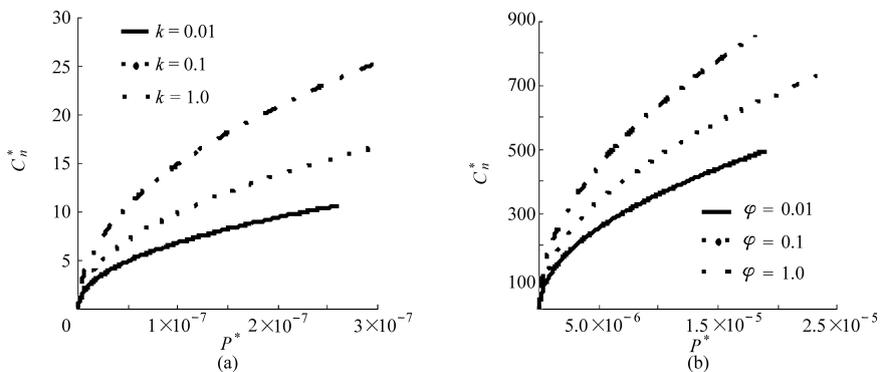


图7 k 和 φ 对 C_n^* 的影响曲线 ($G^*=10^{-10}$)

Fig.7 Influence of k and φ on C_n^*

(a) $D=1.7, \varphi=1.0$ (b) $D=1.8$

(2) 分形维数在较小范围内,法向阻尼与法向总载荷呈微凹弧非线性关系,且随着法向总载荷和分形维数的增大而减小,随着分形尺度参数的增大而增大;分形维数在较大范围内,法向阻尼与法向总

载荷呈微凸弧非线性关系,且随着法向总载荷和分形维数的增大而增大,随着分形尺度参数的增大而减小。而结合面损耗因子与法向总载荷呈微凹弧非线性关系且随着法向总载荷的增大而减小,分形维

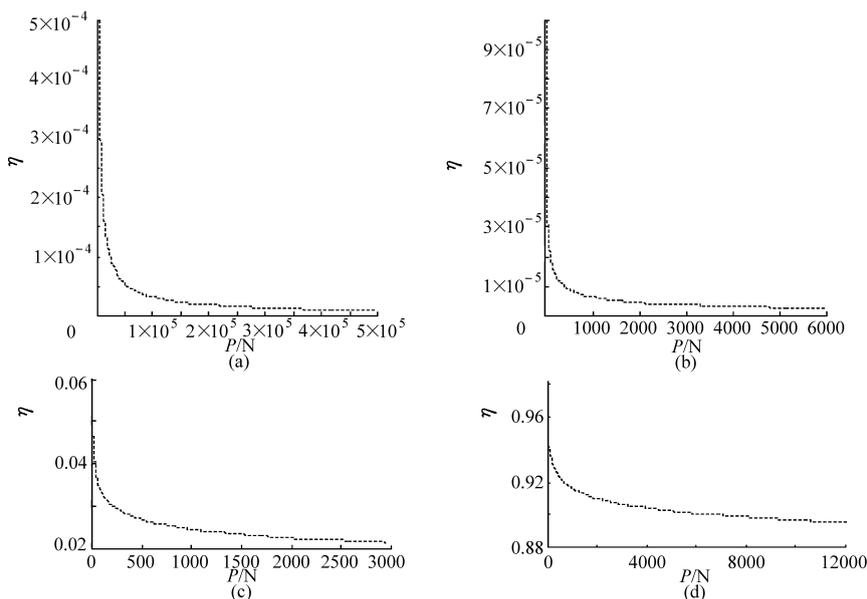


图 8 η 随 P 的变化规律 ($G = 10^{-13} \text{ m}$)

Fig. 8 Change of η with P

(a) $D = 1.2$ (b) $D = 1.4$ (c) $D = 1.6$ (d) $D = 1.7$

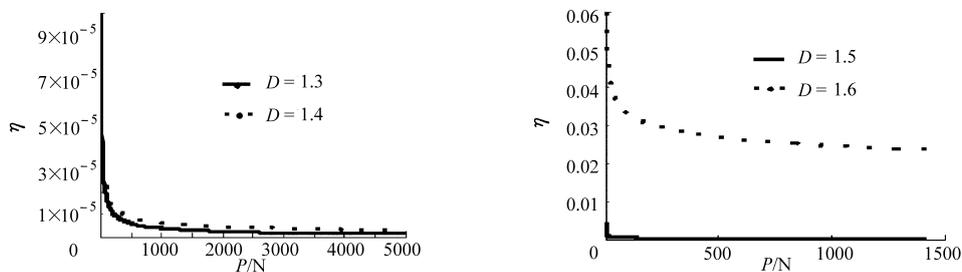


图 9 D 对 η 的影响曲线 ($G = 10^{-13} \text{ m}$)

Fig. 9 Influence of D on η

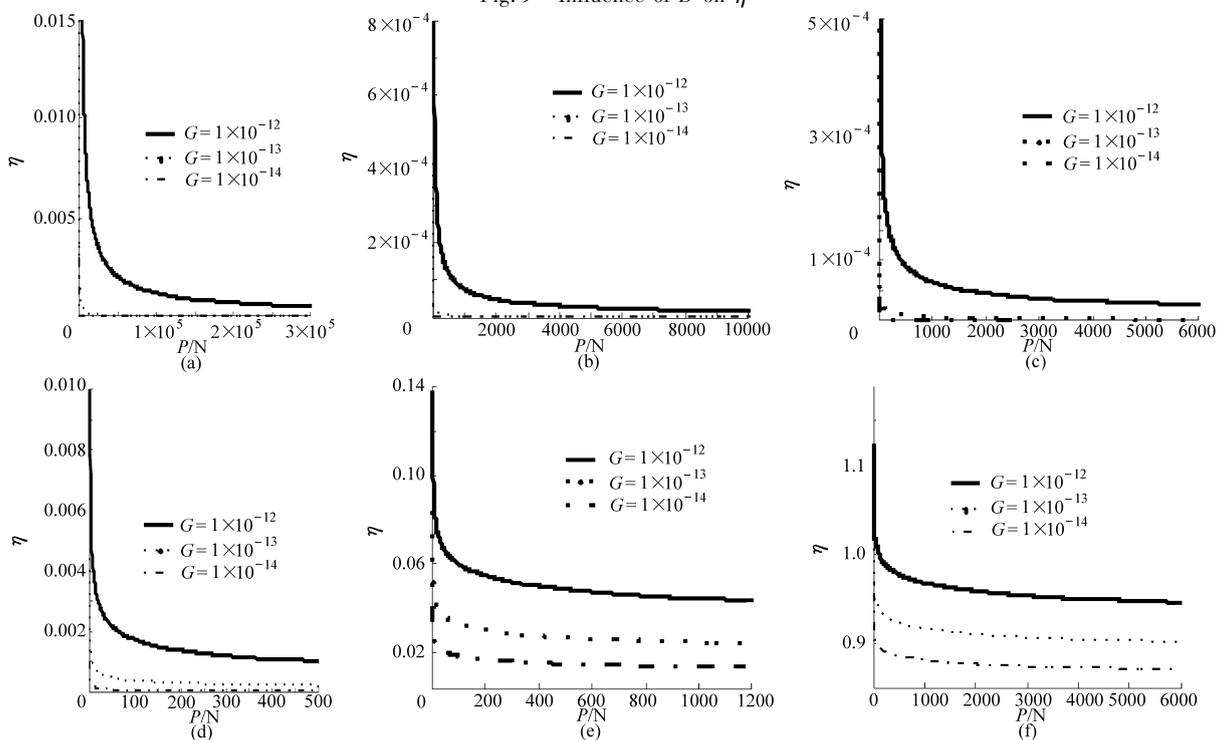


图 10 G 对 η 的影响曲线

Fig. 10 Influence of G on η

(a) $D = 1.2$ (b) $D = 1.3$ (c) $D = 1.4$ (d) $D = 1.5$ (e) $D = 1.6$ (f) $D = 1.7$

数在较大值范围内,结合面损耗因子随其增大而增大。

合面法向阻尼、损耗因子和法向载荷的分析与计算提供了一种参考。

(3) 结合面接触阻尼模型和损耗因子模型为结

参 考 文 献

- 1 张学良. 机械结合面动态特性及应用[M]. 北京:中国科技出版社,2002:1~2.
- 2 戴德沛. 阻尼减振降噪技术[M]. 西安:西安交通大学出版社,1986.
- 3 张学良,黄玉美,温淑花. 结合面接触刚度分形模型研究[J]. 农业机械学报,2000,31(4):89~91.
Zhang Xueliang, Huang Yumei, Wen Shuhua. Fractal model of contact stiffness of joint surfaces[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2000,31(4):89~91. (in Chinese)
- 4 尤晋闽,陈天宇. 结合面法向动态参数的分形模型[J]. 西安交通大学学报,2009,43(9):91~94.
You Jinmin, Chen Tianning. Fractal model for normal dynamic parameters of joint surfaces [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University,2009,43(9):91~94. (in Chinese)
- 5 温淑花,张学良,武美先,等. 结合面法向接触刚度分形模型建立与仿真[J]. 农业机械学报,2009,40(11):197~202.
Wen Shuhua, Zhang Xueliang, Wu Meixian, et al. Fractal model and simulation of normal contact stiffness of joint interfaces and its simulation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(11):197~202. (in Chinese)
- 6 温淑花,张学良,文晓光,等. 结合面切向接触刚度分形模型及其仿真[J]. 农业机械学报,2009,40(12):223~227.
Wen Shuhua, Zhang Xueliang, Wen Xiaoguang, et al. Fractal model of tangential contact stiffness of joint interfaces and its simulation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009,40(12):223~227. (in Chinese)
- 7 Jiang Shuyun, Zheng Yunjian. A contact stiffness model of machined joint surfaces[J]. Journal of Tribology, Transactions of ASME, 2010, 132(1):1~7.
- 8 张学良,温淑花,兰国生,等. 平面结合面切向接触阻尼分形模型及其仿真[J]. 西安交通大学学报,2011,45(5):74~77, 136.
Zhang Xueliang, Wen Shuhua, Lan Guosheng, et al. Fractal model for tangential contact damping of plane joint interfaces with simulation[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University,2011,45(5):74~77,136. (in Chinese)
- 9 尤晋闽,陈天宇. 基于分形接触理论的结合面法向接触参数预估[J]. 上海交通大学学报,2011,45(9):1275~1280.
You Jinmin, Chen Tianning. Estimation for normal parameters of joint surfaces based on fractal theory [J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University,2011,45(9):1275~1280. (in Chinese)
- 10 兰国生,张学良,丁红钦,等. 基于分形理论的结合面改进接触模型[J]. 农业机械学报,2011,42(10):217~223.
Lan Guosheng, Zhang Xueliang, Ding Hongqin, et al. Modified contact model of joint interfaces based on fractal theory [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(10):217~223. (in Chinese)
- 11 兰国生,张学良,丁红钦,等. 基于分形理论的结合面静摩擦系数改进模型[J]. 农业机械学报,2012,43(1):213~218.
Lan Guosheng, Zhang Xueliang, Ding Hongqin, et al. Modified model of static friction coefficient of joint interfaces based on fractal theory [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012,43(1):213~218. (in Chinese)
- 12 Wang S, Komvopoulos K. A fractal theory of the interracial temperature distribution in the slow sliding regime: part I—elastic contact and heat transfer analysis [J]. Journal of Tribology, Transactions of ASME, 1994, 116(4):812~823.
- 13 Wang S, Komvopoulos K. A fractal theory of the interracial temperature distribution in the slow sliding regime: part II—multiple domains, elastoplastic contacts and applications [J]. Journal of Tribology, Transactions of ASME, 1994, 116(4):824~832.
- 14 Johnson K L. Contact mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- 15 Yan W, Komvopoulos K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces [J]. J. App. Phys., 1998, 84(7):3617~3624.
- 16 盛选禹,雒建斌,温诗铸. 基于分形接触的静摩擦系数预测[J]. 中国机械工程,1998,9(7):16~18.
Sheng Xuanyu, Luo Jianbin, Wen Shizhu. Static friction coefficient model based on fractal contact [J]. China Mechanical Engineering, 1998,9(7):16~18. (in Chinese)
- 17 温淑花,张宗阳,张学良,等. 固定结合面刚度分形模型[J]. 农业机械学报,2013,44(2):255~260.
Wen Shuhua, Zhang Zongyang, Zhang Xueliang, et al. Stiffness fractal model for fixed joint interfaces [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013,44(2):255~260. (in Chinese)