

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.03.046

基于各向异性分形理论的结合面切向刚度改进模型^{*}

田红亮¹ 赵春华¹ 方子帆¹ 朱大林¹ 李响² 毛宽民³

(1. 三峡大学机械与材料学院, 宜昌 443002; 2. 三峡大学水电机械设备设计与维护湖北省重点实验室, 宜昌 443002;
3. 华中科技大学机械科学与工程学院, 武汉 430074)

摘要: 基于各向异性分形几何理论, 建立了一种结合面切向接触刚度改进模型。通过对所建模型的数字仿真, 直观地揭示了结合面切向接触刚度与结合面法向载荷、切向载荷、结合面分形维数 D 、结合面分形粗糙度 G 、相关因子 K 、材料特性 ϕ 之间复杂的非线性关系。数字仿真结果表明: 结合面切向接触刚度随着法向载荷、相关因子或材料特性的增加而增加, 但随着切向载荷、分形粗糙度的增加而减小; 当分形维数较小时, 结合面切向接触刚度随着分形维数的增加而增加; 当分形维数较大时, 结合面切向接触刚度随着分形维数的增加而减小。

关键词: 结合面 法向接触载荷 切向接触刚度 各向异性 分形几何理论

中图分类号: TH113.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2013)03-0257-10

Improved Model of Tangential Stiffness for Joint Interface Using Anisotropic Fractal Theory

Tian Hongliang¹ Zhao Chunhua¹ Fang Zifan¹ Zhu Dalin¹ Li Xiang² Mao Kuanmin³

(1. College of Mechanical and Material Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002, China

2. Hubei Key Laboratory of Hydroelectric Machinery Design and Maintenance, China Three Gorges University, Yichang 443002, China

3. School of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: An improved model of tangential contact stiffness for joint interface was put forward by using anisotropic fractal geometric theory. Numerical simulation was executed to visually attain the complex nonlinear relationships between joint interface tangential contact stiffness and normal load, tangential load, fractal dimension D , fractal roughness G , relating factor K and material property ϕ . The numerical simulation results indicate that the joint interface tangential contact stiffness increases with increasing normal load, relating factor K or material property ϕ , but decreases with increasing tangential load or fractal roughness. When fractal dimension is smaller, the joint interface tangential contact stiffness increases as fractal dimension increases. However, when fractal dimension becomes larger, the joint interface tangential contact stiffness decreases as fractal dimension increases.

Key words: Joint interface Normal contact load Tangential contact stiffness Anisotropy Fractal geometric theory

引言

机械由各种零件按照一定的具体要求组合起来。称零件、组件、部件之间互相接触的表面为“机

械结合面”, 简称“结合面”^[1]。结合面问题的核心是两个粗糙表面的接触问题, 粗糙表面接触模型的研究具有重要的应用价值, 结合面对机床的静态及动态特性都有显著的影响。据统计, 机床的静刚度

收稿日期: 2012-09-20 修回日期: 2012-10-09

^{*} 国家自然科学基金资助项目(51275273、51075234、50975104)、水电机械设备设计与维护湖北省重点实验室开放基金资助项目(2012KJX07)和三峡大学博士科研启动基金资助项目(KJ2012B013、KJ2012B015)

作者简介: 田红亮, 副教授, 博士, 主要从事界面力学研究, E-mail: thl19732003@yahoo.com.cn

中 30% ~ 50% 来源于结合面的刚度^[2]。由于结合面在机械结构中大量存在,从而使机械结构不再具有连续性,进而导致问题的复杂性。现代机床设计,尤其是以高速、高精度和高效率为主要特征的高档数控机床设计,迫切地需要在图样设计阶段就能预知机床的动力学特性。但是,由于机床各部件之间存在结合面,而目前对结合面动力学机理的研究尚不成熟,使整机性能预测变得非常困难,结合面问题是结构分析由单件走向整机的关键问题。

结合面的接触刚度常常是机械结构整体刚度的重要组成部分,有时甚至成为整体刚度的薄弱环节,所以在研究机械结构的静态特性时,必须充分考虑到结合面的接触刚度。人们从理论上对此进行了大量的研究工作,如 Greenwood - Williamson 接触模型^[3]、Chang - Etsion - Bogy 统计模型^[4]、Majumdar - Bhushan 分形模型^[5]等。关于结合面切向接触刚度模型,张学良等^[6-7]根据球体与平面接触的切向接触刚度和粗糙表面的接触分形理论,从理论上首次建立了结合面切向接触刚度分形模型。温淑花等^[8]基于接触分形理论和微接触面积分布函数,建立了计及微接触面积分布的域扩展因子影响的结合面切向接触刚度分形模型。但文献[6~8]的结合面切向接触刚度分形模型在算法上存在 3 个共性缺陷:①结合面的法向总载荷、无量纲法向总载荷、切向接触刚度、无量纲切向接触刚度都是无条件等式,事实上已经发生塑性变形的微凸体,由于局部的接触载荷已经使其发生塑性流动,将不能继续承受切向载荷,在计算切向接触刚度时不包括已经发生塑性变形的微凸体,没有达到弹性极限的微凸体能够继续承受切向载荷,切向刚度意味着弹性切向刚度,所以法向总载荷、无量纲法向总载荷、切向接触刚度、无量纲切向接触刚度皆应为有条件等式^[9]。②没有严格指出球体单峰 1、球体单峰 2 与平面间的关系,虽给出球体单峰与平面的切向位移,但没有给出球体单峰 1 与球体单峰 2 间的相对切向位移,事实上原文用球体单峰与平面的切向变形代替了球体单峰 1 与球体单峰 2 间的相对切向位移,这直接导致了原文后面一系列公式错误。③没有给出当量剪切弹性模量 \bar{G} 与两接触材料的切变模量、泊松比间的关系。

文献[6~8]均假设粗糙表面的微观形貌各向同性,获得结合面切向接触刚度分形模型。本文针对有条件等式,提出实际临界接触面积的概念,仿真两个接触表面不同纹理方向的轮廓,通过引用文献[10]中刻画各向异性分形表面特征的单变量标量 Weierstrass - Mandelbrot 函数,与文献[11]提出的

单个微凸体法向载荷的计算方法,建立一种利用各向异性分形几何理论的结合面整体法向总载荷、切向接触刚度的理论模型,通过数字仿真揭示分形维数、分形粗糙度、相关因子、材料特性、法向载荷、切向载荷等参数对结合面切向接触刚度的影响规律。

1 各向异性分形几何理论

Majumdar - Bhushan 分形模型^[5]采用的 Weierstrass - Mandelbrot 函数未带随机相位,模拟的是各向同性表面轮廓。带随机相位的单变量标量 Weierstrass - Mandelbrot 函数^[10]能模拟加权、随机重叠的隆起部状各向异性分形表面,该函数为

$$W(\mathbf{r}) =$$

$$\sqrt{\frac{\ln \gamma}{M}} \sum_{m=1}^M A_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [1 - e^{ik_0 \gamma^n r \cos(\theta - \alpha_m)}] e^{i\phi_{m,n}} (k_0 \gamma^n)^{D-2} \quad (1)$$

式中 γ ——决定轮廓空间频率密度的参数
 M ——构造表面重叠隆起部的个数
 A_m ——控制表面几何各向异性的量值
 i ——虚数单位 n ——频率指数
 k_0 ——与采样长度 L 有关的波数
 r ——极径 θ ——极角
 α_m ——沿方位方向偏置隆起部的角度
 $\phi_{m,n}$ ——在 $[0, 2\pi]$ 范围内均匀分布的随机相位
 D ——表面的分形维数

式(1)中的一些参数可选取为^[11]

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (3)$$

$$A_m = 2\pi \left(\frac{2\pi}{G} \right)^{1-D} \quad (4)$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{L} \quad (5)$$

$$\alpha_m = \frac{\pi m}{M} \quad (6)$$

式中 G ——分形粗糙度

一个分形表面在各平面方向显示随机性,其高度函数可用式(1)的实部表示

$$z(r, \theta) = \operatorname{Re} W(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\ln \gamma}{M}} \sum_{m=1}^M A_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (k_0 \gamma^n)^{D-2} \cdot [\cos \phi_{m,n} - \cos(k_0 \gamma^n r \cos(\theta - \alpha_m) + \phi_{m,n})] \quad (7)$$

将式(2)~(6)代入式(7)得

$$z(x, y) = L \left(\frac{G}{L} \right)^{D-1} \sqrt{\frac{\ln \gamma}{M}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{n_{\max}} \gamma^{(D-2)n} \left[\cos \phi_{m,n} - \cos \left(\frac{2\pi \gamma^n \sqrt{x^2 + y^2}}{L} \cos \left(\arctan \frac{y}{x} - \frac{\pi m}{M} \right) + \phi_{m,n} \right) \right] \quad (8)$$

其中
$$n_{\max} = \text{int} \left(\log_{\gamma} \frac{L}{L_s} \right) \quad (9)$$

式中 n_{\max} ——与截止长度 L_s 有关的指数

当 $L = 0.61 \mu\text{m}$, $G = 1.36 \times 10^{-5} \mu\text{m}$, $M = 10$, $\gamma = 1.5$ 时,式(8)模拟的各向异性表面如图1所示。

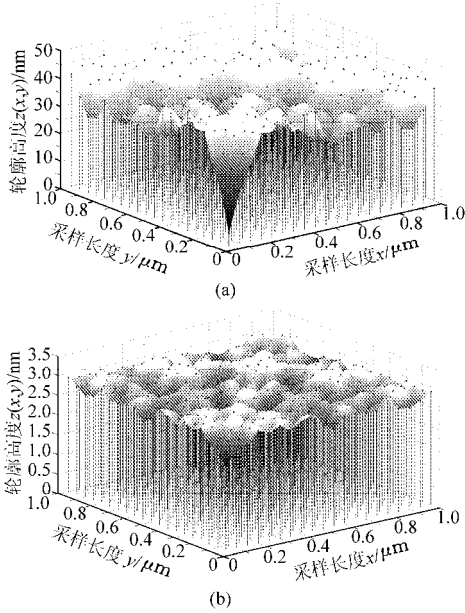


图1 三维分形表面仿真结果

Fig.1 Simulated results of 3-D fractal surfaces

(a) $D = 1.4$ (b) $D = 1.8$

一个微凸体顶端的变形量取决于一个余弦函数的波峰和波谷的幅值,即谐波分量的系数。当 $M = 1$,则 $m = 1$,此时具有双自变量的式(8)简化为单自变量函数

$$z(x) = L \left(\frac{G}{L} \right)^{D-1} \sqrt{\ln \gamma} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \gamma^{(D-2)n} \left[\cos \phi_{1,n} - \cos \left(\frac{2\pi \gamma^n x}{L} - \phi_{1,n} \right) \right] \quad (10)$$

横截微接触点的半径为 r' ,则单峰波形式的最长波长为 $2r'^{[12]}$,即 $L_s = 2r'$ 。由式(9)可得基波长单峰相应的频率指数为

$$n_0 = \log_{\gamma} \frac{L}{2r'} \quad (11)$$

该频率指数在式(10)中匹配的一项为

$$z_0(x) = 2^{2-D} \sqrt{\ln \gamma} G^{D-1} r'^{2-D} \left[\cos \phi_{1,n_0} - \cos \left(\frac{\pi x}{r'} - \phi_{1,n_0} \right) \right] \quad (12)$$

将 $\phi_{1,n_0} = 0, x = r'$ 代入式(12),可得余弦函数从波峰到波谷的幅值,即微凸体变量

$$\delta = 2^{3-D} \sqrt{\ln \gamma} G^{D-1} r'^{2-D} \quad (13)$$

由赫兹接触理论^[13]可得微凸体曲率半径为

$$R = \frac{r'^2}{2\delta} = \frac{r'^D}{2^{4-D} \sqrt{\ln \gamma} G^{D-1}} = \frac{a'^{0.5D}}{2^{4-D} \pi^{0.5D} \sqrt{\ln \gamma} G^{D-1}} \quad (14)$$

式中 a' ——截断面积

施加在单个微凸体上的弹性力^[11]为

$$P_e(a') = \frac{4E' \left(\frac{a'^{0.5}}{\pi^{0.5}} \right)^3}{3R} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi^{1.5}} E' a'^{1.5} / R \quad (15)$$

式中 E' ——两接触材料的复合弹性模量

a ——单个弹性微凸体的面积

将式(14)代入式(15)得

$$P_e(a') = \frac{2^{4.5-D} \sqrt{\ln \gamma} E' G^{D-1} a'^{1.5-0.5D}}{3\pi^{1.5-0.5D}} \quad (16)$$

塑性变形开始时,微凸体对应的临界干涉量^[3]

为

$$\delta_c = bR \frac{H^2}{E'^2} \quad (17)$$

式中 b ——待定无量纲常数

H ——较软材料的硬度

式(13)可变为

$$\delta = \frac{2^{3-D} \sqrt{\ln \gamma} E' G^{D-1} a'^{1-0.5D}}{\pi^{1-0.5D}} \quad (18)$$

将式(14)代入式(17)得

$$\delta_c = b \frac{a'^{0.5D}}{2^{4-D} \pi^{0.5D} \sqrt{\ln \gamma} G^{D-1}} \frac{H^2}{E'^2} \quad (19)$$

式(18)、式(19)左右相除得

$$\frac{\delta}{\delta_c} = \frac{\frac{2^{7-2D}}{b} \pi^{D-1} \frac{E'^2}{H^2} G^{2D-2} \ln \gamma}{a'^{D-1}} = \frac{a_c'^{D-1}}{a'^{D-1}} \quad (20)$$

其中
$$a_c' = \left(\frac{2^{7-2D}}{b} \pi^{D-1} \frac{E'^2}{H^2} G^{2D-2} \ln \gamma \right)^{\frac{1}{D-1}} \quad (21)$$

式中 a_c' ——临界截断面积

施加在单个微凸体上的塑性力^[11]为

$$P_p(a') = Ha' \quad (22)$$

考虑式(16)与式(22), a_c' 匹配的弹性力、塑性力分别为

$$P_e(a_c') = \frac{2^{4.5-D} \sqrt{\ln \gamma} E' G^{D-1} a_c'^{1.5-0.5D}}{3\pi^{1.5-0.5D}} \quad (23)$$

$$P_p(a_c') = Ha_c' \quad (24)$$

两接触表面在缓慢增加的结合面整体法向总载荷作用下,单个微凸体将承受法向力。假设施加在单个微凸体上的法向力函数不出现间断点,可令 $P_e(a_c') = P_p(a_c')$,即

$$\frac{2^{4.5-D} \sqrt{\ln \gamma} E' G^{D-1} a_c'^{1.5-0.5D}}{3\pi^{1.5-0.5D}} = Ha_c' \quad (25)$$

将式(21)代入式(25)得

$$b = \frac{9\pi^2}{4} \quad (26)$$

需要强调:式(26)的具体数字与文献[14~15]均不同,这是因为文献[14]按照传统结合部的

Chang - Etsion - Bogy 统计模型^[4]提供的参数 $q = 0.454 + 0.41\nu_1$ 、 $\delta_c = \left(\frac{\pi q H}{2E'}\right)^2 R$ 等于本文中的式(17),故文献[14]直接给出结论: $b = \left(\frac{\pi q}{2}\right)^2$ 。文献[14]不合理的原因是:将传统结合部的 Chang - Etsion - Bogy 统计模型与 Greenwood - Williamson 接触模型结合,没有通过某种桥梁将传统结合部理论与现代分形理论较好地联系起来。本文假设单个微凸体所承受的法向力函数连续变化,从而将传统结合部理论与现代分形理论联系在一起。

将式(26)代入式(21)得

$$a'_c = \left(\frac{2^{9-2D}}{9\pi^{3-D} K^2 \phi^2} G^{2D-2} \ln \gamma\right)^{\frac{1}{D-1}} \quad (27)$$

其中 $K = \frac{H}{\sigma_y}$ (28)

$$\phi = \frac{\sigma_y}{E'} \quad (29)$$

式中 K ——与硬度有关的相关因子

ϕ ——与屈服强度有关的材料特性

σ_y ——较软材料的屈服强度

微接触截面积分布函数^[13]为

$$n(a') = 0.5D\psi^{1-0.5D} a_L^{0.5D} a'^{-1-0.5D} \quad (0 < a' \leq a'_L) \quad (30)$$

$$P = \begin{cases} \frac{2^{4.5-D} D\psi^{1-0.5D} \sqrt{\ln \gamma} E' G^{D-1} a_L^{0.5D} (a_L^{1.5-D} - a_c^{1.5-D}) + \frac{D\psi^{1-0.5D} K}{2-D} \sigma_y a_L^{0.5D} a_c^{1-0.5D}}{3\pi^{1.5-0.5D} (3-2D)} & (D \neq 1.5) \\ 2 \times 2.000 7^{0.25} E' \sqrt{G \ln \gamma} \left(\frac{a'_L}{\pi}\right)^{0.75} \ln \frac{a'_L}{a'_c} + 3K\sigma_y a_L^{0.75} (2.000 7 a'_c)^{0.25} & (D = 1.5) \end{cases} \quad (35)$$

式(35)不同于文献[15]的式(24)。将

$$a'_L = 2a_L \quad (36)$$

$$a'_c = 2a_c \quad (37)$$

$$P = \begin{cases} \frac{2^{6-1.5D} D\psi^{1-0.5D} \sqrt{\ln \gamma} E' G^{D-1} a_L^{0.5D} (a_L^{1.5-D} - a_c^{1.5-D}) + \frac{2D\psi^{1-0.5D} K}{2-D} \sigma_y a_L^{0.5D} a_c^{1-0.5D}}{3\pi^{1.5-0.5D} (3-2D)} & (D \neq 1.5) \\ 2 \times 2.000 7^{0.25} E' \sqrt{G \ln \gamma} \left(\frac{2}{\pi} a_L\right)^{0.75} \ln \frac{a_L}{a_c} + 6K\sigma_y a_L^{0.75} (2.000 7 a_c)^{0.25} & (D = 1.5) \end{cases} \quad (39)$$

其中

$$A_{re} = \frac{D\psi^{1-0.5D}}{2-D} a_c \quad (40)$$

式中 A_{re} ——实际临界接触面积

根据式(38)得

式中 a'_L ——最大的接触点横截面积

ψ ——域扩展因子

面积分布在 a' 与 $a' + da'$ 之间的接触点数是 $n(a') da'$, 单个弹性微凸体的面积为 $a = \frac{a'}{2}$, 故结合面整体实际接触面积^[13]为

$$A_r = \int_0^{a'_L} \frac{a'}{2} n(a') da' \quad (31)$$

式(31)与文献[14]的式(9)、文献[15]的式(10)皆不同。

将式(30)代入式(31)得

$$A_r = \frac{D\psi^{1-0.5D}}{2(2-D)} a'_L \quad (32)$$

当 $a'_L > a'_c$ 时^[5], 结合面整体法向总载荷为

$$P = \int_{a'_c}^{a'_L} P_c(a') n(a') da' + \int_0^{a'_c} P_p(a') n(a') da' \quad (33)$$

将式(16)及式(22)代入式(33)得

$$P = \frac{2^{4.5-D} \sqrt{\ln \gamma} E' G^{D-1}}{3\pi^{1.5-0.5D}} \int_{a'_c}^{a'_L} a'^{1.5-0.5D} n(a') da' + K\sigma_y \int_0^{a'_c} a' n(a') da' \quad (34)$$

将式(30)代入式(34)得

代入式(32)和式(35)分别得

$$A_r = \frac{D\psi^{1-0.5D}}{2-D} a_L \quad (38)$$

式中 A_a ——结合面整体名义接触面积

A_r^* ——接触率^[16]

利用式(41)将式(39)无量纲化得

$$P^* = \frac{P}{E'A_a} =$$

$$\begin{cases} \frac{2^{6-1.5D} D \psi^{1+0.25D^2-D} \sqrt{\ln \gamma} G^{*D-1} \left(\frac{2-D}{D} A_r^*\right)^{0.5D} \left[\left(\frac{2-D}{D} \psi^{0.5D-1} A_r^*\right)^{1.5-D} - a_c^{*1.5-D} \right] + 2\psi^{1+0.25D^2-D} K \phi A_r^{*0.5D} \left(\frac{D}{2-D} a_c^*\right)^{1-0.5D} & (D \neq 1.5) \\ 2 \times 2.0007^{0.0625} \sqrt{G^* \ln \gamma} \left(\frac{A_r^*}{1.5\pi}\right)^{0.75} \ln \frac{A_r^*}{3 \times 2.0007^{0.25} a_c^*} + 2 \times 2.0007^{0.0625} K \phi A_r^{*0.75} (3a_c^*)^{0.25} & (D = 1.5) \end{cases} \quad (42)$$

其中

$$\begin{cases} a_c^* = \frac{a_c}{A_a} = 0.5 \left(\frac{2^{9-2D}}{9\pi^{3-D} K^2 \phi^2} G^{*2D-2} \ln \gamma \right)^{\frac{1}{D-1}} \\ A_{rc}^* = \frac{A_{rc}}{A_a} = \frac{D\psi^{1-0.5D}}{2-D} a_c^* \\ G^* = \frac{G}{\sqrt{A_a}} \end{cases} \quad (43)$$

式(48)可改写为

$$k_t(a) = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\bar{T}}{\mu \bar{P}} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{G} \sqrt{a} \quad (49)$$

将接触点的实际接触面积 a 与其截面积 a' 之间的关系^[19]

$$a = 0.5a' \quad (50)$$

代入式(49)得

$$k_t(a') = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{\bar{T}}{\mu \bar{P}} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{G} \sqrt{a'} \quad (51)$$

结合面整体实际接触面积和名义载荷近似呈正比

$$\frac{\bar{P}}{a} = \frac{P}{A_r} \approx \frac{E' \sqrt{\frac{\sigma}{R}}}{3.2} \quad (52)$$

$$\frac{\bar{T}}{a} = \frac{T}{A_r} = \tau_b \quad (53)$$

式中 σ ——两接触表面峰高的复合标准差

T ——结合面整体切向总载荷

τ_b ——黏着结点的剪切强度

式(53)、(52)左右相除得

$$\frac{\bar{T}}{\bar{P}} = \frac{T}{P} \quad (54)$$

将式(54)代入式(51)得

$$k_t(a') = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{T}{\mu P} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{G} \sqrt{a'} \quad (55)$$

2.2 结合面整体切向接触刚度

当 $a'_L > a'_c$ 时,机械结合面的切向总刚度可以表示为

$$K_t = \int_{a'_c}^{a'_L} k_t(a') n(a') da' =$$

$$\frac{8}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{T}{\mu P} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{G} \int_{a'_c}^{a'_L} \sqrt{a'} n(a') da' \quad (56)$$

将式(30)代入式(56)得

$$K_t = \begin{cases} \frac{8D\psi^{1-0.5D}}{\sqrt{2\pi}(1-D)} \left(1 - \frac{T}{\mu P} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{G} a'_L{}^{0.5D} (a'_L{}^{0.5-0.5D} - a'_c{}^{0.5-0.5D}) & (1 < D \leq 2) \\ \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{T}{\mu P} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{G} \sqrt{a'_L} \ln \frac{a'_L}{a'_c} & (D = 1) \end{cases} \quad (57)$$

2 结合面整体切向刚度改进模型

2.1 结合面单个微凸体切向接触刚度

球体单峰1与球体单峰2之间的相对切向位移^[17]为

$$t = \frac{3}{16} \frac{\mu \bar{P}}{Gr} \left[1 - \left(1 - \frac{\bar{T}}{\mu \bar{P}} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (44)$$

其中

$$\frac{1}{G} = \frac{2-\nu_1}{G_1} + \frac{2-\nu_2}{G_2} \quad (45)$$

式中 μ ——结合面的摩擦因数

\bar{P} ——作用于单个微凸体上的法向载荷

\bar{G} ——结合面当量剪切弹性模量

\bar{T} ——单个微凸体承受的切向载荷

ν_1, ν_2 ——两接触材料的泊松比

G_1, G_2 ——两接触材料的切变模量

式(45)与文献[6]的式(3)、文献[7]的式(2)、文献[18]的式(14)亦不同。

由式(44)得

$$\bar{T} = \mu \bar{P} - \mu \bar{P} \left(1 - \frac{16 \bar{G} r}{3\mu \bar{P}} t \right)^{\frac{3}{2}} \quad (46)$$

结合面单个微凸体的切向接触刚度可表示为

$$k_t(r) = \frac{d\bar{T}}{dt} = 8 \bar{G} r \left(1 - \frac{16 \bar{G} r}{3\mu \bar{P}} t \right)^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

将式(44)代入式(47)得

$$k_t(r) = 8 \bar{G} r \left(1 - \frac{\bar{T}}{\mu \bar{P}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (48)$$

将式(36)及式(37)代入式(57)得

$$K_t = \begin{cases} \frac{8D\psi^{1-0.5D}}{\sqrt{\pi}(1-D)} \left(1 - \frac{T}{\mu P}\right)^{\frac{1}{3}} G a_L^{0.5D} (a_L^{0.5-0.5D} - a_c^{0.5-0.5D}) & (1 < D \leq 2) \\ \frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{T}{\mu P}\right)^{\frac{1}{3}} G \sqrt{a_L} \ln \frac{a_L}{a_c} & (D = 1) \end{cases} \quad (58)$$

使用式(41)将式(58)无量纲化得

$$K_t^* = \frac{K_t}{G \sqrt{A_a}} = \begin{cases} \frac{8D\psi^{1+0.25D^2-D}}{\sqrt{\pi}(1-D)} \left(1 - \frac{T}{\mu P}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2-D}{D} A_r^*\right)^{0.5D} \left[\left(\frac{2-D}{D} \psi^{0.5D-1} A_r^*\right)^{0.5-0.5D} - a_c^{*0.5-0.5D} \right] & (1 < D \leq 2) \\ \frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{T}{\mu P}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2} A_r^*} \ln \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{A_r^*}{a_c^*}\right) & (D = 1) \end{cases} \quad (59)$$

根据式(42)与式(59),无量纲法向载荷 P^* 和无量纲切向接触刚度 K_t^* 都是接触率 A_r^* 的显函数。因此,通过中间变量 A_r^* ,已知工程数据 P^* 与因变量 K_t^* 确定了一个隐函数。

3 结合面切向刚度模型仿真与讨论

根据文献[5],近似取接触率的上限 $A_{r_{\max}}^* = 0.1$ (图2)作为划分分形维数 D 、无量纲分形粗糙度 G^* 、材料特性 ϕ 有效范围的依据。

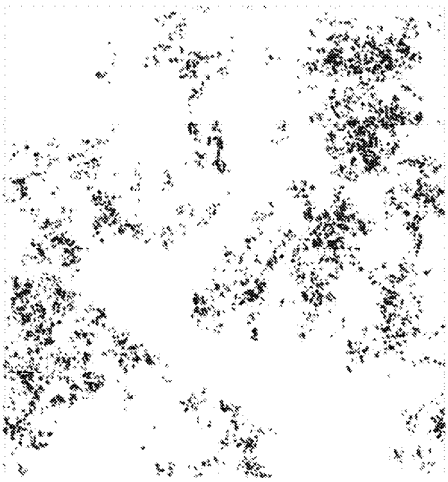


图2 某两工程粗糙表面的实际接触情况 ($A_r^* = 0.1$)

Fig.2 Real contact condition of two engineering rough surface ($A_r^* = 0.1$)

取 $\gamma = 1.5$, $\mu = 0.3$, 结合面切向接触刚度分形模型仿真计算结果如图3~10。

图3~10的仿真计算结果表明:

(1) 根据图3~10,结合面无量纲切向接触刚度 K_t^* 随着无量纲法向总载荷 P^* 的增加而增加。

(2) 根据图3a~3c、图4a~4c,当分形维数 D 为1.1~1.3时, K_t^* 与 P^* 之间的微凸弧非线性关系很显著。根据图3d~3f、4d,当分形维数 $D \geq 1.4$

时, K_t^* 与 P^* 之间的微凸弧非线性关系变得越来越弱,基本上是线性的。

(3) 当 $K = 1$ 和 $G^* = 10^{-9}$ (图5a~5c)、 $K = 1$ 和 $G^* = 10^{-11}$ (图5d~5f)、 $K = 0.01$ 和 $G^* = 10^{-11}$ (图5g~5h)时,即分形维数 D 的取值范围分别为1.1~1.7(图5a~5c)、1.1~1.7(图5d~5f)、1.1~1.8(图5g~5h)时,结合面无量纲切向接触刚度 K_t^* 随着结合面分形维数 D 的增加而增加。而当分形维数 D 的取值范围分别为 $D \geq 1.7$ (图5c)、 $D \geq 1.7$ (图5f)、 $D \geq 1.8$ (图5h)时,结合面无量纲切向接触刚度 K_t^* 随着结合面分形维数 D 的增加而减小。

(4) 当 $K = 0.1$ 和 $G^* = 10^{-11}$ (图6)时,即分形维数 D 的取值范围为1.1~1.8(图6)时,结合面无量纲切向接触刚度 K_t^* 随着结合面分形维数 D 的增加而增加。而当分形维数 D 的取值范围为 $D \geq 1.8$ (图6c)时,结合面无量纲切向接触刚度 K_t^* 随着结合面分形维数 D 的增加而减小。 K_t^* 随 D 的变化规律较为复杂,这是因为:分形维数由小变大,摩擦副表面由粗糙变得光洁,表面形貌逐渐精细复杂,其分形特征越明显。

(5) 根据图7,结合面无量纲切向接触刚度 K_t^* 随着结合面无量纲分形粗糙度 G^* 的增加而减小。

(6) 根据图8,在结合面法向总载荷 P 恒定的情况下,结合面无量纲切向接触刚度 K_t^* 随着结合面切向总载荷 T 的增加而减小,这与文献[20]的实验结论吻合。根据图8a,当分形维数较小时, K_t^* 与 P^* 之间的微凸弧非线性关系很显著。根据图8b,当分形维数较大时, K_t^* 与 P^* 之间的微凸弧非线性关系变得越来越弱,基本上是线性的。

(7) 根据图9与图10,结合面无量纲切向接触刚度 K_t^* 随着相关因子 K 或材料特性 ϕ 的增加而增

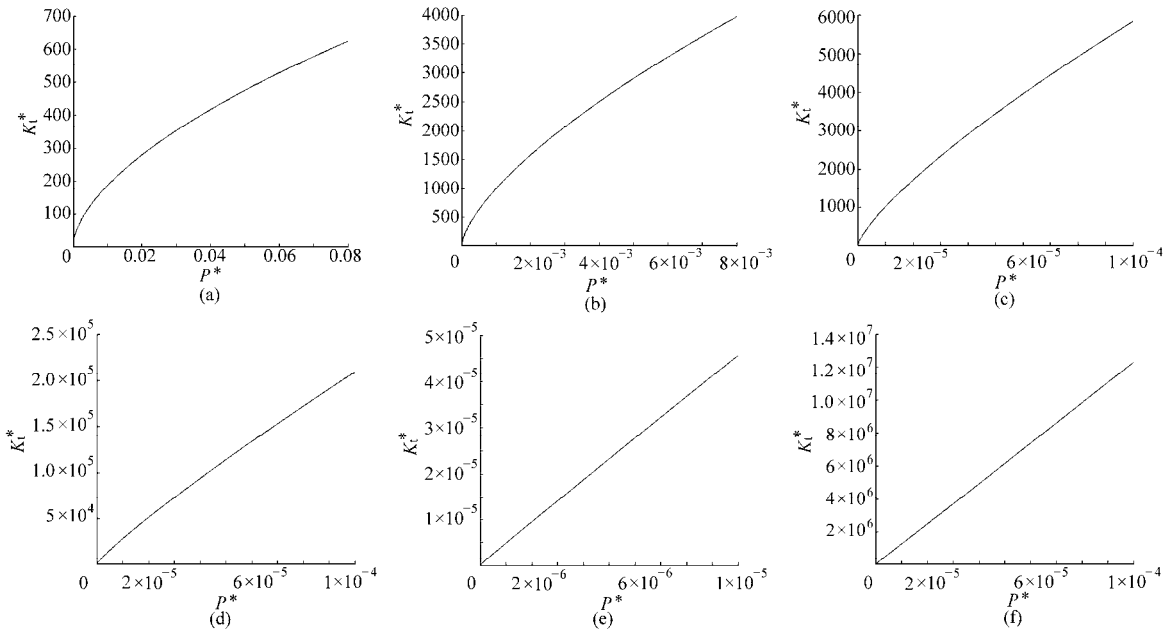


图 3 K_t^* 随 P^* 的变化规律 ($K=1, \phi=1, T/P=0.02, G^*=10^{-11}$)

Fig. 3 Changing of K_t^* with P^* ($K=1, \phi=1, T/P=0.02, G^*=10^{-11}$)

(a) $D=1.1$ (b) $D=1.2$ (c) $D=1.3$ (d) $D=1.4$ (e) $D=1.5$ (f) $D=1.6$

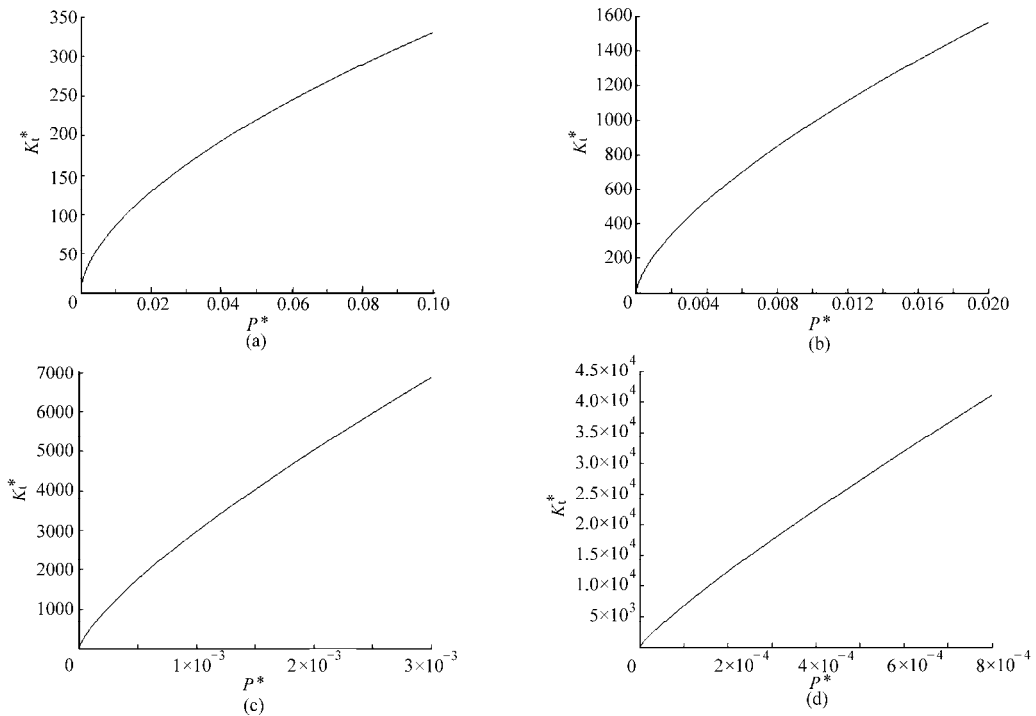


图 4 K_t^* 随 P^* 的变化规律 ($K=1, \phi=1, T/P=0.02, G^*=10^{-9}$)

Fig. 4 Changing of K_t^* with P^* ($K=1, \phi=1, T/P=0.02, G^*=10^{-9}$)

(a) $D=1.1$ (b) $D=1.2$ (c) $D=1.3$ (d) $D=1.4$

加。这是因为：根据式(43)，当 K 或材料特性 ϕ 增加时， a_c^* 都会减小，故结合面间弹性接触的比例增加^[21]。

4 结论

(1) 结合面切向接触刚度是作用在结合面上法

向载荷的隐函数，当结合面比较粗糙时，二者之间具有较强的微凸弧非线性关系。

(2) 结合面切向接触刚度随着法向载荷、相关因子或材料特性的增加而增加。

(3) 结合面切向接触刚度随着切向载荷、分形粗糙度的增加而减小。

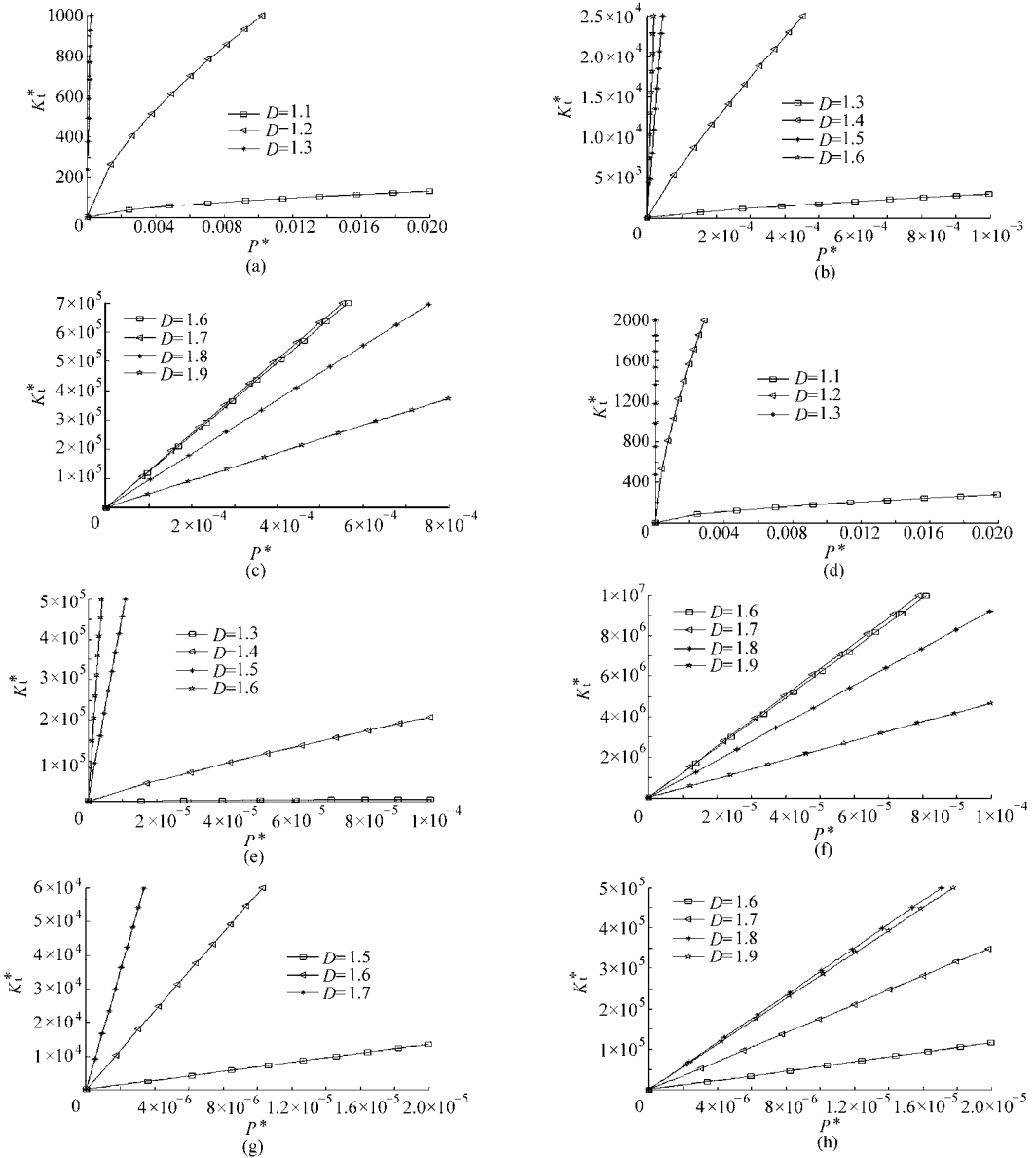


图5 D 对 K_1^* 的影响 ($\phi=1, T/P=0.02$)

Fig.5 Effect of D on K_1^* ($\phi=1, T/P=0.02$)

(a)、(b)、(c) $K=1, G^*=10^{-9}$ (d)、(e)、(f) $K=1, G^*=10^{-11}$ (g)、(h) $K=0.01, G^*=10^{-11}$

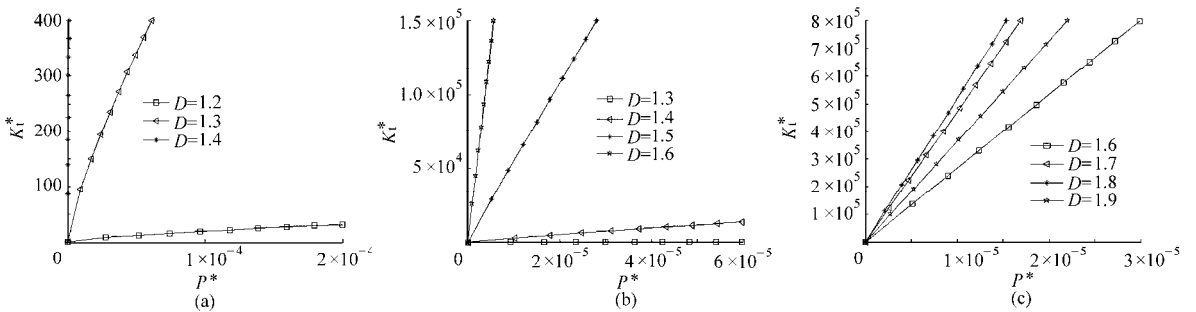


图6 K_1^* 随 D 的变化规律 ($K=0.1, \phi=1, T/P=0.02, G^*=10^{-11}$)

Fig.6 Changing of K_1^* with D ($K=0.1, \phi=1, T/P=0.02, G^*=10^{-11}$)

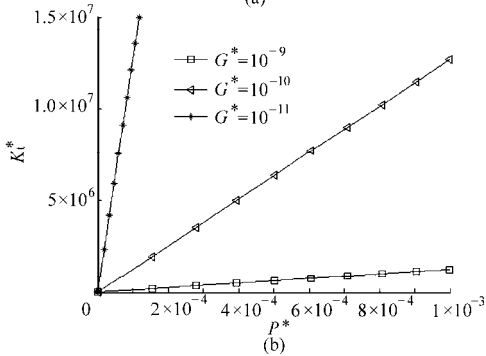
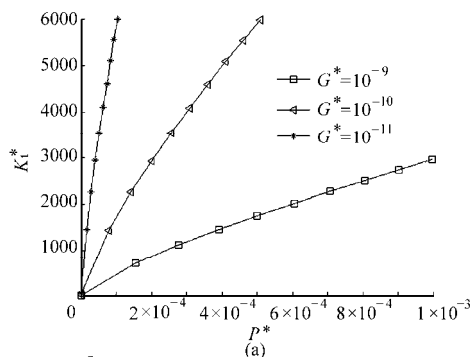


图7 K_t^* 随 G^* 的变化规律 ($K=1, \phi=1, T/P=0.02$)

Fig.7 Changing of K_t^* with G^* ($K=1, \phi=1, T/P=0.02$)

(a) $D=1.3$ (b) $D=1.7$

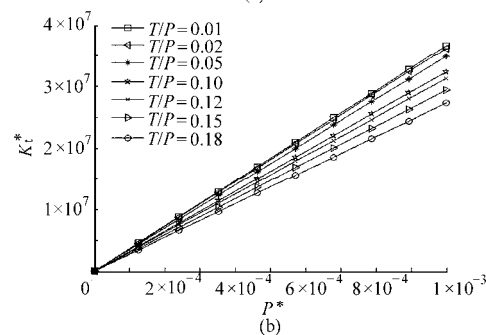
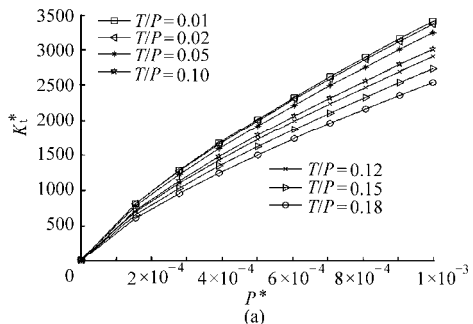


图8 K_t^* 随 T/P 的变化规律 ($K=0.1, \phi=1, G^*=10^{-11}$)

Fig.8 Changing of K_t^* with T/P ($K=0.1, \phi=1,$

$G^*=10^{-11}$)

(a) $D=1.3$ (b) $D=1.9$

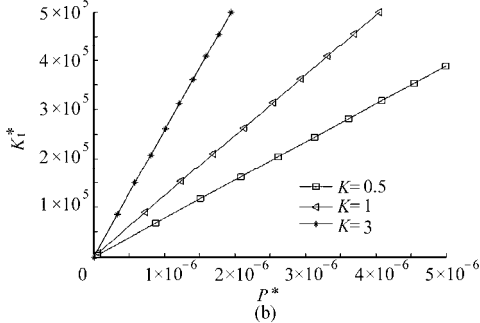
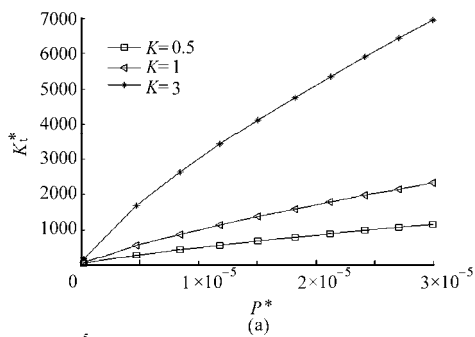


图9 K_t^* 随 K 的变化规律 ($\phi=1, \mu=0.3,$

$T/P=0.02, G^*=10^{-11}$)

Fig.9 Changing of K_t^* with K ($\phi=1, \mu=0.3,$

$T/P=0.02, G^*=10^{-11}$)

(a) $D=1.3$ (b) $D=1.6$

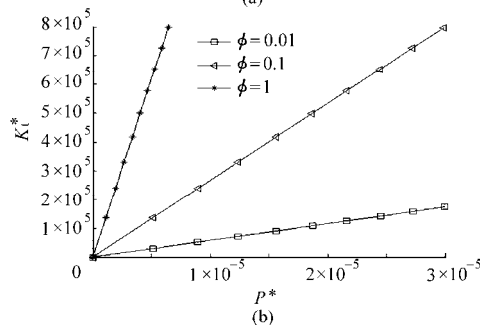
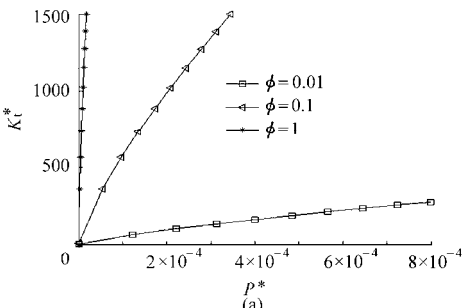


图10 K_t^* 随 ϕ 的变化规律 ($K=1, \mu=0.3,$

$T/P=0.02, G^*=10^{-11}$)

Fig.10 Changing of K_t^* with ϕ ($K=1, \mu=0.3,$

$T/P=0.02, G^*=10^{-11}$)

(a) $D=1.3$ (b) $D=1.6$

(4) 当分形维数较小时, 结合面切向接触刚度随着分形维数的增加而增加; 当分形维数较大时, 结合面切向接触刚度随着分形维数的增加而减小。

(5) 仿真证明该模型是可信的, 可以用来进行结合面切向接触刚度和法向接触载荷的分析与计算。

参 考 文 献

- 1 张学良. 机械结合面动态特性及应用[M]. 北京:中国科学技术出版社,2002:1~3.
- 2 王世军,赵金娟,张慧军,等. 一种结合部法向刚度的预估方法[J]. 机械工程学报,2011,47(21):111~115,122.
Wang Shijun, Zhao Jinjuan, Zhang Huijun, et al. A method of estimating normal stiffness of joint[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011,47(21):111~115,122. (in Chinese)
- 3 Greenwood J A, Williamson J B P. Contact of nominally flat surfaces[J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences, 1966,295(1442):300~319.
- 4 Chang Wen-Ruey, Etsion Izhak, Bogy David B. Adhesion model for metallic rough surfaces[J]. ASME Journal of Tribology, 1988,110(1):50~56.
- 5 Majumdar A, Bhushan Bharat. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces[J]. ASME Journal of Tribology, 1991,113(1):1~11.
- 6 张学良,温淑花. 基于接触分形理论的结合面切向接触刚度分形模型[J]. 农业机械学报,2002,33(3):91~93,97.
Zhang Xueliang, Wen Shuhua. A fractal model of tangential contact stiffness of joint surfaces based on the contact fractal theory[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2002,33(3):91~93,97. (in Chinese)
- 7 张学良,温淑花,徐格宁,等. 结合部切向接触刚度分形模型研究[J]. 应用力学学报,2003,20(1):70~72.
Zhang Xueliang, Wen Shuhua, Xu Gening, et al. Fractal model of the tangential contact stiffness of machined surfaces in contact[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2003,20(1):70~72. (in Chinese)
- 8 温淑花,张学良,文晓光,等. 结合面切向接触刚度分形模型建立与仿真[J]. 农业机械学报,2009,40(12):223~227.
Wen Shuhua, Zhang Xueliang, Wen Xiaoguang, et al. Fractal model of tangential contact stiffness of joint interfaces and its simulation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009,40(12):223~227. (in Chinese)
- 9 同济大学数学系. 高等数学:下册[M]. 6版. 北京:高等教育出版社,2011:113~118.
- 10 Ausloos M, Berman D H. A multivariate Weierstrass - Mandelbrot function[J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences, 1985,400(1819):331~350.
- 11 Yan W, Komvopoulos Kyriakos. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces[J]. Journal of Applied Physics, 1998,84(7):3 617~3 624.
- 12 Majumdar A, Bhushan Bharat. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces[J]. ASME Journal of Tribology, 1990,112(2):205~216.
- 13 Wang Shao, Komvopoulos Kyriakos. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: part I — elastic contact and heat transfer analysis[J]. ASME Journal of Tribology, 1994,116(4):812~823.
- 14 Jiang Shuyun, Zheng Yunjian, Zhu Hua. A contact stiffness model of machined plane joint based on fractal theory[J]. ASME Journal of Tribology, 2010,132(1):011 401-1~011 401-7.
- 15 兰国生,张学良,丁红钦,等. 基于分形理论的结合面改进接触模型[J]. 农业机械学报,2011,42(10):217~223,229.
Lan Guosheng, Zhang Xueliang, Ding Hongqin, et al. Modified contact model of joint interfaces based on fractal theory[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(10):217~223,229. (in Chinese)
- 16 田红亮,朱大林,秦红玲. MB模型计算原理的修正[J]. 三峡大学学报:自然科学版,2011,33(3):68~73.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Qin Hongling. Modification of MB model's algorithm principle[J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2011,33(3):68~73. (in Chinese)
- 17 田红亮,朱大林,方子帆,等. 赫兹接触129年[J]. 三峡大学学报:自然科学版,2011,33(6):61~71.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Fang Zifan, et al. 129 years of Hertz contact[J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2011,33(6):61~71. (in Chinese)
- 18 陈进,周韩,赵湛,等. 基于EDEM的振动种盘中水稻种群运动规律研究[J]. 农业机械学报,2011,42(10):79~83,100.
Chen Jin, Zhou Han, Zhao Zhan, et al. Analysis of rice seeds motion on vibrating plate using EDEM[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(10):79~83,100. (in Chinese)
- 19 田红亮,赵春华,朱大林,等. 弹塑性三维各向异性分形表面的接触分析[J]. 三峡大学学报:自然科学版,2012,34(1):69~73.
Tian Hongliang, Zhao Chunhua, Zhu Dalin, et al. Contact analysis of elastoplastic three-dimensional anisotropic fractal surfaces[J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2012,34(1):69~73. (in Chinese)
- 20 Burdekin M, Back N, Cowley A. Experimental study of normal and shear characteristics of machined surfaces in contact[J]. The Journal of Mechanical Engineering Science, 1978,20(3):129~132.
- 21 田红亮,朱大林,秦红玲. 固定接触界面法向静弹性刚度的改进弹簧分形模型[J]. 三峡大学学报:自然科学版,2012,34(6):83~88.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Qin Hongling. Improved spring fractal model for normal static elastic stiffness of stationary contact interface[J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2012,34(6):83~88. (in Chinese)