

摆动从动杆盘形凸轮机构最小尺寸的完全解法^{*}

常 勇^{1,2} 杨富富³ 李延平¹

(1. 集美大学机械工程学院, 厦门 361021; 2. 集美大学工程训练中心, 厦门 361021;

3. 厦门贝莱通信设备有限公司, 厦门 361015)

摘要: 摆动从动杆盘形凸轮机构的最小尺寸综合问题, 迄今未获得圆满解决。基于类速度图原理, 通过引入“辅助平行直线族”, 求解其与限制凸轮轴心位置若干直线族的交点族中的最左端、最右端者, 理论上严格保证其集合为限制凸轮轴心位置的边界点、边界线, 进而给出限制凸轮轴心位置的边界点、边界线的精确解析解和离散数值解法, 据此直接求解凸轮的最小基圆半径、摆杆长度和直观显示凸轮轴心的容许选取区域, 从而解决了按许用压力角设计最小尺寸的摆动从动杆盘形凸轮机构的问题。通过机构设计实例, 验证了所提方法的正确性和有效性。

关键词: 摆动从动杆 盘形凸轮 类速度图 辅助平行直线族 等距/离散化

中图分类号: TH112.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2013)03-0237-09

Thorough Solution of the Minimum Size of Disc Cam Mechanism with Oscillating Follower

Chang Yong^{1,2} Yang Fufu³ Li Yanping¹

(1. School of Mechanical Engineering, Jimei University, Xiamen 361021, China

2. Engineering Training Center, Jimei University, Xiamen 361021, China

3. Xiamen Bely Communication Equipment Co., Ltd., Xiamen 361015, China)

Abstract: The synthesis of mechanism the disc cam mechanism with oscillating follower has not been completed satisfactorily. The synthesis was solved completely by introducing a concept of auxiliary parallel line family based on the principle of analogous velocity chart. The left and right end points of intersection of the auxiliary parallel lines and the lines which limited the axis position of cam were solved. Through this method, the boundary points and lines of the axis position of cam were achieved in theory. Then the accurate analytical solution and the numerical discretization method for solving the points and lines were presented. According to this method, the minimum sizes of the base circle radius and the length of pendulum can be derived directly and the allowable selected area of the axis position of cam can be presented. The synthesis of the disc cam mechanism with oscillating follower is completed satisfactorily. The mechanism design example shows that this method is corrected and effective.

Key words: Oscillating follower Disc cam Analogous velocity chart Auxiliary parallel line family Equidistance/discretization

引言

关于平面与空间凸轮机构的最小尺寸综合问题, 已有大量文献发表^[1-24]。其中, 摆动从动杆盘

形凸轮机构复杂程度最高, 涉足研究的学者数量最多^[1,3-12, 18-21], Костицын В Т^[1-2] 提出的类速度图方法富于开拓性和奠基性, 对该研究产生了深远的影响。近 30 年来, 该问题研究朝着“解析化、精确

收稿日期: 2012-03-12 修回日期: 2012-04-16

^{*} 国家自然科学基金资助项目(51175224)和福建省自然科学基金资助项目(2010J01302、2006J0169)

作者简介: 常勇, 教授, 主要从事凸轮和连杆机构学研究, E-mail: changyong@jmu.edu.cn

通讯作者: 李延平, 教授, 主要从事机构学和模具 CAD/CAE 研究, E-mail: ypli@jmu.edu.cn

化”方向不断发展演进。1982年华大年^[5]将类速度图、微分几何包络原理结合提出的“包络曲线法”,取得重要进展。1991年常勇等^[24-25]研究了作平面运动滚子从动件盘形凸轮机构的最小尺寸设计问题,是“包络曲线法”的进一步延伸。“包络曲线法”已成为现今国内外学者公认的通行主流研究方法。然而,“包络曲线法”皆需对失效情形下采取“修补性解决方法”^[7-8]。若采用组合运动规律,失效情形将更加繁冗复杂。

本文基于类速度图原理,通过引入“辅助平行直线族”,求解其与限制凸轮轴心位置若干直线族交点族中的最左、最右端者,理论上严格保证其集

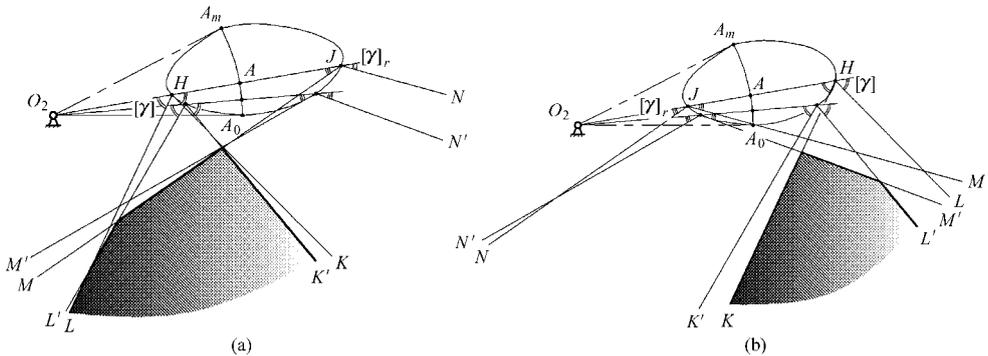


图1 摆动从动杆盘形凸轮机构的类速度图原理

Fig.1 Analogous velocity chart of cam with oscillating follower

(a) 摆杆推程与凸轮转向相同($N=1$) (b) 摆杆推程与凸轮转向相反($N=-1$)

1.1 摆杆推程与凸轮转向相同

1.1.1 推程

如图1a所示,设摆杆任一位置 O_2A ,在其上截 $AH=l\beta'$ (l 为摆杆长度、 β' 为推程类角速度、 $\beta'>0$),过点 H 作与 AH 及其延长线夹角为推程许用传动角 $[\gamma]$ 的一对射线 K,L ,即有 $\angle AHK=[\gamma]$, $\angle AHL=180^\circ-[\gamma]$ 。此位置满足 $\gamma\geq[\gamma]$ 条件的凸轮轴心许用区域——射线 K (左下方)、 L (右下方)所夹角域 $\angle KHL$ 的 O_2A_0 方位线以下部分(阴影区域)。

摆杆推程中有无数个位置,故有无数对射线 K,L ,无数条射线 K,L 分别构成连续射线族 $\{K\}$ 、 $\{L\}$ 以及连续角域族 $\{\angle KHL\}$ 。

整个推程满足 $\gamma\geq[\gamma]$ 条件的凸轮轴心容许选取区域——无数个连续角域族 $\{\angle KHL\}$ 的公共交集—— $\{\angle KHL\}_n$ 。

1.1.2 回程

任一位置 O_2A ,其延长线上截 $AJ=-l\beta'_r$ (β'_r 为回程类角速度、 $\beta'_r<0$),过点 J 作与 AJ 及其延长线夹角为回程许用传动角 $[\gamma]_r$ 的一对射线 M,N ,即有 $\angle AJM=[\gamma]_r$, $\angle AJN=180^\circ-[\gamma]_r$ 。此位置满足 $\gamma\geq[\gamma]_r$ 条件的凸轮轴心许用区域——射线 M (右下方)、 N (左下方)所夹角域 $\angle MJN$ 的 O_2A_0 方位线

合为限制凸轮轴心位置的边界点、边界线,进而给出限制凸轮轴心位置的边界点、边界线的精确解析解和离散数值解法,据此直接求解凸轮的最小基圆半径、摆杆长度和直观显示凸轮轴心的容许选取区域。

1 类速度图原理的简单描述

类速度图的图解原理由Костицын В Т^[1-2]独立提出后,国内外学者亦作了一些重要改进和完善。

如图1所示,为摆动从动杆盘形凸轮机构类速度图的生成原理。 O_2 为摆杆轴心, O_2A_0 、 O_2A_m 为摆杆推程的起始和终止位置。

以下部分(阴影区域)。

同理,无数条射线 M,N 构成连续射线族 $\{M\}$ 、 $\{N\}$ 以及连续角域族 $\{\angle MHN\}$ 。

整个回程满足 $\gamma\geq[\gamma]_r$ 条件的凸轮轴心容许选取区域——无数个连续角域族 $\{\angle MJN\}$ 的公共交集—— $\{\angle MJN\}_n$ 。

综上所述,整程(推程和回程)一并满足 $\gamma\geq[\gamma]$ 、 $\gamma\geq[\gamma]_r$ 条件的凸轮轴心容许选取区域 $\{\angle KHL\}_n \cap \{\angle MJN\}_n$ 。

1.2 摆杆推程与凸轮转向相反

如图1b所示,分析过程与1.1节相同。

在图1a、1b中,仅示意性地绘出推程两对射线 K,K' 与 L,L' 和回程两对射线 M,M' 与 N,N' 的情形,以及它们围成的公共区域(阴影区域)。

据图1显见,无论“相同”或“相反”情况下,回程的连续射线族 $\{N\}$,对整程的凸轮轴心容许选取区域 $\{\angle KHL\}_n \cap \{\angle MJN\}_n$ 的构成皆未发生影响,故后面不再予以考虑。

2 限制凸轮轴心位置的边界线的求解

如图2所示,建立直角坐标系 O_2xy ,原点 O_2 为摆杆轴心, x 轴沿摆杆推程起始位置 O_2A_0 (终止位置

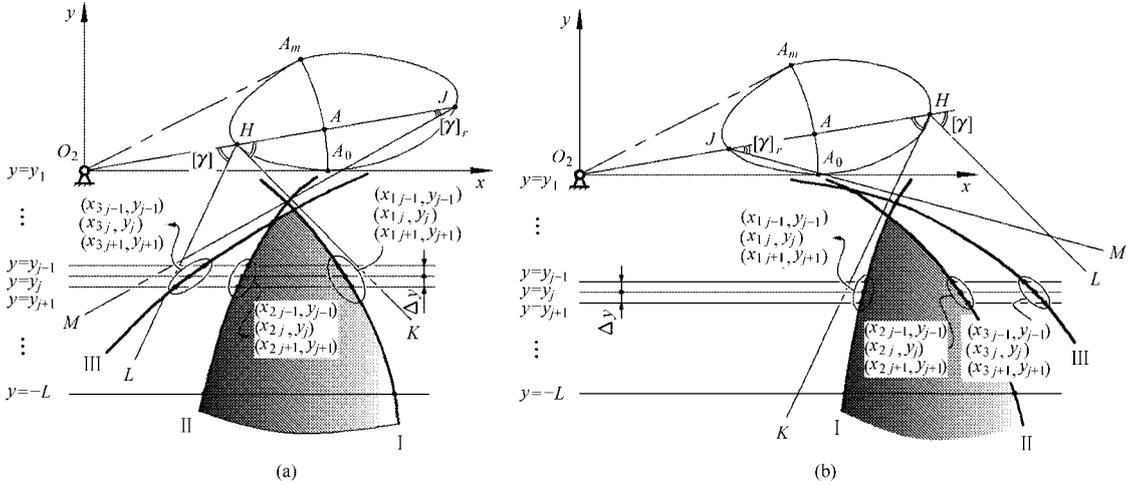


图2 限制凸轮轴心位置的边界线 I、II 和 III 的求解

Fig.2 Solutions of the boundary line I, II and III

(a) 相同(N=1) (b) 相反(N=-1)

O_2A_m), 将其逆时针方向转 90° 得 y 轴。

2.1 摆杆推程与凸轮转向相同

2.1.1 推程边界线 I

如图 2a 所示, 设摆杆在某位置 O_2A , 在其上截 $AH = l\beta'$, 过 H 作与 AH 夹角为 $[\gamma]$ 的射线 K , 其方程为

$$[y - l(1 - N\beta') \sin\beta] / [x - l(1 - N\beta') \cos\beta] = -\tan(N[\gamma] - \beta) \quad (1)$$

变形得

$$x = -y \cot(N[\gamma] - \beta) + l(1 - N\beta') [\cos\beta + \sin\beta \cot(N[\gamma] - \beta)] \quad (0^\circ \leq \phi < \Phi_0) \quad (2)$$

式中, 符号系数 $N = 1, l, [\gamma]$ 为常数, β 和 β' 皆为 ϕ 的函数, 式(2)为含参数 ϕ 的射线族方程。

设与 $y = c$ (某常值) 对应的边界点为 P_1 , 记其 x 坐标 $x_1(c) = x_1|_{y=c}$, 据式(2)和 $N = 1$, 则

$$x_1(c) = x_1|_{y=c} = \min \{ x(\phi) \} |_{y=c} = \min \{ -c \cot([\gamma] - \beta) + l(1 - \beta') [\cos\beta + \sin\beta \cot([\gamma] - \beta)] \} \quad (0^\circ \leq \phi < \phi_1^*) \quad (3)$$

于是, 推程边界线 I 的精确解析解为

$$x_1 = x_1(y) \quad (-\infty \leq y < 0) \quad (4)$$

关于 ϕ_1^* 的特别说明: 理论上 ϕ 的定义域为 $0^\circ \leq \phi \leq \Phi_0$, 但据类速度图原理, 为保证式(3)等的正确即避免出现“虚假解”, 取实际定义域为 $0^\circ \leq \phi < \phi_1^*$ 。 $\beta_m \leq [\gamma]$ 时, $\phi_1^* = \Phi_0$; $\beta_m > [\gamma]$ 时, ϕ_1^* 是方程 $\beta(\phi) - [\gamma] = 0$ 的解。

式(3)的几何意义: 选取“辅助平行直线族” $y = c (c < 0)$, 与式(2)表达的射线族 $\{K\}$ 的 $0^\circ \leq \phi < \phi_1^*$ 部分截得无数个交点, 而 P_1 为其中居最左端者。

基上, 选取连续水平直线族

$$\{y|y=c, -L \leq c < 0\} \quad (5)$$

根据经验, 取 $L = \text{int}(2l)$ 。即 $-\text{int}(2l) \leq y < 0$, 据式(3)、(5)可得无数个边界点 P_1 , 从而求得其集

合即边界线 I。

对上述边界线 I 和后叙的边界线 II、III 等, 本文提出双重“等距离散化”的数值求解方法。基本思想是: 对凸轮角位移 ϕ 进行“等角距”离散化处理, 选取连续平行直线族 $\{y = kx + b\}$, 进行“等线距”离散化处理。

“等间距、等线距”的离散/疏密程度根据求解精度要求确定。

根据求解的精度要求, 对连续单参数 ϕ 作“等角距”离散化处理。取

$$\Delta\phi = 10^{-p} \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

$$\phi_i = 0 + (i - 1)\Delta\phi = (i - 1)\Delta\phi \quad (i = 1, 2, \dots, [\text{int}(\phi_1^*) - 1] / \Delta\phi) \quad (7)$$

式中, $\text{int}(\phi_1^*)$ 、 $\text{int}(\phi_1^*) - 1$ 的单位皆为 $(^\circ)$ 。

据式(6)和(7), 式(2)表达的连续射线族 $\{K\}$ 的 $0^\circ \leq \phi < \phi_1^*$ 部分, 被离散化为 $[\text{int}(\phi_1^*) - 1] / \Delta\phi$ 条的离散射线族

$$x_i = x(\phi_i) = -y \cot(N[\gamma] - \beta_i) + l(1 - N\beta'_i) [\cos\beta_i + \sin\beta_i \cot(N[\gamma] - \beta_i)] \quad (8)$$

式中, $N = 1, \beta_i, \beta'_i$ 为与 ϕ_i 对应的 β, β' 值。

同理, 据求解精度要求, 对式(5)作“等线距”离散化处理。取

$$\Delta y = 10^{-q} \quad (q = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

$$y_j = 0 - j\Delta y = -j\Delta y \quad (j = 1, 2, \dots, \text{int}(2l) / \Delta y) \quad (10)$$

据式(9)和(10), 式(5)的连续直线族转化为 $\text{int}(2l) / \Delta y$ 条离散直线族

$$y = y_j = -j\Delta y \quad (j = 1, 2, \dots, \text{int}(2l) / \Delta y) \quad (11)$$

即

$$y_1 = -\Delta y$$

$$y_2 = -2\Delta y$$

$$y_3 = -3\Delta y$$

⋮

$$y_{\min} = -\text{int}(2l)$$

取式(11)的任一直线 $y = y_j$ (常值) 截交离散射线族(式(8)), 对应截得一族交点, 最多 $(\Phi_0 - 1)/\Delta\phi$ 个。式(8)变形为

$$x_i|_{y=y_j} = x(\phi_i)|_{y=y_j} = -y_j \cot(N[\gamma] - \beta_i) + l(1 - N\beta'_i) [\cos\beta_i + \sin\beta_i \cot(N[\gamma] - \beta_i)] \quad (12)$$

$N = 1$, 得到 $x_1|_{y=y_j}, x_2|_{y=y_j}$, 最多 $\{(\Phi_0 - 1)/\Delta\phi\}$ 个 x 值, 即前述截得交点族的 x 坐标值。

比较所有 $x_i|_{y=y_j}$ 值, 解得最小值 $\min\{x_i|_{y=y_j}\}$ 并记为 x_{1j} , 则

$$x_{1j} = \min\{x_i|_{y=y_j}\} \quad (13)$$

(x_{1j}, y_j) 即对应 $y = y_j$ 时边界线 I 上的边界点 $P_{1j}^*|_{y=y_j}$ 。照此, 按式(11)遍历地取各 $y = y_j$ 值, 得所有边界点 $(x_{11}, y_1), (x_{12}, y_2)$, 共计 $\text{int}(2l)/\Delta y$ 个, 边界线 I 的离散数值解为 $\{(x_{1j}, y_j)\} (j = 1, 2, \dots, \text{int}(2l)/\Delta y)$ 。

2.1.2 推程边界线 II

仍设摆杆在某位置 O_2A , 过 H 作与 AH 延长线夹角为 $[\gamma]$ 的射线 L , 其方程为

$$x = y \cot(N[\gamma] + \beta) - l(1 - N\beta') [-\cos\beta + \sin\beta \cot(N[\gamma] + \beta)] \quad (0^\circ \leq \phi \leq \Phi_0) \quad (14)$$

式中, $N = 1$, 亦为含有连续单参数 ϕ 的一射线族方程。

记与 $y = c$ 对应的边界点 P_{II} 的 x 坐标 $x_{II}(c) = x_{II}|_{y=c}$, 据式(14)和 $N = 1$, 则有

$$x_{II}(c) = x_{II}|_{y=c} = \max\{x(\phi)\}|_{y=c} = \max\{c \cot([\gamma] + \beta) - l(1 - \beta') [-\cos\beta + \sin\beta \cot([\gamma] + \beta)]\} \quad (0^\circ \leq \phi \leq \Phi_0) \quad (15)$$

此时, 不存在“ ϕ_i^* 的特别说明”问题。

推程边界线 II 的精确解析解为

$$x_{II} = x_{II}(y) \quad (-\infty \leq y < 0) \quad (16)$$

式(15)的几何意义: 水平直线 $y = c$ 与式(14)表达的射线族 $\{L\}$ 截得无数个交点, 而 P_{II} 为无数个交点中的居最右端者。

同理, 据式(15)和式(5)可得无数个边界点 P_{II} , 从而求得边界线 II。

同前离散化处理方法, 式(6)、(7)和(9)~(11)通用, 与式(8)和(12)对应

$$x_i = x(\phi_i) = y \cot(N[\gamma] + \beta_i) - l(1 - N\beta'_i) [-\cos\beta_i + \sin\beta_i \cot(N[\gamma] + \beta_i)] = 0 \quad (17)$$

$$x_i|_{y=y_j} = x(\phi_i)|_{y=y_j} = y_j \cot(N[\gamma] + \beta_i) - l(1 - N\beta'_i) [-\cos\beta_i + \sin\beta_i \cot(N[\gamma] + \beta_i)] \quad (18)$$

式中, $N = 1$ 。

比较所有 $x_i|_{y=y_j}$ 值, 解得最大值 $\max\{x_i|_{y=y_j}\}$ 并记为 x_{2j} , 则

$$x_{2j} = \max\{x_i|_{y=y_j}\} \quad (19)$$

同理, 据式(11)遍取各 $y = y_j$ 值, 得所有边界点 $(x_{21}, y_1), (x_{22}, y_2)$ 等共计 $\text{int}(2l)/\Delta y$ 个, 推程边界线 II 的离散数值解为 $\{(x_{2j}, y_j)\} (j = 1, 2, \dots, \text{int}(2l)/\Delta y)$ 。

2.1.3 回程边界线 III

摆杆在某位置 O_2A , 延长线上截 $AJ = -l\beta'_r (\beta'_r < 0)$, 作与 AJ 夹角为 $[\gamma]$ 的射线 M , 其方程式

$$x = y \cot(N[\gamma]_r + \beta_r) + l(1 - N\beta'_r) [\cos\beta_r - \sin\beta_r \cot(N[\gamma]_r + \beta_r)] \quad (0^\circ \leq \phi \leq \Phi'_0) \quad (20)$$

式中, $N = 1$ 。

记与 $y = c$ 对应的边界点 P_{III} 的 x 坐标 $x_{III}(c) = x_{III}|_{y=c}$, 据式(20)和 $N = 1$, 有

$$x_{III}(c) = x_{III}|_{y=c} = \max\{x(\phi)\}|_{y=c} = \max\{c \cot([\gamma]_r + \beta_r) + l(1 - \beta'_r) [\cos\beta_r - \sin\beta_r \cot([\gamma]_r + \beta_r)]\} \quad (0^\circ \leq \phi \leq \Phi'_0) \quad (21)$$

此时, 亦不存在“ ϕ_i^* 的特别说明”问题。

推程边界线 III 的精确解析解为

$$x_{III} = x_{III}(y) \quad (-\infty \leq y < 0) \quad (22)$$

式(21)的几何意义: 水平直线 $y = c$ 与式(20)表达的射线族 $\{M\}$ 截得无数个交点, 而 P_{III} 为无数个交点中的居最右端者。

据式(21)和式(5)可得无数个边界点 P_{III} , 从而求得边界线 III。

式(7) ($[\text{int}(\phi_i^*) - 1]/\Delta\phi$ 更换为 Φ'_0)、式(6)和(9)~(11)通用, 与式(8)和(12)对应

$$x_i = x(\phi_i) = y \cot(N[\gamma]_r + \beta_{ri}) + l(1 - N\beta'_{ri}) [\cos\beta_{ri} - \sin\beta_{ri} \cot(N[\gamma]_r + \beta_{ri})] \quad (23)$$

$$x_i|_{y=y_j} = x(\phi_i)|_{y=y_j} = y_j \cot(N[\gamma]_r + \beta_{ri}) + l(1 - N\beta'_{ri}) [\cos\beta_{ri} - \sin\beta_{ri} \cot(N[\gamma]_r + \beta_{ri})] \quad (24)$$

式中, $N = 1$ 。

比较所有 $x_i|_{y=y_j}$ 值, 解得最大值 $\max\{x_i|_{y=y_j}\}$ 并记为 x_{3j} , 则

$$x_{3j} = \max\{x_i|_{y=y_j}\} \quad (25)$$

同理, 据式(11)遍历地取各 $y = y_j$ 值, 得所有边界点 $(x_{31}, y_1), (x_{32}, y_2)$ 等共计 $\text{int}(2l)/\Delta y$ 个, 边界线 III 的离散数值解为 $\{(x_{3j}, y_j)\} (j = 1, 2, \dots, \text{int}(2l)/\Delta y)$ 。

2.2 摆杆推程与凸轮转向相反

2.2.1 推程边界线 I

如图 2b 所示, 设摆杆在某位置 O_2A , 在其延长

线上截 $AH = l\beta'$, 过点 H 作与 AH 夹角为 $[\gamma]$ 的射线 K , 前面的式(2)通用, $N = -1$ 。式(2)是“相同、相反”两种情况时射线 K 的通用方程式。

同 2.1.1 节, 据式(2)和 $N = -1$, 对应有

$$x_I(c) = x_I|_{y=c} = \max\{x(\phi)\}|_{y=c} = \max\{c \cot([\gamma] + \beta) + l(1 + \beta')[\cos\beta - \sin\beta \cot([\gamma] + \beta)]\} \quad (0^\circ \leq \phi \leq \Phi_0) \quad (26)$$

此时, 无“ ϕ_1^* 的特别说明”问题。

推程边界线 I 的精确解析解, 式(4)通用。

式(26)的几何意义: 水平直线 $y = c$ 与式(2)表达的射线族 $\{K\}$ 截得无数个交点, 而 P_I 为无数个交点中的居最右端者。

据式(26)和式(5)可得无数个边界点 P_I , 求得边界线 I。

式(5)~(7)和式(9)~(11)通用, 只是式(7)、(11)中, $N = -1$ 。

比较式(12) ($N = -1$) 算得的所有 $x_i|_{y=y_j}$ 值, 解得最大值 $\max\{x_i|_{y=y_j}\}$ 并记为 x_{Ij} , 则

$$x_{Ij} = \max\{x_i|_{y=y_j}\} \quad (27)$$

据式(11)遍取各 $y = y_j$ 值, 得所有边界点 (x_{I1}, y_1) 、 (x_{I2}, y_2) 等共计 $\text{int}(2l)/\Delta y$ 个, 边界线 I 的离散数值解为 $\{(x_{Ij}, y_j)\} (j=1, 2, \dots, \text{int}(2l)/\Delta y)$ 。

2.2.2 推程边界线 II

仍设摆杆在某位置 O_2A , 过 H 作与 AH 延长线夹角为 $[\gamma]$ 的射线 L , 式(15)通用, $N = -1$ 。式(15)是“相同”、“相反”两种情况时射线 L 的通用方程式。

同 2.1.2 节, 据式(15)和 $N = -1$ 有

$$x_{II}(c) = x_{II}|_{y=c} = \min\{x(\phi)\}|_{y=c} = \min\{-c \cot([\gamma] + \beta) + l(1 + \beta')[\cos\beta + \sin\beta \cot([\gamma] - \beta)]\} \quad (0^\circ \leq \phi < \phi_2^*) \quad (28)$$

推程边界线 II 的精确解析解与式(16)通用。

ϕ_2^* 的特别说明: 与 2.1.1 节同理, 据类速度图原理, 为保证式(28)等的正确性, ϕ 的实际定义域取 $0^\circ \leq \phi < \phi_2^*$ 。 $\beta_m \leq [\gamma]$ 时, $\phi_2^* = \Phi_0$; $\beta_m > [\gamma]$ 时, ϕ_2^* 是方程 $\beta(\phi) - [\gamma] = 0$ 的解。

式(28)的几何意义: 水平直线 $y = c$ 与式(14) (取 $N = -1$) 表达的射线族 $\{L\}$ 的 $0^\circ \leq \phi < \phi_2^*$ 部分截得无数个交点, 而 P_{II} 为其中居最左端者。

据式(28)和式(5)可得无数个边界点 P_{II} , 求得边界线 II。

式(7)中 $[\text{int}(\phi_1^*) - 1]/\Delta\phi$ 更换为 $[\text{int}(\phi_2^*) - 1]/\Delta\phi$, 式(6)和式(9)~(11)通用, 只是式(17)、(18)中, $N = -1$ 。

比较根据式(18) ($N = -1$) 算得的所有 $x_i|_{y=y_j}$

值, 解得最小值 $\min\{x_i|_{y=y_j}\}$ 并记为 x_{2j} , 则

$$x_{2j} = \min\{x_i|_{y=y_j}\} \quad (29)$$

据式(11)遍取各 $y = y_j$ 值, 得所有边界点 (x_{21}, y_1) 、 (x_{22}, y_2) 等共计 $\text{int}(2l)/\Delta y$ 个, 边界线 II 的离散数值解为 $\{(x_{2j}, y_j)\} (j=1, 2, \dots, \text{int}(2l)/\Delta y)$ 。

2.2.3 回程边界线 III

设摆杆在某位置 O_2A , 其上截 $AJ = -l\beta'_r$ ($\beta'_r < 0$), 过点 J 作与 AJ 夹角为 $[\gamma]_r$ 的射线 M , 式(20)通用, $N = -1$ 。式(20)是两种情况时射线 M 的通用方程式。

同 2.1.3 节, 据式(20)和 $N = -1$ 有

$$x_{III}(c) = x_{III}|_{y=c} = \min\{x(\phi)\}|_{y=c} = \min\{-c \cot([\gamma]_r - \beta_r) + l(1 + \beta'_r)[\cos\beta_r + \sin\beta_r \cot([\gamma]_r - \beta_r)]\} \quad (\phi_3^* \leq \phi < \Phi'_0) \quad (30)$$

推程边界线 III 的精确解析解与式(22)通用。

关于 ϕ_3^* 的特别说明: 据类速度图原理, 为保证式(30)等的正确性, ϕ 的实际定义域取 $\phi_3^* < \phi \leq \Phi'_0$ 。 $\beta_m \leq [\gamma]_r$ 时, $\phi_3^* = \Phi'_0$; $\beta_m > [\gamma]_r$ 时, ϕ_3^* 是方程 $\beta_r(\phi) - [\gamma] = 0$ 的解。

式(30)的几何意义: 水平直线 $y = c$ 与式(20) (取 $N = -1$) 表达的射线族 $\{M\}$ 的 $\phi_3^* \leq \phi < \Phi'_0$ 部分截得无数个交点, 而 P_{III} 为其中最左端者。

据式(30)和式(5)可得无数个边界点 P_{III} , 求得边界线 III。

式(7) $[\text{int}(\phi_1^*) - 1]/\Delta\phi$ 更换为 $[\text{int}(\phi_3^*) - 1]/\Delta\phi$, 式(6)和式(9)~(11)通用, 只是式(23)和(24)中, $N = -1$ 。

比较式(24) ($N = -1$) 算得的所有 $x_i|_{y=y_j}$ 值, 解得最小值 $\min\{x_i|_{y=y_j}\}$ 并记为 x_{3j} , 则

$$x_{3j} = \min\{x_i|_{y=y_j}\} \quad (31)$$

据式(11)遍取各 $y = y_j$ 值, 得所有边界点 (x_{31}, y_1) 、 (x_{32}, y_2) 等共计 $\text{int}(2l)/\Delta y$ 个, 边界线 III 的离散数值解为 $\{(x_{3j}, y_j)\} (j=1, 2, \dots, \text{int}(2l)/\Delta y)$ 。

3 凸轮最小基圆半径 r_0 及摆杆长度 l 的确定

3.1 力锁合凸轮机构

力锁合凸轮机构如图 3 所示。通常情况下, $[\gamma]$ 取 $40^\circ \sim 50^\circ$, $[\gamma]_r$ 取 $10^\circ \sim 20^\circ$ 。

3.1.1 确定边界线 I 与 II 的交点

对边界线 I、II 的离散数值解进行一维搜索。据式(11)自 $y_j = y_1 = -\Delta y$ (即 $j=1$) 始, 逐次计算两条边界线对应同一 y_j 值的 x 坐标之差的绝对值, 即 $|x_{I1} - x_{21}|$, $|x_{I2} - x_{22}|$, \dots , 直至搜索到某一 j_1^* 值, 恰好满足

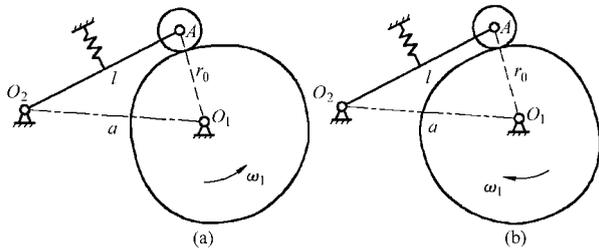


图3 力锁合凸轮机构

Fig.3 Force-drive cam mechanism

(a) 相同($N=1$) (b) 相反($N=-1$)

$$|x_{1j_1}^* - x_{2j_1}^*| = \min \{ |x_{1j} - x_{2j}| \} \quad (j=1, 2, \dots, \text{int}(2l/\Delta y)) \quad (32)$$

于是,交点的坐标为 $O_{j_1}^*(x_{1j_1}^*, y_{j_1}^*)$ 。

3.1.2 确定边界线 I 与 III 的交点

同理,对边界线 I、III 的离散数值解进行一维搜索。据式(11)自 $y_j = y_1 = -\Delta y$ 始,逐次计算对应同一 y_j 值的 x 坐标之差绝对值 $|x_{11} - x_{r1}|, |x_{12} - x_{r2}|, \dots$, 直至搜索到某一 j_2^* 值,恰好满足

$$|x_{1j_2}^* - x_{rj_2}^*| = \min \{ |x_{1j} - x_{rj}| \} \quad (j=1, 2, \dots, \text{int}(2l/\Delta y)) \quad (33)$$

于是,交点的坐标为 $O_{j_2}^*(x_{1j_2}^*, y_{j_2}^*)$ 。

3.1.3 确定边界线 II 与 III 的交点

对边界线 II、III 的离散数值解进行一维搜索。据式(11)自 $y_j = y_1 = -\Delta y$ 始,逐次计算对应同一 y_j 值的 x 坐标之差的绝对值 $|x_{21} - x_{r1}|, |x_{22} - x_{r2}|, \dots$, 直至搜索到某一 j_3^* 值,恰好满足

$$|x_{2j_3}^* - x_{rj_3}^*| = \min \{ |x_{2j} - x_{rj}| \} \quad (j=1, 2, \dots, \text{int}(2l/\Delta y)) \quad (34)$$

于是,交点的坐标为 $O_{j_3}^*(x_{2j_3}^*, y_{j_3}^*)$ 。

根据理论分析和大量算例,得到结论:

如图4所示,边界线 I、II 和 III 的相对分布/截交形态,共存在3种情况: $y_{j_1}^* < y_{j_2}^* < y_{j_3}^*$ 、 $y_{j_1}^* = y_{j_2}^* = y_{j_3}^*$ 、 $y_{j_3}^* < y_{j_2}^* < y_{j_1}^*$ 。

据图4不难看出:

$y_{j_1}^* < y_{j_2}^* < y_{j_3}^*$ 和 $y_{j_1}^* = y_{j_2}^* = y_{j_3}^*$ 时,凸轮轴心 O_1 许用区域的“整程边界线” Σ ,由边界线 I 和 II 在其交点 $O_{j_1}^*$ 以下的两个子段构成。

$y_{j_3}^* < y_{j_2}^* < y_{j_1}^*$ 时,凸轮轴心 O_1 许用区域的“整程边界线” Σ ,分别由边界线 I 的 $O_{j_2}^*$ 点以下子段,边界线 III 介于 $O_{j_2}^*$ 、 $O_{j_3}^*$ 两点间子段和边界线 II 的 $O_{j_3}^*$ 点以下子段总共3个子段构成。

一般,凸轮最小基圆半径和中心距为

$$\begin{cases} r_0 = [(x_{1j_1}^* - l)^2 + y_{j_1}^{*2}]^{1/2} \\ a = (x_{1j_1}^{*2} + y_{j_1}^{*2})^{1/2} \end{cases} \quad (y_{j_1}^* < y_{j_2}^* < y_{j_3}^* \text{ 或 } y_{j_1}^* = y_{j_2}^* = y_{j_3}^*) \quad (35)$$

$$\begin{cases} r_0 = [(x_{1j_2}^* - l)^2 + y_{j_2}^{*2}]^{1/2} \\ a = (x_{1j_2}^{*2} + y_{j_2}^{*2})^{1/2} \end{cases} \quad (y_{j_3}^* < y_{j_2}^* < y_{j_1}^*) \quad (36)$$

严格意义上讲,当 $[\gamma]$ 值偏小时,应沿“整程边界线” Σ 通过一维搜索,根据

$$\min r_0 = [(x_{\Sigma} - l)^2 + y_{\Sigma}^2]^{1/2} \quad (37)$$

筛选出具有凸轮最小基圆半径的机构“最小尺寸解”。式中, x_{Σ} 、 y_{Σ} 为“整程边界线” Σ 上点的 x 、 y 坐标值。

工程实际中,通常预先给定实际中心距 a 。此时,可根据解得的 l 、 r_0 和 a 三者间的尺寸比例关系,反求得到对应的 l 和 r_0 。

3.2 共轭凸轮机构

图5a、5b所示分别为主凸轮机构中摆杆 O_2A 推程时与凸轮1转向相同、相反的两种情况,在副凸轮机构中情况恰好相反。明确这种特性后,可按3.1节的方法,据预先给定的实际中心距 a ,解得共轭凸轮机构的 r_0 、 r_0' 和 l 、 l' 。

3.3 槽道凸轮机构

图6a、6b所示分别为主推程时摆杆 O_2A 与凸轮1转向相同、相反的两种情况。这种凸轮机构,摆杆往返两行程皆为推程,取得最小基圆半径的凸轮轴心为边界线 I 与 III 的交点,故根据3.1.2节求解计算即可。

此时与边界线 III 有关的式(20)、(23)和(24)中的 $[\gamma]$,须替换为 $[\gamma]$ 。随后,据式(33)、(36)和预先给定的中心距 a 等,解得槽道凸轮机构的 r_0 和 l 。

4 机构综合举例

设计槽道滚子摆动从动杆盘形凸轮机构。已知 $\Phi_0 = \Phi_0' = \Phi_s = \Phi_s' = 90^\circ$, 摆杆行程角 $\beta_m = 30^\circ$, $N = 1$, 摆杆往返皆选取改进梯形加速度规律,中心距 $a = 200$ mm,许用传动角 $[\gamma] = 50^\circ$,试确定凸轮基圆半径 r_0 和摆杆长度 l 。

根据已知条件,再假定 $l = 100$ mm,取 $p = q = 2$,故 $\Delta\phi = 0.01^\circ$, $\Delta y = 0.01$ mm。据2.1.1节公式、“特别说明”和步骤,据式(13)、(14)算得边界线 I 的离散边界点族 $\{(x_{1j}, y_{1j})\}$ 共 2×10^4 个。

同理,据2.1.3节中相关公式和步骤,将式(20)、(23)和(24)中的 $[\gamma]$,替换为 $[\gamma]$,算得边界线 III 的离散点族 $\{(x_{3j}, y_{3j})\}$ 共 2×10^4 个。

据3.1.2节,以式(14)和(28)进行一维搜索,得到 $j_2^* = 5605$, $x_{1j_2}^* = 114.7412$, $y_{j_2}^* = -56.0502$;据式(36)得 $r_0 = 64.2368$ mm、 $a = 119.5473$ mm。

通过式(37)的搜索验证,上述解确为取得凸轮

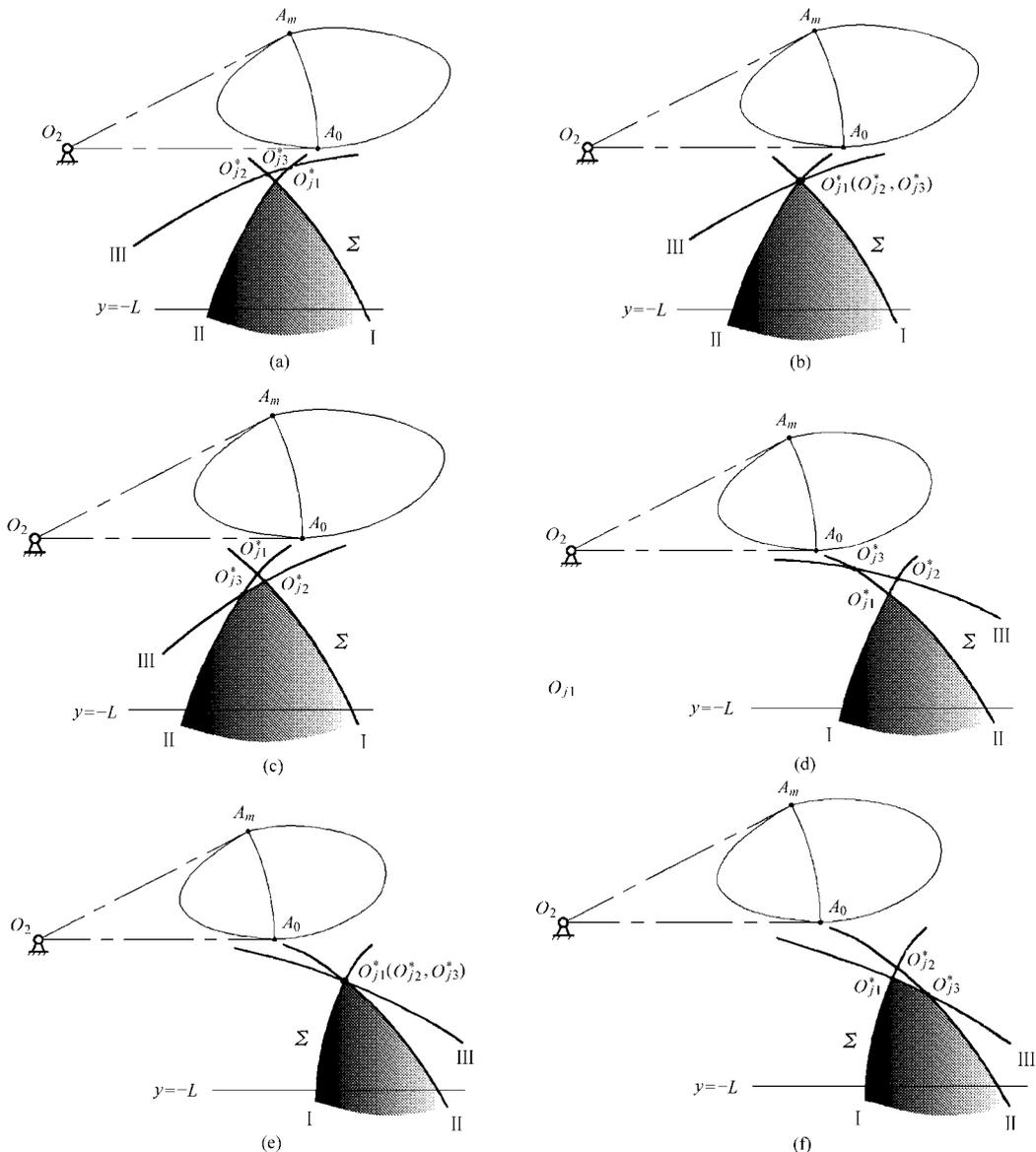


图 4 边界线 I、II 和 III 相对分布/截交的 3 种情况

Fig. 4 Three distributed cases of boundary line I, II and III

(a) $N=1$, 边界线 I (b) $N=1$, 边界线 II (c) $N=1$, 边界线 III (d) $N=2$, 边界线 I (e) $N=2$, 边界线 II (f) $N=2$, 边界线 III

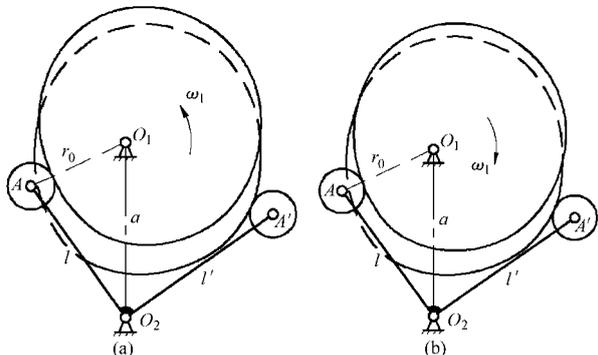


图 5 共轭凸轮机构

Fig. 5 Conjugate cam mechanism

(a) 相同 ($N=1$) (b) 相反 ($N=-1$)

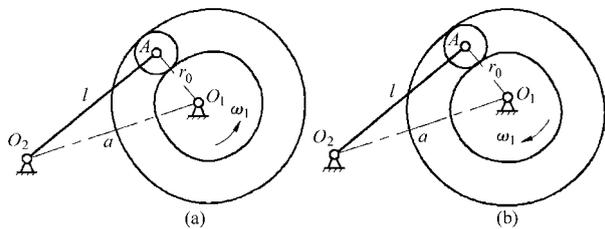


图 6 槽道凸轮机构

Fig. 6 Grooved cam mechanism

(a) 相同 ($N=1$) (b) 相反 ($N=-1$)

107.466 8 mm、 $l = 167.297 8$ mm。

5 结束语

基于经典的类速度图原理,通过提出“辅助平行直线族”,解决了长期以来一直未获得彻底解决的摆动从动杆盘形凸轮机构的最小尺寸设计问题。

最小基圆半径的机构最小尺寸解。

再据给定的实际中心距 $a = 200$ mm,据算得的 l 、 r_0 和 a 三者间的尺寸比例关系,反求得到 $r_0 =$

参 考 文 献

- 1 Костицын В Т. Методы расчёта наименьших размеров кулаковых механизмов со штангой в дрямолинейных направляющих[J]. Труды семинара до теории машин и механизмов ин-та машиноведения. Изд. АН. СССР. Т. 3. Выш. 12, 1947.
- 2 Костицын В Т. О наименьших габаритах кулакового механизма с кауающей штангой[J]. Труды семинара до теории машин и механизмов ин-та машиноведения. Изд. АН. СССР. Т. 3. Выш. 35, 1950.
- 3 Велеоконев И М. Механика машин[M]. Расчёты с Применением ацм, Кисв Виша Школ, 1978; 98 ~ 102.
- 4 Велекий В Я. Расчёт лараметров кулачкового механизма с ролнковым коромысл м по допустимому углу давления НА ЗВМ[M]. ТММ, Вып. , 1978; 11 ~ 15.
- 5 华大年. 按许用压力角设计最小尺寸的摆动从动杆平面凸轮的解析法[J]. 机械工程学报, 1982, 18(4): 74 ~ 79.
Hua Danian. The analytics for designing minimum size disc cam mechanisms with oscillating follower according to allowable pressure angle[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1982, 18(4): 74 ~ 79. (in Chinese)
- 6 Angeles J, Lopez-Cajun C. Optimal synthesis of oscillating roller-follower cam mechanisms with prescribed functional constraints[C] // Proceedings of the 1984 international Computers in Engineering Conference and Exhibit. Las Vegas, USA. ASME, New York, USA, 1984: 273 ~ 277.
- 7 常勇, 吴从焮, 李延平. 关于《按许用压力角设计最小尺寸的摆动从动杆平面凸轮的解析法》一文的两点注记[J]. 黑龙江商学院学报:自然科学版, 1989, 5(2): 49 ~ 54.
Chang Yong, Wu Congxin, Li Yanping. Two notes on “the analytics for designing minimum size disc cam mechanisms with oscillating follower according to allowable pressure angle” [J]. Journal of Heilongjiang Commercial College: Natural Sciences Edition, 1989, 5(2): 49 ~ 54. (in Chinese)
- 8 常勇, 吴从焮, 李延平. 关于《按许用压力角设计最小尺寸的摆动从动杆平面凸轮的解析法》一文的再注记[J]. 黑龙江商学院学报:自然科学版, 1990, 6(4): 15 ~ 19.
Chang Yong, Wu Congxin, Li Yanping. The further notes on “the analytics for designing minimum size disc cam mechanisms with oscillating follower according to allowable pressure angle” [J]. Journal of Heilongjiang Commercial College: Natural Sciences Edition, 1990, 6(4): 15 ~ 19. (in Chinese)
- 9 张秋娣, 华大年. 合理确定摆杆盘形凸轮基本尺寸的 CAD 图解计算[J]. 中国纺织大学学报, 1990, 16(6): 84 ~ 94.
Zhang Qiudi, Hua Danian. CAD graphic calculation in determining the prime dimension of the disk cam with oscillating rods[J]. Journal China Textile University, 1990, 16(6): 84 ~ 94. (in Chinese)
- 10 Peng Yunke, Zhou Ji, Yu Jun. Optimal design of principle parameters for a disc cam mechanism with oscillating rollower follower [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1991, 4(4): 282 ~ 288.
- 11 Schoenherr J. Synthesis of planar cam mechanisms with lowest dimensions[J]. Mechanism and Machine Theory, 1993, 28(3): 317 ~ 325.
- 12 汪萍, 侯慕英. 确定摆动从动件盘形凸轮机构基本尺寸的线图法研究[J]. 机械设计, 1994, 11(5): 23 ~ 26.
Wang Ping, Hou Muying. A study on nomographic method to determinate the basic dimensions for disk cam with oscillating follower[J]. Machine Design, 1994, 11(5): 23 ~ 26. (in Chinese)
- 13 常勇, 刘国祥. 构造平面与空间凸轮机构类速度图的一种通用方法[J]. 机械设计, 1995, 12(2): 4 ~ 7.
Chang Yong, Liu Guoxiang. A general and effective method for constructing the analogous-velocity charts of planar and special cam mechanisms[J]. Machine Design, 1995, 12(2): 4 ~ 7. (in Chinese)
- 14 常勇, 李延平, 刘国祥. 按许用压力角设计最小尺寸的直动从动杆空间凸轮机构[J]. 机械设计, 1993, 10(4): 24 ~ 26.
Chang Yong, Li Yanping, Liu Guoxiang. The design of minimum sized special cam mechanism with a translating follower according to allowable pressure angle[J]. Machine Design, 1993, 10(4): 24 ~ 26. (in Chinese)
- 15 常勇, 孙寿文, 李延平, 等. 最小尺寸摆动从动杆弧面凸轮机构的设计方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1997, 29(3): 29 ~ 32.
Chang Yong, Sun Shouwen, Li Yanping, et al. A designing method of the minimum size oscillating follower arc surface cam mechanism[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 1997, 29(3): 29 ~ 32. (in Chinese)
- 16 孙寿文, 李延平, 常勇, 等. 最小尺寸摆动从动杆移动凸轮机构的一种设计方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2000, 32(2): 52 ~ 55.
Sun Shouwen, Li Yanping, Chang Yong, et al. Design of minimum size oscillating follower translating cam mechanism[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2000, 32(2): 52 ~ 55. (in Chinese)
- 17 孙智慧, 李延平, 常勇. 最小尺寸摆动从动杆球面凸轮机构的设计方法[J]. 机械设计, 2000, 17(4): 22 ~ 23.
Sun Zhihui, Li Yanping, Chang Yong. A designing method of spherical surfaced cam mechanism with minimum sized oscillating follower[J]. Machine Design, 2000, 17(4): 22 ~ 23. (in Chinese)
- 18 孙寿文, 张一同, 李瑰贤. 摆动从动件共轭凸轮轴心许用区的确定[J]. 机械工程学报, 2000, 36(2): 95 ~ 98.
Sun Shouwen, Zhang Yitong, Li Guixian. Determination on allowable axis center region of oscillating link conjugate cam[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(2): 95 ~ 98. (in Chinese)

- 19 Navarro O, Wu C J, Angeles J. Size-minimization of planar cam mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(3): 371 ~ 386.
- 20 石永刚, 吴央芳. 凸轮机构设计与应用创新[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007.
- 21 Ji Z, Manna Y A. Size minimization of disc cams with roller-followers under pressure angle constraint[J]. Proc IMech E, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2008, 222(12): 2 475 ~ 2 484. (in Chinese)
- 22 常勇, 杨富富. 作平面运动滚子从动件盘形凸轮机构的第II类机构综合问题[J]. 机械工程学报, 2010, 46(21): 35 ~ 41. Chang Yong, Yang Fufu. Second mechanism synthesis task of disc cam mechanisms with roller follower moving in planar general motion[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(21): 35 ~ 41. (in Chinese)
- 23 常勇, 杨富富. 作平面运动滚子从动件形锁合凸轮机构的第II类机构综合问题[J]. 机械工程学报, 2012, 48(1): 39 ~ 46. Chang Yong, Yang Fufu. Research on second mechanisms synthesis task of positive-drive disc cam mechanisms with roller follower moving in general planar motion[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(1): 39 ~ 46. (in Chinese)
- 24 常勇, 李延平, 刘国祥. 按许用压力角设计最小尺寸的作平面复杂运动滚子从动件平面凸轮机构的解析法[J]. 机械工程学报, 1991, 27(4): 37 ~ 41. Chang Yong, Li Yanping, Liu Guoxiang. The analytics for designing minimum size disc cam mechanisms whose roller follower moving in general planar motion according to allowable pressure angle[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1991, 27(4): 37 ~ 41. (in Chinese)
- 25 常勇, 杨富富, 胡志超, 等. 作平面运动滚子从动件盘形凸轮机构的广义第II类综合问题[J]. 机械工程学报, 2012, 48(15): 47 ~ 57. Chang Yong, Yang Fufu, Hu Zhichao, et al. Research on the general second mechanism synthesis task of disc cam mechanisms with roller follower moving in planar general motion[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(15): 47 ~ 57. (in Chinese)

(上接第 236 页)

- 7 牛大鹏, 王福利, 何大阔, 等. 多目标混沌差分进化算法 [J]. 控制与决策, 2009, 24(3): 361 ~ 364. Niu Dapeng, Wang Fuli, He Dakuo, et al. Chaotic differential evolution for multiobjective optimization[J]. Control and Decision, 2009, 24(3): 361 ~ 364. (in Chinese)
- 8 Robic T, Filipic B. DEMO: differential evolution for multiobjective optimization [C] // Proc. of EMO'05, Berlin: Springer, 2005: 520 ~ 533.
- 9 Deb K, Pratap K, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182 ~ 197.
- 10 龚文引, 蔡之华. 基于 E 占优的正交多目标差分演化算法研究 [J]. 计算机研究与发展, 2009, 46(4): 655 ~ 666. Gong Wenyin, Cai Zhihua. Research on an E-domination based orthogonal differential evolution algorithm for multi-objective optimization[J]. Journal of Computer Research and Development, 2009, 46(4): 655 ~ 666. (in Chinese)
- 11 Abbass H, Sarker R. The Pareto differential evolution algorithm [J]. International Journal on Artificial Intelligence Tools, 2002, 11(4): 531 ~ 552.
- 12 张利彪, 周春光, 马铭, 等. 基于极大极小距离密度的多目标微分进化算法[J]. 计算机研究与发展, 2007, 44(1): 177 ~ 184. Zhang Libiao, Zhou Chunguang, Ma Ming, et al. A multi-objective differential evolution algorithm based on max-min distance density[J]. Journal of Computer Research and Development, 2007, 44(1): 177 ~ 184. (in Chinese)
- 13 吴亮红, 王耀南, 袁小芳, 等. 多目标优化问题的差分进化算法研究 [J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2009, 36(2): 53 ~ 57. Wu Lianghong, Wang Yaonan, Yuan Xiaofang, et al. Research on differential evolution algorithm for MOPS[J]. Journal of Hunan University: Natural Science, 2009, 36(2): 53 ~ 57. (in Chinese)
- 14 朱明道. 油膜厚度与滑动轴承精度的讨论[J]. 上海电力学院学报, 1998, 14(3): 25 ~ 29. Zhu Mingdao. Discussion on lubricant film thickness and bearing accuracy in the sliding bearing[J]. Journal of Shanghai Institute of Electric Power, 1998, 14(3): 25 ~ 29. (in Chinese)
- 15 Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results [J]. Evolutionary Computation, 2000, 8(2): 173 ~ 195.
- 16 Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: improving the strength Pareto evolutionary algorithm [C] // Proceedings of International Conference on Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems, Berlin: Springer, 2002: 95 ~ 100.
- 17 Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable test problems for evolutionary multi-objective optimization[R]. Swiss Federal Institute of Technology, Tech. Rep.: 112, 2001.