

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.02.046

固定结合面刚度分形模型*

温淑花 张宗阳 张学良 兰国生 丁红钦 王南山

(太原科技大学机械工程学院, 太原 030024)

摘要: 基于粗糙表面统计学参数与表面轮廓分形参数之间的关系,给出了结合面等效粗糙表面轮廓分形参数的计算方法;在此基础上,提出了结合面切向接触刚度的修正分形模型;为验证模型的正确有效性,将固定结合面等效为若干个法向和切向接触弹簧单元,其刚度通过相应的接触刚度模型进行计算,进而对文献[9]的结合面实验装置——哑铃模型进行了有限元建模及模态分析,间接证明了接触刚度的正确有效性,并探讨了等效接触弹簧单元的刚度、数量对有限元建模精度的影响。此外,对文献[8]的实验模型进行了有限元建模及谐响应分析,并对实验模型的实测、柔性连接仿真与刚性连接仿真频响曲线进行了对比,进一步证实了在仿真建模过程中考虑结合面接触刚度的必要性。

关键词: 结合面 分形模型 接触刚度 模态分析 频响函数

中图分类号: TH113.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2013)02-0255-06

Stiffness Fractal Model for Fixed Joint Interfaces

Wen Shuhua Zhang Zongyang Zhang Xueliang Lan Guosheng Ding Hongqin Wang Nanshan

(College of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: Based on the relationship between the rough surface statistics parameters and surface profile fractal parameters, a method for calculating equivalent rough surface fractal parameters was proposed. Furthermore, tangential contact stiffness model was modified. The FEM and modal of the dumb-bell could be obtained when the joint interface was equivalent to the spring elements whose stiffnesses were obtained from the contact stiffness model and evident the effectiveness of the contact model, then the major factors of the modeling accuracy from the stiffness and the numbers of the equivalent spring element was discussed. In addition, the FEM of another dumb-bell was obtained similarly. The frequency response functions (FRFs) of the flexible connection FEM model and the rigid connection FEM model could be obtained from the result of the harmonic response analysis. Through the comparison of the FRFs, the necessity of the research on contact stiffness model was confirmed.

Key words: Joint interface Fractal model Contact stiffness Modal analysis Frequency response functions

引言

结合面的动态特性参数是影响机械结构系统动力学性能的关键因素。据统计,机床中出现的振动问题有60%以上源自结合面^[1],因此结合面动态特性参数问题一直是国内外学术界研究的一个热点。在分形接触理论研究方面,Majumdar等提出了以分

形几何为基础的粗糙表面接触分形模型——MB模型^[2]。文献[1,3~4]利用MB模型及经典接触理论^[5]建立了结合面接触刚度模型,但未明确结合面等效粗糙表面分形参数的计算方法。文献[6]在文献[7]的基础上研究了结合面的接触刚度,并进行了理论模型计算结果与实验结果的对比,但其切向接触刚度模型仅适用于具有相同弹性常数的表面接

收稿日期:2011-11-22 修回日期:2012-01-10

*国家自然科学基金资助项目(51275328,50775153)、山西省自然科学基金资助项目(2012011023-4)和山西省回国留学人员科研资助项目(2011-076)

作者简介:温淑花,副教授,主要从事机械结构动态特性和现代优化理论研究,E-mail:kd_wsh@sina.com

触^[5]。文献[8]给出了识别结合部的2个重要表征参数(分形维数和分形粗糙度)的方法,修正了结合部法向总载荷公式,并对文献[3~4]的法向与切向接触刚度的理论解作了定量验证。

本文提出结合面等效粗糙表面轮廓分形参数(分形维数 D 和分形特征长度尺度参数 G)的一种计算方法,同时改进文献[1,3,4,6]的切向接触刚度模型,并利用文献[9]的结合面实验装置——哑铃模型及所给实验数据,将结合面接触刚度分形模型计算结果以接触弹簧单元模式嵌入到哑铃模型的有限元模型,进行模态分析,对几种法向和切向接触刚度模型进行验证与比较,进而探讨等效接触弹簧单元的刚度、数量对有限元模型计算精度的影响。并对文献[8]的实验模型进行有限元建模及谐响应分析,通过对实验模型的实测频响函数^[8]、柔性连接仿真频响函数与刚性连接仿真频响函数进行对比,进一步证实了在仿真建模过程中考虑结合面接触刚度的必要性。

1 结合面等效粗糙表面轮廓分形参数的计算方法

结合面实质上是由两接触粗糙表面组成的,目前一般将其简化为一个等效粗糙表面与一个刚性平面的接触问题^[1~4,6],因此等效粗糙表面分形参数的计算成为结合面接触刚度理论计算的前提与关键。

单个粗糙表面的传统统计学参数与分形参数之间的关系为^[1,9]

$$\sigma^2 = \int_{\omega_L}^{\omega_H} S(\omega) d\omega = \frac{G^{2(D-1)}}{2\ln\gamma} \frac{1}{4-2D} \left(\frac{1}{\omega_L^{4-2D}} - \frac{1}{\omega_H^{4-2D}} \right) \quad (1)$$

$$\sigma'^2 = \int_{\omega_L}^{\omega_H} \omega^2 S(\omega) d\omega = \frac{\pi^2 G^{2(D-1)}}{2\ln\gamma} \frac{1}{2D-2} (\omega_H^{2D-2} - \omega_L^{2D-2}) \quad (2)$$

式中 σ ——粗糙表面的表面高度标准差
 σ' ——粗糙表面的表面斜率标准差
 γ ——谱密度的尺度参数, $\gamma > 1$, 对于服从正态分布的随机表面,一般取 $\gamma = 1.5$
 ω_H ——由测量仪器分辨率和滤波决定的最高频率, m^{-1}
 ω_L ——由采样长度决定的最低频率, m^{-1}
 $S(\omega)$ ——功率谱

两相接触粗糙表面的等效粗糙表面与两接触粗糙表面的统计学参数符合^[10]

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad (3)$$

$$\sigma'^2 = \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 \quad (4)$$

式中 σ_1, σ_2 ——两接触粗糙表面1、2的表面高度标准差

σ_1', σ_2' ——两接触粗糙表面1、2的表面斜率标准差

根据式(1)~(4),利用已知的两接触粗糙表面的统计学参数 σ_1, σ_2 和 σ_1', σ_2' , 可得到等效粗糙表面的分形维数 D 和分形特征长度尺度参数 G 。

2 结合面分形接触刚度模型

2.1 模型1

文献[1]基于MB分形接触模型^[2],首次建立了结合面接触刚度分形模型。本文中模型1的法向接触刚度直接采用文献[1]中的法向接触刚度模型。模型1的切向接触刚度是对文献[1]的切向接触刚度模型的修正。使其模型适用于具有不同弹性常数的物体。

(1)模型1的法向接触刚度

$$k_n = \frac{2E^*}{\sqrt{\pi}} \int_{a'_c}^{a'_L} a'^{0.5} n(a') da' = \frac{2E^* D}{\sqrt{\pi}(1-D)} a_L^{0.5D} (a_L^{0.5-0.5D} - a_c^{0.5-0.5D}) \quad (5)$$

$$n(a') = 0.5Da_L^{0.5D} a'^{-1-0.5D} \quad (0 < a' \leq a'_L) \quad (6)$$

其中 $a_c = G^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}H}{2E^*} \right)^{\frac{2}{1-D}} \quad (7)$

$$E^* = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (8)$$

式中 $n(a')$ ——接触点截面积的分布密度

a' ——微接触截面积, m^2

a'_L ——最大接触点截面积, m^2

a'_c ——临界接触截面积, m^2

a_c ——微接触面的临界实际接触面积^[13], m^2

H ——较软材料硬度, Pa

a_L ——微接触面最大实际接触面积, m^2

E^* ——两接触材料的等效弹性模量, Pa

E_1, E_2 ——两接触材料的弹性模量, Pa

ν_1, ν_2 ——两接触材料的泊松比

(2)模型1的切向接触刚度

$$k_t = \int_{a'_c}^{a'_L} 8G_x^* \sqrt{\frac{a'}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\mu} \frac{T}{P} \right)^{1/3} n(a') da' = \frac{8G_x^* D}{\sqrt{\pi}(1-D)} \left(1 - \frac{1}{\mu} \frac{T}{P} \right)^{1/3} a_L^{0.5D} (a_L^{0.5-0.5D} - a_c^{0.5-0.5D}) \quad (9)$$

其中 $G_x^* = \left(\frac{2-\nu_1}{G_{x1}} + \frac{2-\nu_2}{G_{x2}} \right)^{-1} \quad (10)$

$$G_{x1} = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} \quad (11)$$

$$G_{x2} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)} \quad (12)$$

式中 μ ——结合面两接触材料摩擦因数
 T ——两粗糙表面接触时切向载荷, N
 P ——两粗糙表面接触时法向载荷, N
 G_x^* ——结合面材料切变模量^[5], Pa
 G_{x1} 、 G_{x2} ——两接触材料剪切弹性模量, Pa
 (3) 模型1的结合面真实接触面积与法向接触载荷的关系^[11]

$$P = \frac{4EG^{D-1}}{3\sqrt{\pi}} \int_{a'_c}^{a'_L} n(a') a'^{1.5-0.5D} da' + H \int_0^{a'_c} n(a') ada' =$$

$$\begin{cases} \frac{4E^* DG^{D-1}}{(9-6D)\sqrt{\pi}} a_L^{0.5D} (a_L^{1.5-D} - a_c^{1.5-D}) + \\ \frac{HD}{2-D} a_L^{0.5D} a_c^{1-0.5D} & (D \neq 1.5) \\ \sqrt{\pi} G^{0.5} E^* a_L^{0.75} \ln \frac{a_L}{a_c} + 3Ha_L^{0.75} a_c^{0.25} & (D = 1.5) \end{cases} \quad (13)$$

其中 $a_L = \frac{2-D}{D} A_r$ (14)

式中 A_r ——两接触面的真实接触面积, m²

2.2 模型2

Wang等^[12]对微接触的截面积 a' 的接触点大小分布密度进行了修正, 文献[3~4]在文献[1]的基础上, 引入了修正的微接触点的截面积的分布密度函数

$$n_{re}(a') = 0.5D\psi^{1-0.5D} a_L^{0.5D} a'^{-1-0.5D} \quad (0 < a' \leq a'_L) \quad (15)$$

式中 ψ ——域扩展因子^[12]

$$\frac{D\psi^{1-0.5D} - D(1 + \psi^{-0.5D})^{\frac{D-2}{D}}}{2-D} = 1 \quad (16)$$

由方程(16)可确定 ψ 。

(1) 模型2的法向接触刚度^[3]

$$k_n = \frac{2E^*}{\sqrt{\pi}} \int_{a'_c}^{a'_L} a'^{0.5} n_{re}(a') da' =$$

$$\frac{2E^* D}{\sqrt{\pi}(1-D)} \psi^{1-0.5D} a_L^{0.5D} (a_L^{0.5-0.5D} - a_c^{0.5-0.5D}) \quad (17)$$

(2) 模型2的切向接触刚度

$$k_t = \int_{a'_c}^{a'_L} 8G_x^* \sqrt{\frac{a'}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\mu} \frac{T}{P}\right)^{1/3} n_{re}(a') da' =$$

$$\frac{8G_x^* D}{\sqrt{\pi}(1-D)} \left(1 - \frac{1}{\mu} \frac{T}{P}\right)^{1/3} \psi^{1-0.5D} a_L^{0.5D} (a_L^{0.5-0.5D} - a_c^{0.5-0.5D}) \quad (18)$$

(3) 模型2的结合面真实接触面积与法向载荷的关系^[9]

$$P = \frac{4EG^{D-1}}{3\sqrt{\pi}} \int_{a'_c}^{a'_L} n_{re}(a') a'^{1.5-0.5D} da' + H \int_0^{a'_c} n_{re}(a') ada' =$$

$$\begin{cases} \frac{2^{3-0.5D} E^* DG^{D-1} \psi^{1-0.5D}}{\sqrt{\pi}(9-6D)} a_L^{0.5D} (a_L^{1.5-D} - a_c^{1.5-D}) + \\ \frac{DH\psi^{1-0.5D}}{2-D} a_L^{0.5D} a_c^{1-0.5D} & (D \neq 1.5) \\ \frac{2^{0.25}}{\sqrt{\pi}} E^* G^{0.5} \psi^{0.25} a_L^{0.75} \ln \frac{a_L}{a_c} + 3H\psi^{0.25} a_L^{0.75} a_c^{0.25} & (D = 1.5) \end{cases} \quad (19)$$

其中 $a_L = \frac{2-D}{D} \psi^{0.5D-1} A_r$ (20)

2.3 模型3

假设粗糙接触表面的轮廓各向同性, 则存在关系: $D_s = D + 1$ (D_s 是表面的分形维数, $D_s \in (2, 3)$)。文献[6]将结合面的等效接触粗糙表面假设为各向同性表面, 在文献[7]的基础上建立了粗糙表面的接触刚度分形模型, 并进行了理论与实验结果的对比。但是, 文献[9]中求解得到的切向接触刚度仅在两接触材料属性一致的条件下适用, 即当两接触材料属性不相同, 该切向刚度模型将失效^[5]。本文对其进行了改进, 使其模型适用于具有不同弹性常数的物体, 并称之为模型3的切向接触刚度。

(1) 模型3的法向接触刚度^[6]

$$k_n = \int_{a'_c}^{a'_L} \frac{4E^*}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{3-D}{2-D}\right) a'^{0.5} n(a') da' =$$

$$\frac{4E^* D(3-D)}{3\sqrt{\pi}(2-D)(D-1)} a_L^{0.5D} (a_c^{0.5-0.5D} - a_L^{0.5-0.5D}) \quad (21)$$

其中 $a_c = \frac{1}{2} \left[\frac{2^{9-2D}}{9\pi^{3-D}} G^{2D-2} \left(\frac{E^*}{H}\right)^2 \ln \gamma \right]^{\frac{1}{D-1}}$ (22)

(2) 模型3的切向接触刚度

$$k_t = \int_{a'_c}^{a'_L} 8G_x^* \sqrt{\frac{a'}{\pi}} n(a') da' =$$

$$\frac{8G_x^* D}{\sqrt{\pi}(1-D)} a_L^{0.5D} (a_L^{0.5-0.5D} - a_c^{0.5-0.5D}) \quad (23)$$

(3) 模型3的结合面真实接触面积与法向载荷的关系^[6]

$$P = \int_{a'_c}^{a'_L} \frac{2^{4.5-D}}{3\pi^{1.5-0.5D}} (\ln \gamma)^{0.5} G^{D-1} E^* \cdot$$

$$a'^{1.5-0.5D} n(a') da' =$$

$$\begin{cases} \frac{2^{6-1.5D}}{3\pi^{1.5-0.5D}} \frac{D}{3-2D} (\ln \gamma)^{0.5} G^{D-1} E^* a_L^{1.5-0.5D} \cdot \\ \left[1 - \left(\frac{a_c}{a_L}\right)^{1.5-D}\right] + \frac{2D}{2-D} Ha_L \left(\frac{a_c}{a_L}\right)^{1-0.5D} & (D \neq 1.5) \\ 2^{1.75} \pi^{-0.75} (\ln \gamma)^{0.5} G^{0.5} E^* a_L^{0.75} \ln \frac{a_L}{a_c} + 6Ha_L^{0.75} a_c^{0.25} & (D = 1.5) \end{cases} \quad (24)$$

$$A_r = \frac{D}{2-D} a_L \left[1 + \left(\frac{a_c}{a_L} \right)^{1-0.5D} \right] \quad (25)$$

2.4 模型4

模型4是在模型3的基础上,建立了计及微接触大小分布的域扩展因子影响的结合面接触刚度的分形模型。

(1) 模型4的法向接触刚度^[13]

$$k_n = \int_{a'_c}^{a'_L} \frac{4E^*}{3} \frac{3-D}{\sqrt{\pi}} a'^{0.5} n_{re}(a') da' = \frac{4E^* D(3-D)}{3\sqrt{\pi}(2-D)(D-1)} \psi^{1-0.5D} a_L^{0.5D} (a_c^{0.5-0.5D} - a_L^{0.5-0.5D}) \quad (26)$$

(2) 模型4的切向接触刚度

$$k_t = \int_{a'_c}^{a'_L} 8G_s^* \sqrt{\frac{a'}{\pi}} n_{re}(a') da' = \frac{8G^* D}{\sqrt{\pi}(1-D)} \psi^{1-0.5D} a_L^{0.5D} (a_L^{0.5-0.5D} - a_c^{0.5-0.5D}) \quad (27)$$

(3) 模型4的真实接触面积与法向载荷的关系^[13]

$$P = \int_{a'_c}^{a'_L} \frac{2^{4.5-D}}{3\pi^{1.5-0.5D}} (\ln\gamma)^{0.5} G^{D-1} E^* a'^{1.5-0.5D} n_{re}(a') da' = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2^{6-1.5D}}{3\pi^{1.5-0.5D}} \frac{D}{3-2D} (\ln\gamma)^{0.5} G^{D-1} E^* \psi^{1-0.5D} \cdot \\ a_L^{1.5-0.5D} \left[1 - \left(\frac{a_c}{a_L} \right)^{1.5-D} \right] + \\ H \frac{2D}{2-D} \psi^{1-0.5D} a_L \left(\frac{a_c}{a_L} \right)^{1-0.5D} \quad (D \neq 1.5) \\ 2^{1.75} \pi^{-0.75} (\ln\gamma)^{0.5} G^{0.5} E^* \psi^{0.25} a_L^{0.75} \ln \frac{a_L}{a_c} + \\ 6H\psi^{0.25} a_L^{0.75} a_c^{0.25} \quad (D=1.5) \end{array} \right. \quad (28)$$

$$A_r = \frac{D}{2-D} a_L \psi^{1-0.5D} \left[1 + \left(\frac{a_c}{a_L} \right)^{1-0.5D} \right] \quad (29)$$

3 结合面接触刚度分形模型的验证与比较

借助2个实例对4种固定结合面接触刚度分形模型进行了比较研究。

3.1 实例1

借助文献[9]中的结合面实验装置——哑铃模型及其实验数据,对4种接触刚度分形模型进行了间接验证与比较。

3.1.1 实验模型及其相关参数

试件的两种配对 HT250 表面的参数为^[9]:弹性模量 $E_{1,2} = 116 \text{ GPa}$;泊松比 $\nu_{1,2} = 0.27$;密度 $\rho_{1,2} =$

7340 kg/m^3 ;粗糙表面的表面高度标准差 $\sigma_{1,2} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ m}$;粗糙表面的表面斜率标准差 $\sigma'_{1,2} = 805.74 \times 10^{-6}$;较软材料的硬度 $H = 700 \text{ MPa}$; $\gamma = 1.5$; $\omega_L = 23.8 \text{ m}^{-1}$; $\omega_H = 257.1 \text{ m}^{-1}$ 。

3.1.2 模型验证与讨论

求解由式(1)~(4)构成的非线性方程组,可得到上述结合面的等效粗糙表面分形参数为: $D = 1.5281$, $G = 2.9927 \times 10^{-10} \text{ m}$ 。

3.1.3 实验模型的有限元建模及其模态分析

(1) 结合模型1~4计算得到实验模型固定结合面处的法向与切向接触刚度。

(2) 将计算得到的接触刚度以弹簧单元的等效模式嵌入到哑铃模型整体的有限元模型中去。哑铃整体的有限元模型总共有5100个单元、6360个节点,其中弹簧单元108个,文献[9]仅建立了12个弹簧单元,从有限元仿真的角度看,本文模型将更加精确。试件的有限元模型如图1所示。两接触结合面上各自对应均布36个节点,各对应节点之间嵌入3个COMBIN14单元(X、Y、Z3个方向,其刚度即为步骤(1)所求结合面接触总刚度的1/36)。

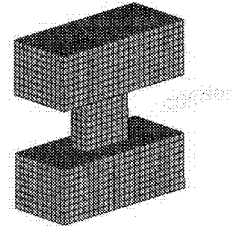


图1 哑铃组件有限元模型及结合部单元

Fig.1 Finite element modeling and joint element of dumbbell

(3) 设置有限元模型的边界条件。文献[9]的实验装置为自由边界,因此有限元模型的边界条件设置为自由状态。

(4) 对有限元模型进行自由模态分析,得到前六阶模态振型及对应固有频率。

3.1.4 仿真结果与实验结果对比

由模态分析理论知,要对两者的固频进行比较,需在模态振型一致的前提下进行才具有意义,由此,理论与实验的固有频率的对比是建立在振型相似的前提下进行^[9]。

两者的模态固频相对误差对比结果如图2所示(为了误差的直观表达,相对误差作了取绝对值处理)。

考虑到当采用不同数量的弹簧单元去等效结合面时对哑铃有限元模型精度的影响,在结合面的建模时,建立了嵌套不同数量接触弹簧单元的哑铃有限元模型,进行了相应固有频率对比。本文列出了

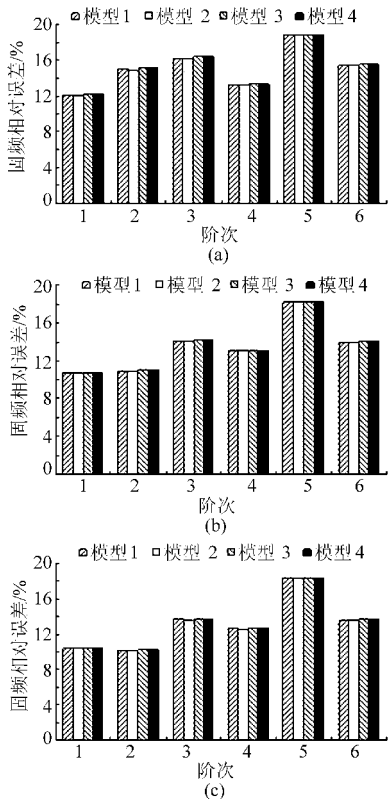


图 2 4 种模型的前六阶固有频率相对误差
 Fig. 2 Relative error of the first six-order natural frequency for four models
 (a) 预紧面压 10.42 MPa (b) 预紧面压 20.83 MPa
 (c) 预紧面压 31.25 MPa

采用模型 2 接触刚度所建模型的对比结果,如图 3 所示。

(1)图 2 给出了分别采用 4 种接触刚度分形模型所建立有限元模型的模态频率与实测模态相对误差的对比结果,可以看出,在 3 种不同的预紧面压下的固有频率相对误差小于 19%。此外,除个别模态阶数外,引入微接触大小分布的域扩展因子影响的改进模型 2(4)的固有频率相对误差稍小。

(2)由图 3 可知当采用弹簧单元建立结合面的等效有限元模型时,弹簧单元的数量及排列方式对所建立的有限元模型精度有较大影响,主要是因为弹簧单元忽略了不同方向的耦合作用,假如采用较多数量的弹簧单元将减弱这种影响,但会造成有限元分析计算数据量增多。因此,在建立结合面等效有限元模型的研究方面有待提出结合面新的建模方法。文献[14]所建立的等效虚拟材料可以作为一种有限元建模的思路。

3.2 实例 2

借助文献[8]的哑铃模型将利用解析方法得到的接触刚度嵌入到整体的有限元建模中,其建模方案同实例 1 所述。在对有限元模型进行模态分析的基础上,进一步对仿真模型进行了谐响应分析。最

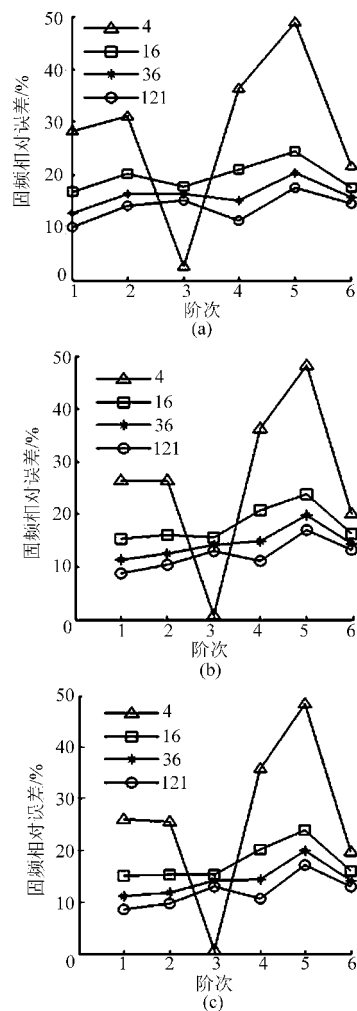


图 3 模型 2 在不同数量等效接触弹簧单元下的前六阶固有频率相对误差
 Fig. 3 Relative-error of the first six-order natural frequency for model No. 2 in different number spring element
 (a) 预紧面压 10.42 MPa (b) 预紧面压 20.83 MPa
 (c) 预紧面压 31.25 MPa

后对试件实测、刚性连接仿真、柔性连接仿真 3 种模式下的频响函数进行了对比,如图 4 所示。由图 4 可知当考虑结合面接触刚度时所建立的柔性连接有限元模型更符合实测的频响函数走势。鉴于柔性连接仿真所得到的频响曲线仅考虑了结构阻尼,而文献[8]所实测得到的频响函数必然包括了结合面处

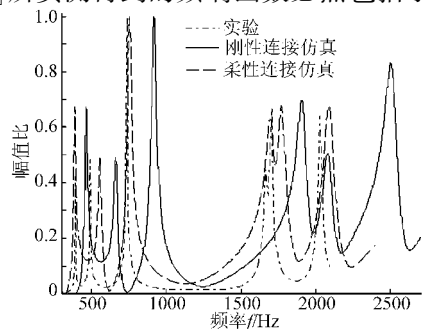


图 4 频响函数的比较
 Fig. 4 Comparison of FRFs

的阻尼的影响,同时考虑到文献[8]没有具体给出实测频响函数的激励点与拾振点及方向,故本文对实测频响函数及有限元仿真所得频响函数的振幅皆作了归一化处理。

4 结论

(1)提出了两相接触固定粗糙表面的等效粗糙表面轮廓分形参数的一种计算方法。给出了适用于具有不同弹性常数表面相接触的切向接触刚度分形模型。

(2)通过有限元动力学仿真数据与实验数据对

比,证实了基于分形接触理论所建立的分形模型。

(3)采用非耦合的弹簧单元建立了结合面处的等效有限元模型,忽略了实际模型中存在的弹簧之间的耦合关系。实例1、2是在结合面处接触面压均布条件下建立的有限元模型,忽略了面压在结合面上非均布的情况。以上皆将造成仿真误差。此外采用弹簧单元建立有限元模型时,要求2个接触面间建立弹簧单元的两个节点必须一一对应,当工程中的实体比较复杂时,其建模方法不易实现。针对以上问题,需要二次开发新的有限元单元来等效结合部。

参 考 文 献

- 张学良. 机械结合面动态特性及其应用[M]. 北京:中国科学技术出版社,2002:25~38.
- Majumdar B Bhushan. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces[J]. ASME Journal of Tribology, 1991, 113(1):1~11.
- 温淑花,张学良,武美先,等. 结合面法向接触刚度分形模型建立与仿真[J]. 农业机械学报,2009,40(11):197~202.
Wen Shuhua, Zhang Xueliang, Wu Meixian, et al. Fractal model and simulation of normal contact stiffness of joint interfaces and its simulation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(11):197~202. (in Chinese)
- 温淑花,张学良,文晓光,等. 结合面切向接触刚度分形模型建立与仿真[J]. 农业机械学报,2009,40(12):223~227.
Wen Shuhua, Zhang Xueliang, Wen Xiaoguang, et al. Fractal model and simulation of normal fractal model of tangential contact stiffness of joint interfaces and its simulation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(12):223~227. (in Chinese)
- Johnson K L. Contact mechanics[M]. Cambridge University Press, 1985:202~221.
- Jiang Shuyun, Zheng Yunjian, Zhu Hua. A contact stiffness model of machined plane joint based on fractal theory[J]. ASME Journal of Tribology, 2010, 132(1):1~7.
- Yan W, Komvopoulos K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces[J]. Journal of Applied Physics, 1998,84(7):3 617~3 624.
- 田红亮,朱大林,秦红玲,等. 结合部法向载荷解析解修正与定量实验验证[J]. 农业机械学报,2011,42(9):213~218.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Qin Hongling, et al. Modification of normal load's analytic solutions for joint interface and quantitative experimental verification[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(9):213~218. (in Chinese)
- 田红亮,朱大林,秦红玲. 固定接触界面法向静弹性刚度[J]. 应用力学学报,2011,28(3):318~323.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Qin Hongling. Normal static elastic stiffness of fixed contact interface[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2011, 28(3):318~323. (in Chinese)
- Bhushan B. 摩擦学导论[M]. 葛世荣,译. 北京:机械工业出版社,2006:27~28.
- 田红亮,朱大林,秦红玲. MB模型计算原理的修正[J]. 三峡大学学报:自然科学版,2011,33(3):68~73.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Qin Hongling. Modification of MB model's algorithm principle[J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences,2011,33(3):68~73. (in Chinese)
- Wang S, Komvopoulos K. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: part I—elastic contact and heat transfer analysis[J]. ASME Journal of Tribology,1994,116(4):812~823.
- 兰国生,张学良,丁红钦,等. 基于分形理论的结合面改进接触模型[J]. 农业机械学报,2011,42(10):217~223.
Lan Guosheng, Zhang Xueliang, Ding Hongqin, et al. Modified contact model of joint interfaces based on fractal theory[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(10):217~223. (in Chinese)
- Tian Hongliang, Li Bin. A new method of virtual material hypothesis-based dynamic modeling on fixed joint interface in machine tools[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2011,51(3):239~249.