

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.01.043

机器人工作空间求解的蒙特卡洛法改进^{*}

刘志忠^{1,2} 柳洪义¹ 罗忠¹ 张秀珩¹

(1. 东北大学机械工程与自动化学院, 沈阳 110004; 2. 河南理工大学机械与动力工程学院, 焦作 454003)

摘要: 对机器人工作空间求解的蒙特卡洛法的基本原理、算法流程、适用范围等进行了研究, 分析了蒙特卡洛法中随机点分布的不均匀性以及内部随机点和边界随机点的不同作用, 并总结了立体工作空间随机点分层处理时引起的误差情况。针对传统算法边界处随机点分布不理想的问题, 强调边界点的重要性, 根据关节空间到工作空间映射的连续性, 在前期搜索到的边界点的小邻域内重新生成随机点, 从而有效改善了边界处随机点的分布状况, 提高了边界点的精确度。针对立体工作空间随机点分层处理带来的误差, 采用二次分层的方法, 通过减小统计层厚度提高边界点的统计精度。大量的试验证明了算法的有效性。

关键词: 机器人 工作空间 蒙特卡洛法

中图分类号: TP24 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2013)01-0230-06

Improvement on Monte Carlo Method for Robot Workspace Determination

Liu Zhizhong^{1,2} Liu Hongyi¹ Luo Zhong¹ Zhang Xiuheng¹

(1. School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China

2. School of Mechanical and Power Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454003, China)

Abstract: The principle, the algorithm, and the applicable scope of the Monte Carlo method were analyzed. The non-uniform feature of the distribution of random points in workspace was analyzed, as well as the different signification between the points within the workspace and the points on the boundary. The error resulted from spatial workspace slicing was summarized. In order to optimize the boundary accuracy, based on the continuity of the mapping from joint space to workspace, by generating new random joint values in a sufficiently small neighborhood of the existed random joint values corresponding to the boundary points extracted before, new random points in workspace were generated, which distributed around the corresponding old boundary points. Then, from the newly generated points, more accurate boundary points could be extracted. The approach demonstrated to be effective to improve the boundary precision. To reduce the error caused by the slice thickness, in each slice interval, only a thin layer of points were used. A large number of tests illustrate that the algorithm works well.

Key words: Robot Workspace Monte Carlo method

引言

机器人工作空间定义为: 在基础坐标系中末端执行器某参考点所能到达的位置的集合。工作空间标示了机器人的工作范围, 因而其形状和尺寸是机器人的一项重要运动学性能指标, 也是机器人设计和优化的重要依据。

目前为止, 工作空间求解方法主要有: 几何法、解析法和数值法^[1]。此外, 文献[2]在 Matlab 中采用跟踪记录参考点位置的方法研究机器人的工作空间, 文献[3~4]利用三维建模软件进行了研究。跟踪参考点方法计算量非常大, 随着关节数的增加, 以几何级数增加。三维建模软件的建模能力不会超出现有的工作空间求解理论。

收稿日期: 2012-07-19 修回日期: 2012-07-26

^{*} 国家自然科学基金资助项目(51105064)和河南省教育厅自然科学研究计划项目(2010A460011)

作者简介: 刘志忠, 博士生, 河南理工大学副教授, 主要从事智能机器人研究, E-mail: lzzjit@163.com

几何作图法简单、直观,但随着自由度数增加,几何图形非常复杂和难以理解,而且难以表达三维空间机器人的运动。解析法一般采用微分几何学的理论,根据工作空间边界与机器人速度雅可比矩阵奇异性之间的关系^[5]来描述和计算各种奇异曲面,利用摄动法以及优化理论判断奇异曲面是否工作空间的边界,并最终计算出边界曲面^[6-7]。这样的求解过程非常复杂,且一般不具有通用性。

蒙特卡洛法是一种简单、实用,几乎可以通用化的数值方法^[8],随着计算机技术的发展已被广泛采用。但这一方法目前存在精度较低的缺点,所以主要用于定性分析和几何验证。本文对蒙特卡洛法进行改进,以有效提高求解精度。

1 蒙特卡洛法原理及现有算法

蒙特卡洛法基于概率统计理论,对随机性问题进行仿真是该方法的基本特征。机器人的工作空间本质上不属于随机性问题,所以,需要人为构造一个合理的随机概率模型,使工作空间的解成为其统计参量。

机器人末端参考点在基础坐标系中可以表示为 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q})$ 。其中, $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$, 为参考点在基础坐标系中的位置向量; $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, 为 n 维关节空间内的点向量。一般各关节有活动范围限制,即: $q_{i\min} \leq q_i \leq q_{i\max} (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

用集合的方法,机器人的工作空间表示为

$$W_o = \{\boldsymbol{p} | q_{i\min} \leq q_i \leq q_{i\max} (i = 1, 2, \dots, n)\}$$

通过在关节空间内随机产生大量的关节空间点,并逐一映射至工作空间内,得到一定数量的末端位置随机点,即可统计计算出工作空间的边界。

现有算法如下:

(1) 对每个关节变量在其取值范围内产生 N 个均匀分布的随机值,按序号对应组合成 N 个关节空间向量。

(2) 利用正向运动学方程计算出工作空间内对应的 N 个随机点。

(3) 点云图形显示:将所有的末端点位置以图

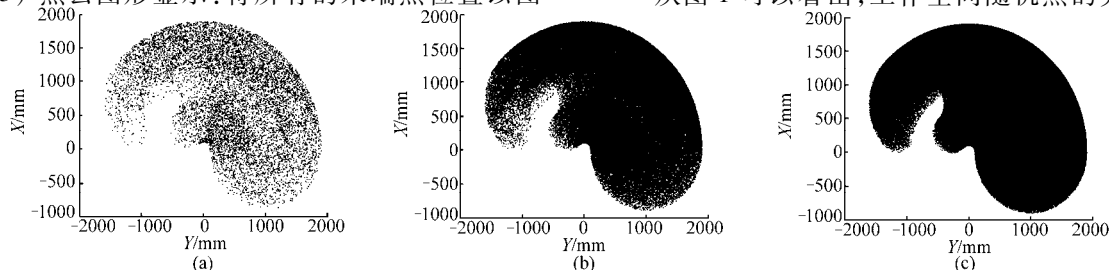


图 1 平面 3 自由度机器人点云图

Fig. 1 Point cloud of planar 3-DOF robot manipulator

(a) 随机点数为 1 万点 (b) 随机点数为 10 万点 (c) 随机点数为 50 万点

形方式加以显示或打印,从而直观地研究工作空间的情况。

(4) 工作空间边界的提取:在 N 个工作空间随机点中,可以搜索到工作空间的近似边界点,从而得到近似边界曲线。

(5) 工作空间容积的计算:对于二维平面机器人,其工作空间为平面图形,实际得到的边界点连线为多边形。可根据多边形面积公式计算工作空间面积。也可对图形进行条形分割,采用积分法计算各区域的面积和,从而得到总面积。此外,还可以利用曲线拟合方法,将整个边界曲线拟合为多段弧线,然后分区计算面积。无论哪种方法,得到的都是实际工作空间面积的近似值。对于三维空间机器人,其工作空间为三维空间实体,可以采用分层处理的方法。即:将所有随机点沿某一坐标轴方向按规划间距(一般采用等间距)划分为若干相互平行的“层”,将每一层里的随机点看作一个平面图形,按照平面图形的方法进行处理,得到每一层的几何参数。然后根据数值积分法得到整个实际工作空间体积的近似值。

目前的研究大都集中于边界提取和容积计算算法,如文献[1,3,8~11]等。

图 1 为一平面三旋转关节机器人的点云图。可以看出, N 值越大,效果越好。

2 蒙特卡洛法特点分析

2.1 工作空间内随机点的作用不同

工作空间随机点的作用主要有:根据随机点的总体分布情况考察工作空间的形状、分布,工作空间内是否存在空腔、空洞,以及空腔、空洞的位置等;根据边缘随机点坐标获取工作空间边界的具体数据,准确的工作空间数据是机器人结构和性能参数优化的依据,也是机器人能否完成具体作业任务的判断依据^[12]。

显然,工作空间边界处的随机点更有价值。

2.2 工作空间随机点的分布不均匀

从图 1 可以看出,工作空间随机点的分布是不

均匀的,即使总点数已经很大,一些边界处的分布密度依然很低。这是由关节空间到工作空间的映射的非线性引起的。

这种不均匀性将导致工作空间边界提取的精度下降,在局部甚至会出现很大的误差。考虑到边界点的重要性,应着力改善边界随机点的分布状况。但目前这方面的研究很少。

注意到部分工作空间边界是由关节活动极限导致的^[6],文献[1]利用 β 分布代替均匀分布生成关节变量随机值,加大了随机值在关节变量极限附近的分布密度,从而可加大工作空间相应边界处的随机点分布密度。但该方法不能改善所有边界处随机点的分布。

2.3 蒙特卡洛法的适用范围

蒙特卡洛法算法简单,适用范围广泛。可广泛用于串联机器人、并联机器人、非冗余机器人、冗余机器人等的工作空间求解。

但由于边界提取精度依赖于边界点分布状况,有时精度较差。所以目前大多用于机器人设计阶段的结构分析、验证和优化参考。

此外,蒙特卡洛法求解过程数据处理量大,一般需要大量内存,生成理想伪随机数也比较耗费机时,故计算效率较差。不适用于工作空间可能发生变化,需要在线实时计算的情况。

3 蒙特卡洛法改进

根据前面分析,目前蒙特卡洛法的主要问题是边界提取精度不可靠,应设法提高精度。

3.1 影响边界提取精度的两个主要因素

3.1.1 边界处随机点的分布不理想

尽管增加随机点数量可以提高边界处随机点的分布密度,但考虑计算效率,随机点数不可能无限增加。而且,如前所述,即使随机点数量已经非常大,一些边界处的随机点密度依然很低。这是因为增加的随机点仍然更多地分布于工作空间内部而不是边界处。

3.1.2 三维工作空间分层处理引起的误差

对于三维工作空间,一般采用分层处理的方法^[1,9]。实质上是将每层空间内三维分布的随机点向层平面投影,从而得到平面图形。这样的分层投影处理必然会引入正误差,如图2所示。如果采取缩小分层间距的方法来减小这种误差,可能导致层数的不必要增多。

3.2 算法的改进

3.2.1 边界处局部增加随机点

首先,采用现有算法产生一定数量的随机点,并

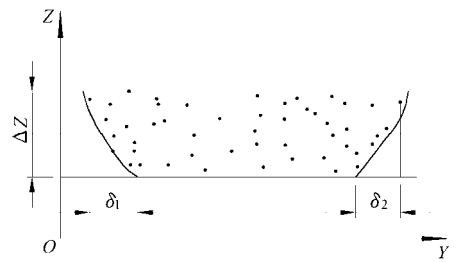


图2 分层投影引起的误差

Fig. 2 Error caused by slice thickness

搜索到所有边界点。然后,在每个边界点对应的关节变量值的足够小邻域内生成一定数量的新的随机关节变量值,从而得到一些新的工作空间随机点。新的随机点将会分布在原有各边界点的周围,如此,就有可能在原有近似边界点和真实边界之间出现新点,这样的新点更靠近真实边界。故此,在所有新生成的随机点中重新搜索边界点,将可能得到更加精确的近似边界点。

算法原理基于关节空间到工作空间映射的连续性,即:关节变量值的连续变化引起的末端位置变化是连续的。所以,在已有边界点对应的关节变量值的足够小的邻域内重新产生的随机关节变量值,其在工作空间内的映射点也将分布在已有边界点的周围。在新的映射点中找到的边界点将可能更接近真实的边界。通过循环,可以使随机点逐步逼近真实的边界。

3.2.2 三维空间内二次分层,减小投影误差

采取二次分层减小层厚的方法来减小投影误差,即:在初次分层的基础上,每一层内只取一个“薄层”内的随机点数据。这样的方法可以有效减小分层投影引起的误差。

4 应用实例

4.1 机器人结构及参数

图3所示为一腕部偏置5自由度串联机器人。关节3为滑移关节,其余均为转动关节。

采用D-H法表示各连杆之间的位姿变换,各连杆的附体坐标系如图3所示。表1给出机器人的

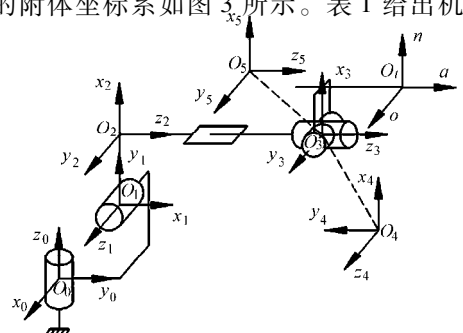


图3 5自由度机器人结构图

Fig. 3 Construction of 5-DOF manipulator

D-H 参数。

参考点选为末端点,其在末杆坐标系中的坐标为(580, 0, 800)。参考点在基础坐标系中的坐标(P_x, P_y, P_z)的表达式分别为

$$P_x = 200c_1 + 800[s_5(s_1s_4 + c_1c_2c_4) + c_1c_5s_2] + 580[c_5(s_1s_4 + c_1c_2c_4) - c_1s_2s_5] + 170c_1c_2 + d_3c_1s_2 \quad (1)$$

$$P_y = 200s_1 - 800[s_5(c_1s_4 - c_2c_4s_1) - c_5s_1s_2] - 580[c_5(c_1s_4 - c_2c_4s_1) + s_1s_2s_5] + 170c_2s_1 + d_3s_1s_2 \quad (2)$$

$$P_z = 180 - c_2d_3 + 170s_2 - 800(c_2c_5 - c_4s_2s_5) + 580(c_2s_5 + c_4c_5s_2) \quad (3)$$

以上各式中, s_i 表示 $\sin\theta_i$, c_i 表示 $\cos\theta_i$ 。

表 1 机器人 D-H 参数
Tab. 1 D-H parameters

关节编号	关节变量	α_i /rad	d_i /mm	a_i /mm	变量范围
1	θ_1	$\pi/2$	180	200	$\pi/3 \sim 2\pi/3$
2	θ_2	$\pi/2$	0	170	$\pi/3 \sim 2\pi/3$
3	d_3	0	d_3	0	1 290 ~ 2 290
4	θ_4	$-\pi/2$	0	0	$-\pi \sim \pi$
5	θ_5	$\pi/2$	580	800	$-\pi/2 \sim \pi/4$

4.2 工作空间求解

如图 3 所示,关节 1 为旋转关节,其活动范围关于基础坐标系的 YOZ 平面对称,所以机器人的工作空间关于 YOZ 平面对称。

工作空间分层方式为:沿基础坐标系 Z 轴方向平均分为 100 层。在每一层内沿 Y 轴方向平均划分为 100 列。如图 4 所示。

以 40 万原始随机点为例,在 Matlab 中编程。算法主要流程如下:

- (1) 生成各关节随机变量值。
- (2) 将随机关节变量值逐一代入式(1)~(3),计算出所有随机点的坐标。
- (3) 在每层、每列内搜索边界随机点。
- (4) 在每个搜索到的边界点的小邻域内重新生成 10 个新的随机点,并依顺序将数据存入原始随机点数据存储矩阵。

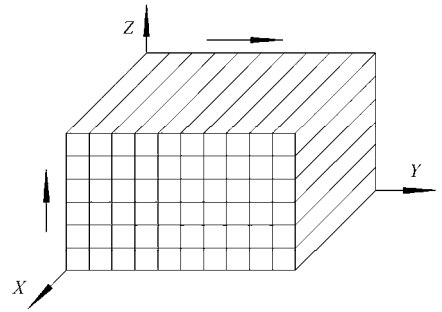


图 4 分层分列方式

Fig. 4 Scheme of workspace slicing

成 10 个新的随机点,并依顺序将数据存入原始随机点数据存储矩阵。

(5) 以新的随机点数据重复步骤(1)~(4),直到边界随机点坐标值变化很小,或设定的循环次数执行完毕。

(6) 图形显示、打印及数据计算。

在步骤(4)中,新的随机点数据覆盖了一部分原有的随机点数据,这样可以节约内存。

4.3 求解效果

图 5 为原始随机点数据搜索到的边界点,图 6~8 分别为 10 次、20 次、50 次循环得到的边界点。可以看出,边界轮廓逐步清晰化和精确化。图 9 为 50 次循环后的边界点云图,图 10 为部分层的边界曲线图。

大量试验表明,20 次循环即可获得良好的效果,50 次循环可以近乎完美地给出边界。

表 2 为部分层的面积计算结果。计算结果表明了改进算法的优越性。第 10 层附近工作空间截面变化较大,所以层厚引起的误差较大。如需进一步提高精度,可以取更小的层厚。

大量对比试验表明,总随机点数相当的情况下,改进算法精度明显优于传统算法。而当求解精度接近时,对于本例,改进算法的计算时间约为传统算法的 1/20。原因在于改进算法的大部分随机点位于边界附近,有效增加了边界随机点密度,从而有效提高了精度和效率。

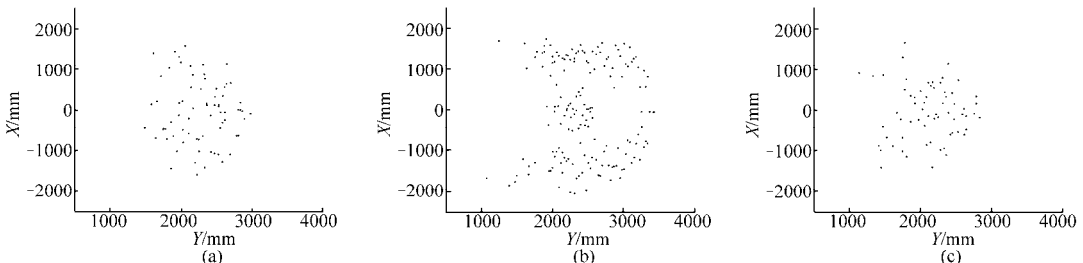


图 5 40 万原始随机点提取的边界点

Fig. 5 Boundry points among 400 000 random points

(a) 第 10 层 (b) 第 50 层 (c) 第 90 层

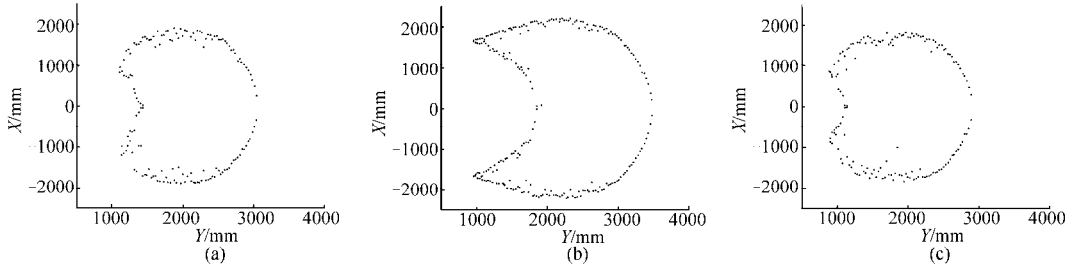


图6 经过10次扩展的边界点

Fig.6 Boundry points after 10 times expansion

(a) 第10层 (b) 第50层 (c) 第90层

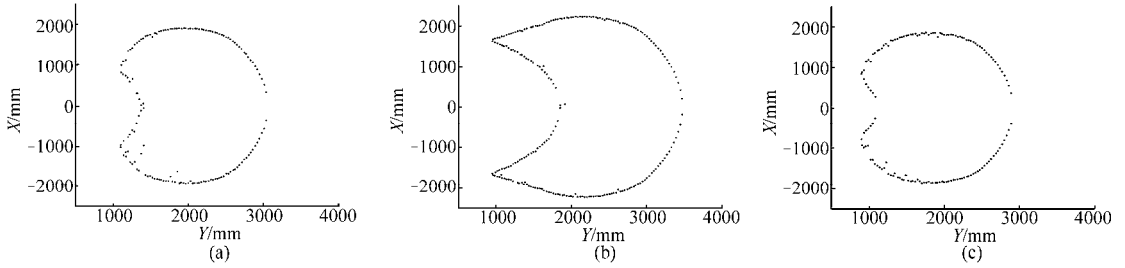


图7 经过20次扩展的边界点

Fig.7 Boundry points after 20 times expansion

(a) 第10层 (b) 第50层 (c) 第90层

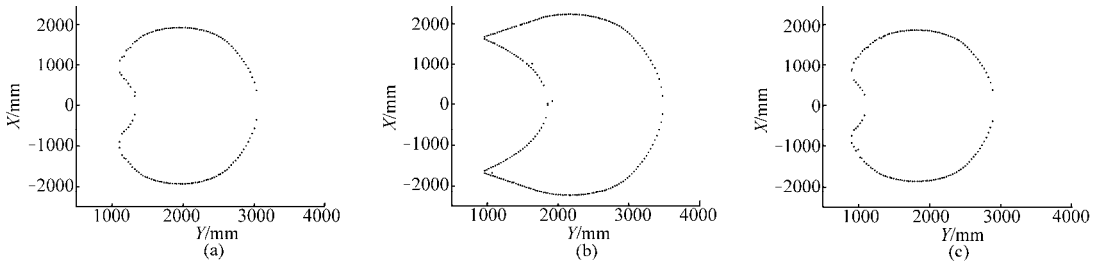


图8 经过50次扩展的边界点

Fig.8 Boundry points after 50 times expansion

(a) 第10层 (b) 第50层 (c) 第90层

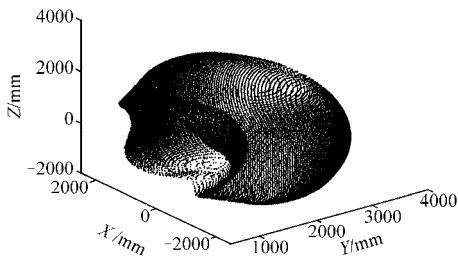


图9 经过50次扩展的边界点云图

Fig.9 All boundry points after 50 times expansion

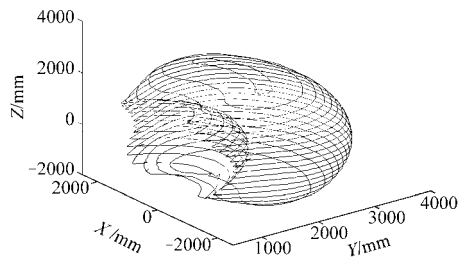


图10 经过50次扩展的边界曲线

Fig.10 Boundry curves after 50 times expansion

表2 部分层的面积计算结果

Tab.2 Area computation results of some layers

算法	项目	第10层	第30层	第50层	第70层	第90层
原有算法 (2040万点)	计算面积/mm ²	4 797 731.32	6 668 242.25	6 205 022.75	6 435 021.79	5 112 916.42
	实际面积/mm ²	5 989 831.39	7 722 469.17	7 545 321.78	7 596 204.74	6 129 999.41
	误差/%	-19.90	-13.65	-17.76	-15.29	-16.59
改进算法 (50次扩展)	计算面积/mm ²	6 186 996.58	7 661 885.29	7 473 801.75	7 533 473.62	6 020 575.90
	实际面积/mm ²	5 942 405.75	7 673 573.21	7 484 635.14	7 541 865.41	6 033 517.56
	误差/%	4.12	-0.15	-0.14	-0.11	-0.21

5 结论

(1) 蒙特卡洛法具有简单、方便、适用范围广的特点。但传统算法边界处随机点分布不理想,影响了求解精度和效率,也影响了这一方法的实用价值。

(2) 现有的三维空间分层处理方式过于简单化,分层投影引起的边界误差较大。

(3) 根据关节空间到工作空间映射的连续性,在已搜索到的边界点对应的关节变量值的小邻域内重新生成一些随机关节变量值,其在工作空间内的映射点将分布在原有随机点的周围,从而可以找到更接近真实边界的点。

(4) 结合二次分层法减小投影误差,改进算法可以取得良好的效果。

参 考 文 献

- 1 Cao Yi, Lu Ke, Li Xiujuan, et al. Accurate numerical methods for computing 2D and 3D robot workspace [J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2011, 8(6): 1~13.
- 2 赵燕江, 张永德, 姜金刚, 等. 基于 Matlab 的机器人工作空间求解方法[J]. *机械科学与技术*, 2009, 28(12): 1 657~1 666.
Zhao Yanjiang, Zhang Yongde, Jiang Jingang, et al. A method for solving robot workspace based on Matlab [J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2009, 28(12): 1 657~1 666. (in Chinese)
- 3 Cao Y, Zang H, Wu L, et al. An engineering oriented method for the three dimensional workspace generation of robot manipulator [J]. *Journal of Information and Computational Science*, 2011, 8(1): 51~61.
- 4 石磊, 许明恒, 邓维鑫, 等. PowerCube 模块化机器人工作空间计算[J]. *中国工程机械学报*, 2011, 9(1): 38~42.
Shi Lei, Xu Mingheng, Deng Weixin, et al. Workspace calculation for PowerCube modular robots [J]. *Chinese Journal of Construction Machinery*, 2011, 9(1): 38~42. (in Chinese)
- 5 Kohli D, Ming-Shu H. The Jacobian analysis of workspaces of mechanical manipulators [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1987, 22(3): 265~275.
- 6 Abdel-Malek K, Yeh H J, Othman S. Interior and exterior boundaries to the workspace of mechanical manipulators [J], *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 2000, 16(5): 365~376.
- 7 Yang Jingzhou, Abdel-Malek K, Zhang Yunqing. On the workspace boundary determination of serial manipulators with non-unilateral constraints [J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2008, 24(1): 60~76.
- 8 Rastegar J, Perel D. Generation of manipulator workspace boundary geometry using the Monte Carlo method and interactive computer graphics [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1990, 112(3): 452~454.
- 9 曹毅, 李秀娟, 宁祎, 等. 三维机器人工作空间及几何误差分析[J]. *机械科学与技术*, 2006, 25(12): 1 458~1 461.
Cao Yi, Li Xiujuan, Ning Yi, et al. Computation and geometrical error analysis of a 3D robot's workspace [J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2006, 25(12): 1 458~1 461. (in Chinese)
- 10 印峰, 王耀南, 余洪山. 基于蒙特卡罗方法的除冰机器人作业空间边界提取[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(7): 891~896.
Yin Feng, Wang Yaonan, Yu Hongshan. Workspace boundary extraction of de-icing robot based on Monte Carlo method [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(7): 891~896. (in Chinese)
- 11 David G, Chung C D N. Determining manipulator workspace boundaries using the Monte Carlo method and least squares segmentation [C] // *Proceedings of the ASME Robotics, Kinematics, Dynamics and Controls*, 1994: 141~146.
- 12 王燕, 杨庆华, 鲍官军, 等. 关节型果蔬采摘机械臂优化设计与试验[J]. *农业机械学报*, 2011, 42(7): 191~195.
Wang Yan, Yang Qinghua, Bao Guanjun, et al. Optimization design and experiment of fruit and vegetable picking manipulator [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2011, 42(7): 191~195. (in Chinese)