

# 基于概率和间隔信息的产品设计知识线性分类方法\*

屠立<sup>1,2</sup> 车君华<sup>1,3</sup>

(1. 浙江大学计算机辅助设计与图形学国家重点实验室, 杭州 310027;

2. 浙江机电职业技术学院机械工程系, 杭州 310053;

3. 济南职业学院机械制造系, 济南 250104)

**摘要:** 针对复杂产品设计知识类别数多、数据量大的分类问题, 基于最小最大概率机的概率信息和样本间隔信息, 使用线性的方法解决多分类问题。用样本的均值和协方差代替真实的均值和协方差, 利用间隔信息和概率信息, 构造加权投票矩阵, 编码矩阵会随着不同的方法和不同的训练数据有不同的变化, 同时也利用所携带的幅值信息, 选出最大值的对应类别。线性分类器作为二类分类器可以加快处理速度。提出以子空间角度差异度量来表征各个类别概念间的差异, 并通过叉车产品设计知识的数值实验证明了该方法的有效性和实用性。

**关键词:** 设计知识 线性分类器 最小最大概率机 概率信息

**中图分类号:** TP391; TH122 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2013)01-0217-05

## Design Knowledge Linear Classification of Complex Product Based on Margin and Probability Information

Tu Li<sup>1,2</sup> Che Junhua<sup>1,3</sup>

(1. State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

2. Department of Mechanical Engineering, Zhejiang Institute of Mechanical Engineering, Hangzhou 310053, China

3. Department of Mechanical Engineering, Jinan Vocational College, Jinan 250104, China)

**Abstract:** For the complex product design knowledge with a large number catalogs and data volumes, the multi-classification problem was solved by using linear approach based on the margin and probability information of MPM. The true mean and covariance were replaced by the sample ones. The weight voting matrix was established, the coding matrix varied with the difference algorithm and training data. The classifier with max value was selected by using the amplitude value. Linear classifier was used as binary one for high speed. The angle difference measurement of subspace was proposed to characterize the difference of every class conception. The feasibility and practicality of the above mentioned method were approved by forklift product design knowledge.

**Key words:** Design knowledge Linear multiclassifier Minimax probability machine Probability information

### 引言

现代机械产品设计是以设计知识为基础, 以新知识获取为中心<sup>[1]</sup>的知识密集型工程。当前制造业正迅捷地向并行化、分布式、数字化和智能化制造方式转化。一方面, 企业内产生的设计开发数据随

着产品的不断增加而日益膨胀; 另一方面企业又必须不断地从外界获取各种信息, 由此产生的各种设计知识呈指数增长。按照设计知识的存储情况可将机械产品设计知识分为设计人员经验类、文档文本资料类、数据库存储类 3 种类型。其中设计人员经验类是设计人员在设计过程中产生的想法、观念等

收稿日期: 2012-01-31 修回日期: 2012-05-06

\* 国家自然科学基金资助项目(50905159)、浙江省自然科学基金资助项目(Y12E050100)和 2011 年浙江省博士后科研项目择优资助项目

作者简介: 屠立, 博士后, 浙江机电职业技术学院教授, 主要从事产品设计技术、制造业信息化研究, E-mail: tu\_li22@yahoo.com.cn

隐性知识;文档文本资料类主要包括产品设计市场信息、工程材料、工程分析、系统方案、功能设计、经验和规则等的文档文本资料;数据库存储类主要指以数据库为支撑的存储数据,包括客户需求信息、产品设计过程中产生的设计参数、工艺信息等数据和产品测试产生的数据等,此类知识数量庞大。设计人员进行设计时,所获得的海量存储类设计知识均为对产品各种性质的描述与其测试产生结果的数据值,使设计人员无从下手去寻找对自己有用的知识,对选择设计方案的贡献程度也不大。在设计知识表中一个产品实例所表达的内容就是其产品设计方案所包含的内容,而这些存储类设计知识在数据库内只是以数据形式存在,无法向设计人员提供有效的设计参考知识<sup>[2]</sup>。因此,如何有效地分类管理已有的数据库存储类设计知识和准确地分析并提取现有的有用设计信息,已成为提高产品开发速度、缩短产品开发周期的关键<sup>[3-4]</sup>。

现有研究<sup>[5-10]</sup>大多集中在设计知识的概念分类,而对产品设计知识的具体分类方法则研究较少。本文针对数据库存储类设计知识信息量增加、分类与处理问题更为复杂的情况,研究使用最小最大概率机输出的概率和幅值信息,采用线性的方法来解决多分类问题,最终形成决策函数,以解决实际设计数据分类中面临的类别数较多而且数据量大的问题。

## 1 基于MPM的线性多分类器分类原理

### 1.1 定义

最小最大概率机(Minimax probability machine, MPM)的基本思想是最小化误分概率的最大值,即通过试图控制错分概率以达到分类最大化的目的。与其他分类方法相比,MPM的最大特点在于它能够最小化最坏情况下未分类数据错分的概率,为分类的准确率提供一个下边界。

对于二元分类问题,记 $x, y \in \mathbf{R}^n$ 为随机变量,类条件分布的均值和协方差分别为 $(\bar{x}, \Sigma_x)$ 和 $(\bar{y}, \Sigma_y)$ 。由于要求的只是均值和协方差,故可对其具体的分布不作任何限制。

最小最大概率机的目标是确定一个线性分类超平面

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{z | \mathbf{a}^T z = \mathbf{b}\} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$   $\mathbf{b} \in \mathbf{R}$

对符合已知均值和协方差的所有分布,以最大概率分离属于不同类的点。其数学表达式为

$$\begin{cases} \max_{\theta, \mathbf{a} \neq 0, \mathbf{b}} \theta \\ \text{s. t. } \inf_{x \sim (\bar{x}, \Sigma_x)} P_r \{ \mathbf{a}^T x \geq \mathbf{b} \} \geq \theta \\ \quad \inf_{y \sim (\bar{y}, \Sigma_y)} P_r \{ \mathbf{a}^T y \geq \mathbf{b} \} \geq \theta \end{cases} \quad (2)$$

等价于

$$\begin{cases} \max_{\theta, \mathbf{a} \neq 0, \mathbf{b}} \theta \\ \text{s. t. } \sup_{x \sim (\bar{x}, \Sigma_x)} P_r \{ \mathbf{a}^T x \leq \mathbf{b} \} \leq 1 - \theta \\ \quad \sup_{y \sim (\bar{y}, \Sigma_y)} P_r \{ \mathbf{a}^T y \leq \mathbf{b} \} \leq 1 - \theta \end{cases} \quad (3)$$

其中 $(x, \Sigma_x)$ 是均值和协方差为给定值的所有分布。

对于测试点 $z$ ,如果 $\mathbf{a}^T z \geq \mathbf{b}$ 则归为 $x$ 类,否则就归为 $y$ 类。 $1 - \theta$ 为最差情况下的误分概率。

本文所研究的优化问题就是要最小化这个误分概率,以使得分类器的输出具有概率意义。

### 1.2 数学推导

Marshall等<sup>[11]</sup>在研究中指出

$$\sup_{y \sim (\bar{y}, \Sigma_y)} P_r \{ y \in \mathbf{S} \} = \frac{1}{1 + d^2} \quad (4)$$

其中  $d^2 = \inf_{y \in \mathbf{S}} (y - \bar{y})^T \Sigma_y^{-1} (y - \bar{y})$

这里 $y$ 是一个随机变量, $\mathbf{S}$ 是一个给定的凸集。公式中的上确界是取均值和协方差为给定值的所有分布。

据此,有以下定义: $\mathbf{S} = \{ \mathbf{a}^T y \geq \mathbf{b} \}$ ,则

$$\sup_{y \sim (\bar{y}, \Sigma_y)} P_r \{ \mathbf{a}^T y \geq \mathbf{b} \} = \frac{1}{1 + d^2} \quad (5)$$

其中  $d^2 = \inf_{\mathbf{a}^T y \geq \mathbf{b}} (y - \bar{y})^T \Sigma_y^{-1} (y - \bar{y})$

当 $\mathbf{a}^T \bar{y} \leq \mathbf{b}$ 时,取 $y = \bar{y}$ ,即可得最小值 $d = 0$ 。

假设 $\mathbf{a}^T \bar{y} \leq \mathbf{b}$ ,为方便计算,令

$$\mathbf{w} = \Sigma_y^{-\frac{1}{2}} (y - \bar{y}) \quad \mathbf{c}^T = \mathbf{a}^T \Sigma_y^{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{f} = \mathbf{b} - \mathbf{a}^T \bar{y} \geq 0$$

则  $d^2 = \inf_{\mathbf{c}^T \mathbf{w} \geq \mathbf{f}} \mathbf{w}^T \mathbf{w} \quad (6)$

可得到如下优化问题

$$\alpha(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^T \mathbf{w} + \lambda(\mathbf{f} - \mathbf{c}^T \mathbf{w}) \quad (7)$$

根据最优化条件,即得

$$\begin{cases} 2\mathbf{w} = \lambda \mathbf{c} \\ \mathbf{f} = \mathbf{c}^T \mathbf{w} \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\lambda = \frac{2\mathbf{f}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}}$$

代入得

$$d^2 = \inf_{\mathbf{a}^T y \geq \mathbf{b}} (y - \bar{y})^T \Sigma_y^{-1} (y - \bar{y}) = \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{a}^T \bar{y})^2}{\mathbf{a}^T \Sigma_y \mathbf{a}} \quad (9)$$

考虑 $\mathbf{a}^T y \geq \mathbf{b}$ 的情况,可得

$$d^2 = \inf_{\mathbf{a}^T y \geq \mathbf{b}} (y - \bar{y})^T \Sigma_y^{-1} (y - \bar{y}) = \frac{\max((\mathbf{b} - \mathbf{a}^T \bar{y}), 0)}{\mathbf{a}^T \Sigma_y \mathbf{a}} \quad (10)$$

根据以上的推导可知,当两类数据均值不相等时,存在最优超平面 $F(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*)$ ,且解如下凸规划问题。

$$\begin{cases} k_*^{-1} = \min_a \sqrt{\mathbf{a}^T \Sigma_x \mathbf{a}} + \sqrt{\mathbf{a}^T \Sigma_y \mathbf{a}} \\ \mathbf{a}^T (\bar{x} - \bar{y}) = 1 \end{cases} \quad (11)$$

同时可得

$$\mathbf{b}_* = \mathbf{a}_*^T \bar{x} - k_* \sqrt{\mathbf{a}_*^T \sum x \mathbf{a}_*} \quad (12)$$

其中  $\mathbf{a}_*$  是优化问题的唯一解。而其最差情况下的误分概率为

$$1 - \theta_* = \frac{1}{1 + k_*^2} = \frac{(\sqrt{\mathbf{a}_*^T \sum x \mathbf{a}_*} + \sqrt{\mathbf{a}_*^T \sum y \mathbf{a}_*})^2}{1 + (\sqrt{\mathbf{a}_*^T \sum x \mathbf{a}_*} + \sqrt{\mathbf{a}_*^T \sum y \mathbf{a}_*})^2} \quad (13)$$

在找到最优超平面的情况下,对给定的一个新数据点  $z$ ,即可通过  $\mathbf{a}_*^T z - \mathbf{b}_*$  的符号来决定该点的类别:如为 + 则该点属于  $x$  类,否则属于  $y$  类。

## 2 基于概率和间隔信息的线性分类方法

### 2.1 线性分类方法

如上所述,MPM 可以显式地输出概率,并同时可利用给定的样本在每个分类器作用下的间隔信息作为一个置信度。本文同时利用间隔信息和概率信息来构造加权投票的矩阵  $\mathbf{M}$ ,即采用最大接受和最小拒绝的策略进行处理。

判别给定的数据点  $x_i$  时,使用  $l$  个二类分类器构成一个长度为  $l$  的向量  $\mathbf{V}^i$ ,其元素是该数据点  $x_i$  在某个分类器下的间隔,并将此间隔向量乘以该分类器的相对置信度矩阵行  $\mathbf{Q}_r$ ,其对角线上的元素是对概率输出  $\theta_r$  作归一化处理满足  $\sum_{r=1}^k \theta_r = 1$  条件的对应  $\theta_r$ ,其它元素为零。该  $\theta_r$  表征了第  $r$  个分类器在其他分类器中的权重。分类规则是

$$\mathbf{H}(x_i) = \arg \max_r \{ \mathbf{V}^i \mathbf{Q}_r^T \} \quad (14)$$

如果出现该数据点未被任何分类器分类(即  $\mathbf{V}^i$  元素全为负数)的情况,则该分类规则可找到最大负数所对应的相应类别,可称之为最小拒绝标记;如果该数据点被多个分类器分类,则该分类规则找到最大正数所对应的类别,可称之为最大接受标记。

该分类规则中  $\mathbf{Q}$  矩阵会随着算法和训练数据的变化而变化,同时分类规则也利用了所携带的幅值信息,通过和动态编码阵的相应行作内积从而得到与最大值相对应的类别。

### 2.2 类别子空间的差异度量方法

通过非线性变换  $\Phi(x_j)$  将数据  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^n$  映射到特征空间  $\mathbf{F}$ ,计算其协方差矩阵

$$\mathbf{C} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi(x_j) \Phi(x_j)^T \quad (15)$$

解特征值问题

$$\lambda \mathbf{V} = \mathbf{C} \mathbf{V} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\Phi(x_j) \mathbf{V}) \Phi(x_j) \quad (\lambda > 0, \mathbf{V} \neq \mathbf{0}) \quad (16)$$

从式中可知,  $\mathbf{V}$  必在映射后的数据闭包中,即

$$\mathbf{V} = \text{span} \{ \Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n) \} \quad (17)$$

将其改写为

$$\mathbf{V} = \sum_{j=1}^n a_j \Phi(x_j) \quad (18)$$

等号左右同乘  $\Phi(x_k)$ ,可得

$$\lambda (\Phi(x_k) \mathbf{V}) = (\Phi(x_k) \mathbf{C} \mathbf{V}) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

定义核矩阵

$$\mathbf{K}_{ij} = (\Phi(x_i) \Phi(x_j)) = k(x_i, x_j) \quad (20)$$

$$\text{则} \quad \lambda \mathbf{a} = \mathbf{K} \mathbf{a} \quad (\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T) \quad (21)$$

通过该公式可以求得特征值。

在特征空间上分别抽取  $t$  个特征向量  $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_t; \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_t$ 。

则对应的特征值为  $\lambda_1^V, \dots, \lambda_t^V; \lambda_1^W, \dots, \lambda_t^W$ 。

进行归一化处理

$$\lambda_i = \frac{\lambda_i^V + \lambda_i^W}{\lambda_1^V + \dots + \lambda_t^V + \lambda_1^W + \dots + \lambda_t^W} \quad (22)$$

则

$$\begin{cases} \mathbf{V}_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \Phi(x_j) \\ \mathbf{W}_i = \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \Phi(x_j) \end{cases} \quad (23)$$

可得对应相应两个特征向量间的角度为

$$\theta_i = \arccos \left( \frac{\sum_{k=1}^{m_x} \sum_{l=1}^{m_y} \alpha_{i,k} \beta_{i,l} \mathbf{K}(x_k, y_l)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m_x} \sum_{l=1}^{m_x} \alpha_{i,k} \alpha_{i,l} \mathbf{K}(x_l, x_k)} \sqrt{\sum_{k=1}^{m_y} \sum_{l=1}^{m_y} \beta_{i,k} \beta_{i,l} \mathbf{K}(y_k, y_l)}} \right) \quad (24)$$

由此得到由  $t$  维角度向量组合后的最终角度信息为

$$\theta = \sum_{i=1}^t \lambda_i \theta_i \quad (25)$$

此信息可用于度量类别概念之间子空间的差异。

## 3 实验结果分析

在产品的设计过程中,对设计产生影响的数据主要有两方面:产品实际运行的测试数据,包括以往此类产品的运行情况及其测试数据对整个产品的后续设计起到非常关键的作用;产品的设计数据,按照总体设计原则与客户需求信息,通过设计原理的计算过程产生的设计关键参数对产品后续设计起到很重要的决定作用<sup>[12]</sup>。

### 3.1 叉车产品的数据库存储类设计知识

叉车是仓库、车站、码头、工矿企业及施工场所应用十分广泛的流动式装卸搬运机械。叉车总体

设计时应考虑有关牵引特性、制动特性、稳定性和机动性等方面的一些主要问题。通过对叉车性能因素的研究与分析可以得出对性能影响的具体设计条件与参数,其具体条件可以从参数表中抽取出来,建立的叉车设计知识属性如表1所示。

表1 叉车性能的部分设计知识属性

Tab.1 Design knowledge attributes of forklift part

参数	编码代号	单位	数据示例
载荷中心距	LD	mm	500,800,1400
门架倾角	A	(°)	6/12
前悬距	F	mm	410
最小转弯半径	R	mm	1760
最小直角通道宽度	M	mm	1810
最小直角堆垛通道宽度	MV	mm	2170
最大爬坡度	AT	%	15
质量	m	kg	2780
轴距	AD	mm	1250
最小离地间隙	C	mm	100

### 3.2 叉车产品的设计样本数据获取

叉车设计知识的获取,是针对叉车的设计数据进行规则提取,以便于为设计人员提供设计参考。这里选取载荷中心距、门架倾角、前悬距、最小转弯半径、最大爬坡度、质量6种设计属性构成6组数据集,得到初期的数据样本,如表2所示。图1为叉车样本离散化处理界面,图2为叉车样本属性约简程序处理界面。

表2 叉车部分设计知识样本

Tab.2 Design knowledge samples of forklift part

叉车样本	设计参数条件属性					
	LD	A	F	R	AT	m
CPC20HBW15	500	3/10	400	1200	15	4700
CPC20HBW-9	800	6/12	410	2200	15	3020
CPC20NG5	500	6/12	400	1800	20	3650
CPC20N-RG5	600	3/10	410	1450	15	2780
CPC20N-RG6	700	3/10	410	1450	20	4070
CPC20N-RW13	1250	6/12	420	1760	20	4700
CPC20N-RW9	600	6/12	420	1500	20	3650
CPC20N-W13	500	6/12	390	1700	15	3020
CPC25HB-G6	800	6/12	410	1860	15	3020
CPC25HB-W8	900	6/12	410	2200	15	2780
CPC25HB-W9	1250	3/10	400	1800	20	3020
CPC25HB-W15	1250	3/10	400	1500	20	4070
CPC25N-G5	500	3/10	420	2150	15	4070
CPC25N-RG5	800	6/12	420	2150	15	4700
CPC25N-RG6	600	6/12	410	1800	20	2780

### 3.3 测试结果

测试中采用该6种设计属性构成的6组数据集,这些数据集的属性描述如表3。

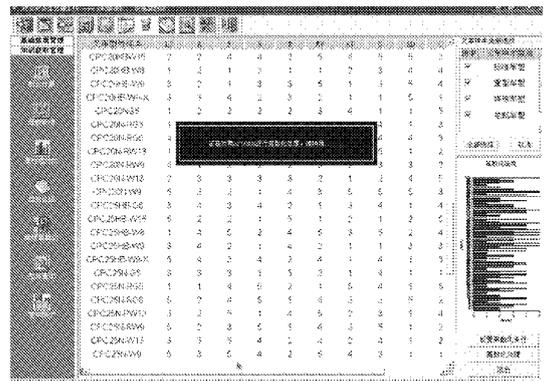


图1 叉车样本离散化处理界面

Fig.1 Discretization interface of forklift samples

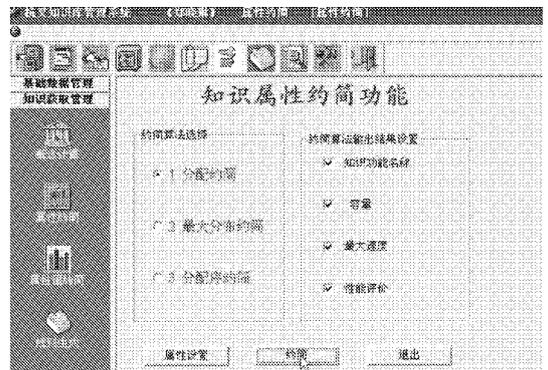


图2 叉车样本属性约简程序处理界面

Fig.2 Reduction interface of forklift sample attributes

表3 数据集的特性描述

Tab.3 Character description of data sets

数据集	样本数	特征数	类别数
门架倾角	150	4	3
载荷中心距	20000	16	26
前悬距	214	13	6
最小转弯半径	2310	19	7
最大爬坡度	528	10	11
质量	178	13	3

测试中将大数据集(载荷中心距)分为3个部分:训练集、校验集(用来调整参数)、测试。小样本的数据集采用10-fold cross validation来进行测试。

从表4可以看出,本文所提出的线性方法在部

表4 线性方法最佳效果与其他方法对比

Tab.4 Contrast record among linear algorithm and other methods

方法	DB2	DAG SVM	One-against-One SVM	One-against-All SVM	One-against-All 线性方法
			One SVM	All SVM	All 线性方法
门架倾角	97.3	96.6	97.3	96.6	98.3
载荷中心距	98.2	97.9	97.9	97.8	98.0
前悬距	73.5	73.8	72.0	71.9	74.4
最小转弯半径	96.4	96.6	96.6	95.2	96.4
最大爬坡度	99.2	99.2	99.0	99.0	99.0
质量	99.8	98.8	99.4	98.8	99.9

分数据集上取得了最佳的效果,对不占绝对优势的数据集而言,其结果与最佳效果也差别很小,总体比较该方法具有相应优势。

## 4 结论

(1) 提出了一种基于概率机概率输出和间隔信息的线性多分类器,并通过在叉车产品的设计知识分类中的实验,验证了该方法具有比较高的可靠性、可行性和实用性。

(2) 各个分类器通过利用概率信息和样本间隔信息,构造了结果合成阶段的相应权重,克服了大多数算法在合成阶段仅仅依靠投票数量来进行决策和均等权重的不足。

(3) 权重的构造为一种动态的输出编码设计,即能随着算法和数据的变化而发生自适应的变化,提高了性能。

(4) 设计了一种类别子空间的差异度量方法,通过差异的角度信息描述了类别子空间的不同。

## 参 考 文 献

- 1 谢友柏. 现代设计与知识获取[J]. 中国机械工程,1996,7(6):36~41.  
Xie Youbai. Modern design and knowledge acquisition[J]. China Mechanical Engineering,1996,7(6):36~41. (in Chinese)
- 2 车君华. 机械产品设计过程知识获取与处理技术及其在叉车行业应用研究[D]. 杭州:浙江大学,2007.  
Che Junhua. Knowledge acquisition and management in mechanical product design process and application in forklift industry[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2007. (in Chinese)
- 3 刘晓冰,杨春立,高天一,等. 基于设计仓库的产品设计知识管理方法研究[J]. 计算机集成制造系统,2005,11(6):831~835.  
Liu Xiaobing, Yang Chunli, Gao Tianyi, et al. Method of product design knowledge management based on design repository[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2005,11(6):831~835. (in Chinese)
- 4 刘晓冰,杨春立,孙伟. 产品设计知识库建立方法研究[J]. 计算机集成制造系统,2003,9(8):621~625.  
Liu Xiaobing, Yang Chunli, Sun Wei. Method of building product design knowledge base [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2003,9(8):621~625. (in Chinese)
- 5 Broens R, Vries M. Classifying technological knowledge for presentation to mechanical engineering designers[J]. Design Studies, 2003, 24(5): 457~471.
- 6 齐元胜,彭华,郭顺生. 广义设计知识管理及关键技术研究[J]. 机械设计,2002,8(8):5~7.  
Qi Yuansheng, Peng Hua, Guo Shunsheng. Study on the management of generalized design knowledge and its key technology[J]. Mechine Design, 2002,8(8):5~7. (in Chinese)
- 7 郝永平,王崇海,宁汝新,等. 基于本体论的产品全过程知识共享研究[J]. 机械工程学报,2002,38(12):126~130.  
Hao Yongping, Wang Chonghai, Ning Ruxin, et al. Study on knowledge sharing in the whole process of product based on ontology [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(12): 126~130. (in Chinese)
- 8 王英林,王卫东,王宗江,等. 基于本体的可重构知识管理平台[J]. 计算机集成制造系统,2003,9(12):1136~1144.  
Wang Yinglin, Wang Weidong, Wang Zongjiang, et al. Reconfigurable platform for knowledge management based on ontology[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2003, 9(12): 1136~1144. (in Chinese)
- 9 Toye G, Cutkosky M R, Tenenbaum J M, et al. Share: a methodology and environment for collaborative product development[C] //Proceedings of Second Workshop on Enabling Technologies: Infrastructure for Collaborative Enterprises, 1993: 33~37.
- 10 Ha S, Pahang G, Chang M, et al. Managing design knowledge: active document system[J]. Annuals of the CIRP, 1999, 48(1): 89~92.
- 11 Marshall A W, Olkin I. Multivariate chebyshev inequalities [J]. Annals of Mathematical Statistics,1960,31(4):1001~1014.
- 12 石浩然,王维锐,吴参,等. 知识集成环境下产品设计过程动态组织方法[J]. 农业机械学报,2011,42(11):183~188.  
Shi Haoran, Wang Weirui, Wu Can, et al. Dynamic reconstructing of the product design process in knowledge integrated environment[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(11):183~188. (in Chinese)