

考虑安装误差的摆线齿准双曲面齿轮轮齿接触分析*

王峰 方宗德 李声晋 苏进展

(西北工业大学机电学院, 西安 710072)

【摘要】 基于双刀头(two-part cutter head)分体式刀盘,采用面滚式切制方法加工摆线齿准双曲面齿轮,依据其加工展成原理建立了数学模型,并在考虑安装误差的情况下进行了轮齿接触分析(TCA),得出了安装误差对其啮合性能的影响。在满足传动性能要求的情况下,设计了轮坯参数和机床加工参数。以一对摆线齿准双曲面齿轮为例,分析了各个安装误差对其啮合性能的影响。

关键词: 摆线齿准双曲面齿轮 端面滚齿 安装误差 轮齿接触分析 啮合性能

中图分类号: TH132.421 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2012)09-0213-06

Tooth Contact Analysis of Epicycloid Hypoid Gear Considering Assembly Misalignment

Wang Feng Fang Zongde Li Shengjin Su Jinzhan

(School of Mechatronics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract

Based on two-part cutter head, the mathematical model of epicycloid hypoid gear pair was built through face-hobbing cutting method and generating principle. The relationship between assembly misalignment and meshing behavior was described by the results of tooth contact analysis. In the situation of transmission performance requirements, the parameters of wheel blank and processing parameters were designed. Based on a pair of epicycloid hypoid gears, the influence of each assembly misalignment on the meshing and transmission performance was analyzed.

Key words Epicycloid hypoid gears, Face hobbing, Assembly misalignment, Tooth contact analysis, Meshing performance

引言

准双曲面齿轮由于具有承载能力高、传动平稳、噪声小、结构紧凑等优点,在汽车后桥上得到越来越多的使用,摆线齿准双曲面齿轮在国内应用较少。摆线齿准双曲面齿轮采用等高齿制,因此在理论上可以将大小轮刀盘切削面做成一样,采用间接展成法加工出完全共轭的轮齿,同时为了克服制造及安装的不可调性,采用相应的方法将大小轮齿面进行修形形成局部共轭接触。相比弧线齿准双曲面齿

轮,摆线齿准双曲面齿轮在轮齿啮合过程中具有更长的啮合线,因此在传动过程具有更好的平稳性及更低的传动噪声;另外,不同于弧线齿准双曲面齿轮采用的间歇分齿加工,摆线齿准双曲面齿轮采用连续分齿且粗切及精切在一个切齿循环中完成,因而具有更高的加工效率^[1]。

摆线齿准双曲面齿轮凭借其优越的啮合传动性能、高效的切削加工效率以及偏置布局能够有效降低底盘高度等特性,在国内得到越来越广泛的应用。但国内的研究总体还处于起步阶段。

文献[2]给出了克里贝格准双曲面齿轮的数学模型,文献[3]在建立数学模型的基础上分析了齿轮副接触应力,文献[4]研究了基于面铣式(face milling)切制方法的螺旋锥齿轮设计仿真以及接触分析。但关于面滚式(face hobbing)切制方法的分析文献则较少,考虑安装误差的摆线齿准双曲面齿轮齿面接触分析,尚未见文献报道。

本文分析基于双刀头(two-part cutter head)分体式刀盘,采用面滚式切制方法加工摆线齿准双曲面齿轮的基本原理,依据其加工展成原理建立一对摆线齿准双曲面齿轮的数学模型,并在考虑安装误差的情况下进行轮齿接触分析(TCA),得出安装误差对其啮合性能的影响。

1 摆线形成原理

摆线齿准双曲面齿轮铣齿加工是按照“假想平面齿轮”(冠轮,也称作平面产形轮)原理进行设计的。为了在滚齿加工过程中形成需求的长幅外摆线(简称摆线),假设端铣刀盘上装有 z_0 组刀齿,则每组刀齿至少有外刀A和内刀I两个刀齿,分别用于加工齿的凹面和凸面。刀盘与冠轮的相对运动可以视为刀盘上一滚筒绕冠轮上基圆作纯滚动。刀盘上的内外刀刃在冠轮的分度平面上形成长幅外摆线齿线。当刀盘转过一组刀齿时,轮坯和产形轮则转过一个齿,加工出齿槽的凹凸两面。

如图1所示,当摆线齿准双曲面齿轮滚齿时,刀盘的旋转运动和工件的旋转运动以一定的传动比配合起来,刀盘刀刃在轮坯上形成长幅外摆线的齿线形状^[5],并使轮坯得到一定齿数间的连续分度,该方法称连续分度双面法,又称端面滚齿法。

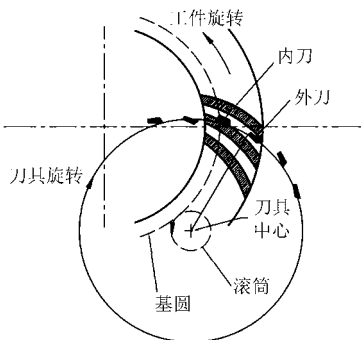


图1 长幅外摆线形成原理示意图
Fig.1 Formation of cycloid

2 轮齿加工原理

2.1 端面滚齿刀方程

按 Cyclo-palloid 方法用多头刀盘加工齿轮,刀盘采用双层结构,由内切刀盘和外切刀盘两部分组

成,内切刀盘上的内切刀用来切削齿轮的凸齿面,外切刀盘上的外切刀用来切削齿轮的凹齿面,外刀片的中心点为 O_A ,内刀片的中心点为 O_I ,两刀盘的回转轴线不重合。左旋刀盘坐标系如图2所示。

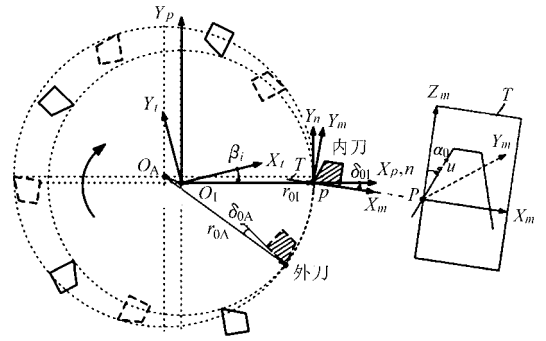


图2 左旋刀盘坐标系

Fig.2 Coordinate systems for left handed dual cutter heads of cyclo-palloid method

展成过程中,内刀与外刀以相同的速度分别绕各自旋转轴运动。在实际应用中,内刀半径 r_{0I} 一般取为刀具名义半径,通过调整外刀半径 r_{0A} 来改变凹面纵向曲率,从而得到理想的齿面接触椭圆。其它的刀具参数包括刀具齿形角 α_0 、刀具偏置角 δ_0 、刀头组数 z_0 。 S_m, S_i 分别为与切削刃和刀头固连的坐标系, S_n, S_p 为辅助坐标系。刀刃上任意一点P在 S_i 坐标系中矢量方程为

$$r_i(u) = M_{tp} M_{pn} M_{nm} r_m(u) \tag{1}$$

其中

$$r_m(u) = \begin{bmatrix} u \sin \alpha_{0k} \\ 0 \\ u \cos \alpha_{0k} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$M_{nm} = \begin{bmatrix} \cos \delta_{0k} & -\sin \delta_{0k} & 0 & 0 \\ \sin \delta_{0k} & \cos \delta_{0k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$M_{pn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r_{0k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$M_{tp} = \begin{bmatrix} \cos \beta_{ik} & -\sin \beta_{ik} & 0 & 0 \\ \sin \beta_{ik} & \cos \beta_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中 β_{ik} ——刀具初始角 u ——刀具参数

变换矩阵中的下标 k 代表I和A,分别表示内刀和外刀。

2.2 假想产形轮

假想产形轮通常用来解释锥齿轮的加工过程,

是由刀刃的运动轨迹形成的虚拟齿轮^[6]。即在切齿过程中,假设假想平面齿轮与被切齿轮做无间隙啮合,整个齿轮的切削过程如同一对锥齿轮进行啮合的过程,刀盘的切削面与被加工出的轮齿曲面是一对完全共轭的曲面。

图3为产形轮形成坐标系。 S_d 为与产形轮固连的坐标系, S_b 、 S_c 为辅助坐标系。点 Q 是刀倾机构

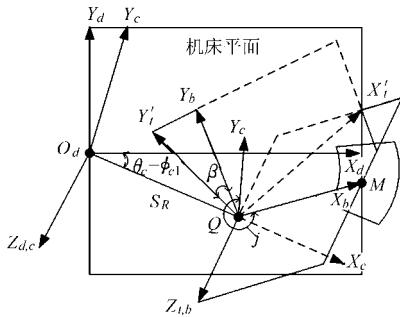


图3 产形轮形成坐标系

Fig.3 Coordinate system between cutter head and imaginary generating gear

在切削平面上的中心点。产形轮方程为

$$r_d(u, \beta, \phi_{c1}) = M_{dc}(\phi_{c1}) M_{cb} M_{bt}(\beta) r_i(u) \quad (6)$$

其中

$$M_{bt}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & E_{xz} \cos\varphi_e \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & E_{xz} \sin\varphi_e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$M_{cb} = \begin{bmatrix} -\sin j & -\cos j & 0 & S_R \\ \cos j & -\sin j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$M_{dc}(\phi_{c1}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_c - \phi_{c1}) & \sin(\theta_c - \phi_{c1}) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_c - \phi_{c1}) & \cos(\theta_c - \phi_{c1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中 β ——刀具转角 E_{xz} ——刀具偏心距
 φ_e ——刀具定位角 S_R ——摇台径向距离
 j ——刀转角 θ_c ——摇台初始转角
 ϕ_{c1} ——摇台转角
 ϕ_{c1} 与刀具转角的关系为

$$\phi_{c1} = \frac{z_0}{z_p} \beta \quad (10)$$

式中 z_p ——产形轮齿数

2.3 准双曲面齿面方程

在展成过程中,轮坯与产形轮滚切形成摆线齿准双曲面齿轮。图4为齿面展成坐标系, S_1 为与被加工齿轮固连的坐标系, S_e 、 S_f 、 S_g 为辅助坐标系。齿面方程为

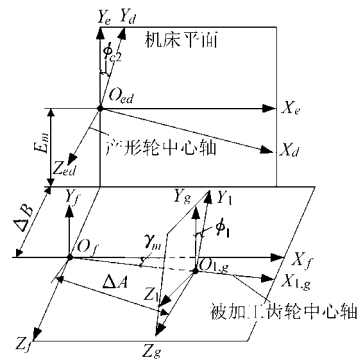


图4 齿面展成坐标系

Fig.4 Coordinate system between generating gear and work gear

$$r_1(u, \beta, \phi_{c2}, \phi_1) = M_{1g}(\phi_1) M_{gf} M_{fe} M_{ed}(\phi_{c2}) r_d(u, \beta) \quad (11)$$

其中

$$M_{ed}(\phi_{c2}) = \begin{bmatrix} \cos\phi_{c2} & \sin\phi_{c2} & 0 & 0 \\ -\sin\phi_{c2} & \cos\phi_{c2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$M_{fe} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E_m \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$M_{gf} = \begin{bmatrix} \cos\gamma_m & 0 & \sin\gamma_m & -\Delta A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\gamma_m & 0 & \cos\gamma_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$M_{1g}(\phi_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & 0 \\ 0 & \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中 E_m ——机床垂直偏置距
 ΔB ——滑座进给量 ϕ_{c2} ——摇台从动转角
 ΔA ——机器中心到后座行程
 γ_m ——机床根锥角 ϕ_1 ——被加工齿轮转角
 摇台从动转角 ϕ_{c2} 与被加工齿轮转角 ϕ_1 之间的关系为

$$\phi_{c2} = \frac{z}{z_p} \phi_1 \quad (16)$$

在产形轮与轮坯的啮合过程中,在 S_1 坐标系下有啮合方程

$$f_1(u, \beta, \phi_1) = n_1 v_1^{(m1)} = n_1 \left(\dot{\phi}_1 \frac{\partial r_1}{\partial \phi_1} \right) = 0 \quad (17)$$

式中 $v_1^{(m1)}$ ——切削刃与被加工齿轮在坐标系 S_1 中的相对速度

n_1 ——齿面单位矢

根据式(1)~(17)可求解出齿面方程。再过齿

轮轴截面做旋转投影面,对齿面进行网格划分,得到齿面仿真模型。

3 齿面接触分析

图5为齿轮副啮合坐标系, S_1 和 S_2 分别是小轮和大轮的动坐标系, S_s 为轮齿啮合坐标系, H 为轴向装配距离, Σ 为轴交角, V 为小轮偏置距。

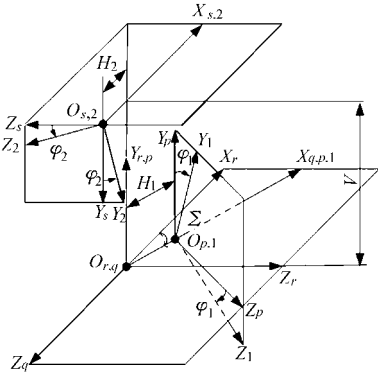


图5 齿轮副啮合坐标系

Fig.5 Coordinate system for assembly of gear pair

在啮合坐标系 S_s 中,两啮合齿面 Σ_1 、 Σ_2 的位置矢量、单位法向矢量分别为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_s^{(1)}(u^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \varphi_1) = \\ \quad \mathbf{M}_{sr} \mathbf{M}_{rq} \mathbf{M}_{qp} \mathbf{M}_{p1} \mathbf{r}_1(u^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi_1^{(1)}) \\ \mathbf{r}_s^{(2)}(u^{(2)}, \beta^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \varphi_2) = \\ \quad \mathbf{M}_{s2} \mathbf{r}_2(u^{(2)}, \beta^{(2)}, \phi_1^{(2)}) \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \mathbf{n}_s^{(1)}(u^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \varphi_1) = \\ \quad \mathbf{L}_{sr} \mathbf{L}_{rq} \mathbf{L}_{qp} \mathbf{L}_{p1} \mathbf{n}_1(u^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi_1^{(1)}) \\ \mathbf{n}_s^{(2)}(u^{(2)}, \beta^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \varphi_2) = \\ \quad \mathbf{L}_{s2} \mathbf{n}_2(u^{(2)}, \beta^{(2)}, \phi_1^{(2)}) \end{cases} \quad (19)$$

式中 $u^{(1)}$ 、 $\beta^{(1)}$ 、 $\phi_1^{(1)}$ ——小轮齿面参数

$u^{(2)}$ 、 $\beta^{(2)}$ 、 $\phi_1^{(2)}$ ——大轮齿面参数

φ_1 ——小轮啮合转角

φ_2 ——大轮啮合转角

\mathbf{M}_{ij} ——坐标系变换矩阵

\mathbf{L}_{ij} —— \mathbf{M}_{ij} 去掉最后一行和最后一列的旋转矩阵

由图6所示,根据啮合原理,在轮齿啮合过程中,两齿面连续相切接触。因此,在固定坐标系 S_s 中,任意时刻两齿面都有公共接触点,且公共接触点处都有公法线,即TCA基本方程组^[7]为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_s^{(1)}(u^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \varphi_1) = \\ \quad \mathbf{r}_s^{(2)}(u^{(2)}, \beta^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \varphi_2) \\ \mathbf{n}_s^{(1)}(u^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \varphi_1) = \\ \quad \mathbf{n}_s^{(2)}(u^{(2)}, \beta^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \varphi_2) \end{cases} \quad (20)$$

由于 $|\mathbf{n}_s^{(1)}| = |\mathbf{n}_s^{(2)}| = 1$,故由方程组(20)可得

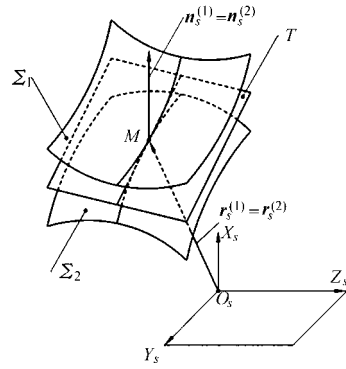


图6 齿面相切接触示意图

Fig.6 Schematic diagram of tooth tangent

到5个方程,加上两齿面加工时的2个啮合方程,共有独立的标量。而未知量有 $u^{(1)}$ 、 $u^{(2)}$ 、 $\beta^{(1)}$ 、 $\beta^{(2)}$ 、 $\phi_1^{(1)}$ 、 $\phi_1^{(2)}$ 、 φ_1 、 φ_2 共8个。此时,可取 φ_1 为输入量,求解 $u^{(1)}$ 、 $u^{(2)}$ 、 $\beta^{(1)}$ 、 $\beta^{(2)}$ 、 $\phi_1^{(1)}$ 、 $\phi_1^{(2)}$ 、 φ_2 ,从而得到两齿面的一个接触点。然后以一定步长改变 φ_1 的值,继续求解,直至求出的接触点超出齿面的有效边界。这些求得的齿面瞬时接触点就构成了齿面接触路径,同时也能得到齿面的传动误差为

$$e(\varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_{20} - \frac{z_1}{z_2}(\varphi_1 - \varphi_{10}) \quad (21)$$

式中 φ_{10} 、 φ_{20} ——齿面1和齿面2啮合时初始转角
 z_1 、 z_2 ——齿轮1和齿轮2的齿数

当给定齿面的弹性变形量 $d \leq 0.00635 \text{ mm}$ ^[8] 时,在每个接触点处又可以求出瞬时接触椭圆的大小和方向,这一系列的接触椭圆就构成了齿面接触印痕。

4 算例

建立分体刀盘面滚式切制法的准双曲面齿轮数学模型,其主要设计及加工参数见表1、2,其它齿轮

表1 准双曲面齿轮轮坯参数

Tab.1 Parameters of wheel blank

参数	小齿轮		大齿轮	
	凸面 (I)	凹面 (A)	凸面 (I)	凹面 (A)
轴交角 $\Sigma/(\circ)$	90		90	
偏置距 V/mm	40		40	
齿轮名义模数 m/mm	6.065		6.065	
齿轮名义半径 r_m/mm	49.692		171.575	
平均螺旋角 $\beta_m/(\circ)$	42.922(左旋)		30(右旋)	
轴向安装距 H/mm	16.570		8.331	
齿轮齿数 z	12		49	
节锥角 $\delta/(\circ)$	18.206		71.354	
齿宽 F/mm	65		60	
产形轮齿数 z_p			50.033 173	

表2 齿轮副加工参数
Tab.2 Processing parameters

参数	小齿轮		大齿轮	
	凸面 (I)	凹面 (A)	凸面 (I)	凹面 (A)
刀具组数 z_0	5			
刀尖半径 r_{0k}/mm	135	135.39	135	135.46
刀具齿形角 $\alpha_{0k}/(^{\circ})$	21	-19	19	-21
刀具偏置角 $\delta_{0k}/(^{\circ})$	-6.4	-6.429	6.4	6.4265
刀具初始角 $\beta_{ik}/(^{\circ})$	0	-48	0	48
刀具偏心距 E_{iz}/mm	0	3.872	0	3.311
刀具定位角 $\varphi_{iz}/(^{\circ})$	0	160.29	0	-160.90
刀转角 $j/(^{\circ})$	20.5097		159.4903	
摇台径向距离 S_R/mm	172.038		172.038	
摇台初始角 $\theta_c/(^{\circ})$	56.9829		-44.0611	
机床垂直偏距 E_m/mm	35.697		4.115	
机床中心到后座行程 $\Delta A/\text{mm}$	15.728		-10.982	
滑座进给量 $\Delta B/\text{mm}$	-3.034		8.526	
机床根锥角 $\gamma_m/(^{\circ})$	18.2058		71.3535	

基本参数可参考文献[9]。

仿真得小轮三维模型如图7所示,大轮三维模型如图8所示,齿轮三维啮合模型如图9所示。

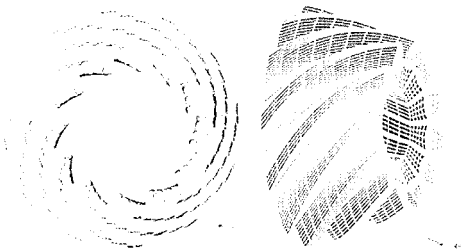


图7 小轮三维模型
Fig.7 3-D model for pinion

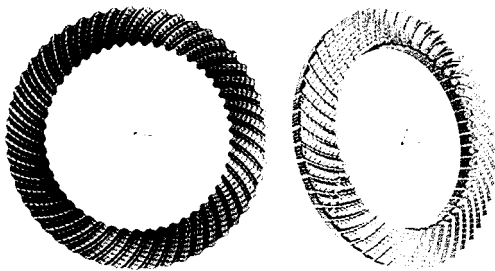


图8 大轮三维模型
Fig.8 3-D model for gear

根据 Litvin F L 的研究^[7,10-11],对称抛物线型的传动误差曲线能够有效吸收弧齿锥齿轮传动过程中的线性误差,从而降低传动过程中的振动与噪声。通过局部综合法^[12]调整切入摇台角和内、外刀盘的回转中心偏距等设计加工参数,可以得到理想的接

触椭圆和传动误差曲线。本例中的摆线齿准双曲面齿轮副 TCA 仿真结果如图10所示,齿面接触印痕处于齿面中部,传动误差呈对称特性,能够满足设计所需的啮合传动性能。

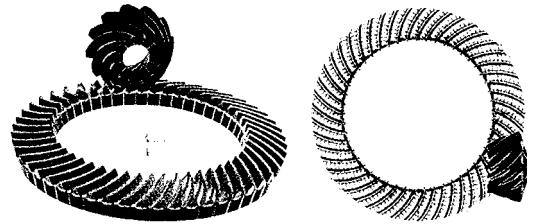


图9 齿轮副啮合三维模型
Fig.9 3-D models for assembly of gear pair

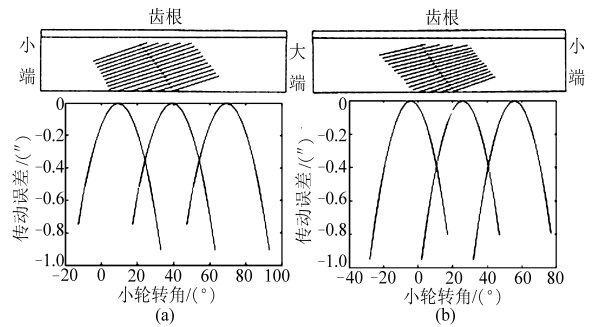


图10 轮齿接触分析结果

Fig.10 Results of TCA

(a) 大轮凸面 (b) 大轮凹面

5 考虑安装误差的啮合性能

在工程实际应用中,由于加工误差、安装误差、支撑变形等,准双曲面齿轮副的啮合位置不可能达到理想状态,总会存在一定的误差。这种误差会影响齿轮啮合性能,导致齿面接触不良,振动,传动平稳性降低。而安装误差又是影响准双曲面齿轮啮合性能的关键因素。分别选取轴交角误差、轴向误差和中心偏置距误差,研究安装误差对啮合性能的影响。

图11是轴交角误差 $\Delta\Sigma = -0.05^{\circ}$ 时的接触印痕和传动误差曲线。

图12是轴向安装误差 $\Delta H = -0.1\text{mm}$ 时的接

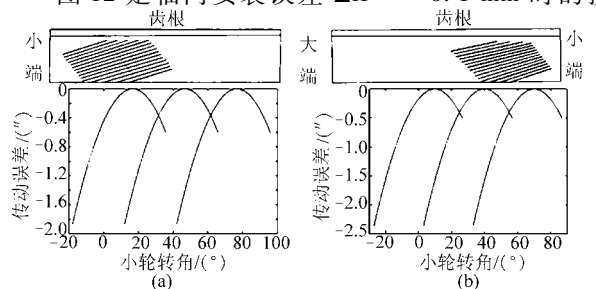


图11 考虑轴交角误差的接触分析结果

Fig.11 Results with shaft angle misalignment

(a) 大轮凸面 (b) 大轮凹面

触印痕和传动误差曲线。

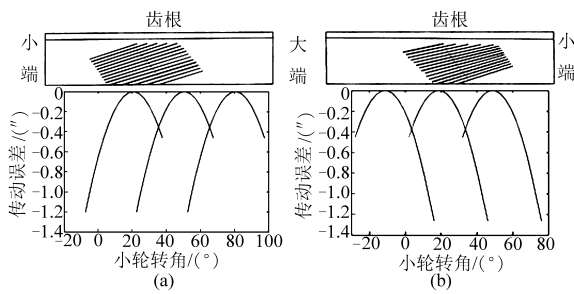


图12 考虑轴向误差的接触分析结果

Fig. 12 Results with axial setting misalignment

(a) 大轮凸面 (b) 大轮凹面

图13是中心偏置距安装误差 $\Delta V = 0.1 \text{ mm}$ 时的接触印痕和传动误差曲线。

图11~13表明,安装误差为正值时,接触印痕偏向大轮大端,负值时接触印痕偏向大轮小端。且轴交角安装误差对其啮合性能(接触印痕和传动误差)的影响大于其他安装误差项对啮合性能的影响,但与一般直齿锥齿轮相比摆线齿准双曲面齿轮啮合性能对安装误差敏感性较低。由此可见,摆线齿准双曲面齿轮对安装误差起到了较好的吸收作用。

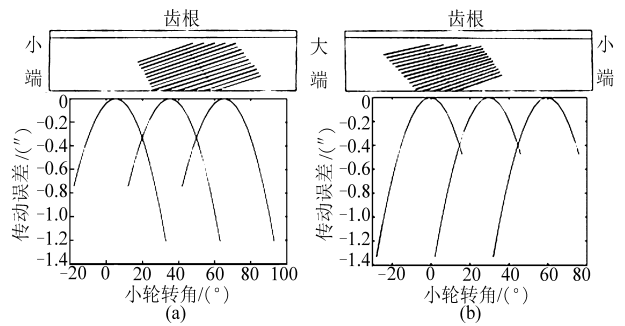


图13 考虑中心偏置距误差的接触分析结果

Fig. 13 Results with offset misalignment

(a) 大轮凸面 (b) 大轮凹面

6 结论

(1) 通过对面滚式切制法的分体式刀盘、成型加工原理和参数的研究,准确地建立了摆线齿准双曲面大小轮的数学模型。

(2) 提出考虑安装误差的摆线齿准双曲面齿轮齿面接触分析,通过调整外刀半径来改变凹面纵向曲率,从而得到理想的接触椭圆。

(3) 摆线齿准双曲面齿轮对安装误差敏感性较低,可以通过控制安装误差,从而有效改善啮合轨迹位置和传动质量。

参 考 文 献

- 禹文涛. 摆线齿锥齿轮全数控加工方法及软件实现[D]. 重庆:重庆理工大学,2009.
- Fong Z H. Mathematical model of universal hypoid generator with supplemental kinematic flank correction motions [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1993, 122(1):136~141.
- Vimercati M. Mathematical model for tooth surfaces representation of face-hobbed hypoid gears and its application to contact analysis and stress calculation [J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(6):668~690.
- Litvin F L, Alfonso Fuentes, Qi Fan, et al. Computerized design, simulation of meshing, and contact and stress analysis of face-milled format generated spiral bevel gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(5):441~459.
- Zhao X. Computerized investigation of straight and face-hobbed spiral bevel gears [D]. Chicago: University of Illinois at Chicago, 1995.
- Lin C Y, Tsay C B, et al. Computer-aided manufacturing of spiral bevel and hypoid gears with minimum surface-deviation [J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33(6):785~803.
- Litvin F L, Gear geometry and applied theory [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994:160~257.
- 方宗德,郭琳琳,苏进展,等. 基于齿面印痕控制的弧齿锥齿轮公差优化设计[J]. 农业机械学报,2011,42(7):223~228. Fang Zongde, Guo Linlin, Su Jinzhan, et al. Optimal design of tolerance for spiral bevel gears by controlling contact path [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(7):223~228. (in Chinese)
- 董学朱. 摆线齿锥齿轮及准双曲面齿轮设计和制造[M]. 北京:机械工业出版社,2002.
- Litvin F L, Vecchiato D, Gurovich E, et al. Computerized developments in design, generation, simulation of meshing, and stress analysis of gear drives [J]. Meccanica, 2005, 40(3):291~324.
- Litvin F L, Vecchiato D, Yukishima K, et al. Reduction of noise of loaded and unloaded misaligned gear drives [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(41~43):5 523~5 536.
- Litvin F L. Local synthesis and tooth contact analysis of face-milled spiral bevel gears [R]. NASA, CR4342, 1990.