

# 大变形柔性转动副结构与柔度分析\*

杨启志 朱小兵 马履中 黄国全 庄佳奇 訾鹏飞

(江苏大学机械工程学院, 镇江 212013)

**【摘要】** 目前运用较多的柔性运动副基本上只能产生微细变形,适用于微动领域,缺少能产生宏观尺度变形的柔性运动副。在弹性曲板变形理论的基础上设计出一种新型柔性转动副,可以满足宏观尺寸下的变形要求。通过理论分析建立其柔度矩阵,分析其转动刚度与转动误差,利用 Matlab 进行了理论计算,并进行了 Ansys 软件仿真与实体模型试验。结果表明:理论计算与仿真的转动刚度相对误差为 5.6%,转动误差相对误差为 3.4%,通过试验验证了转动刚度和转动误差相对角度变化的变化规律,说明对该新型大变形柔性转动副的柔度分析正确。

**关键词:** 柔性机构 转动副 柔度矩阵 大变形 仿真 试验

中图分类号: TH112.1 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2012)09-0209-04

## Structural Design and Flexibility Analysis of New Compliant Revolute Pair with Macro-scale Deformation

Yang Qizhi Zhu Xiaobing Ma Lüzhong Huang Guoquan Zhuang Jiaqi Zi Pengfei

(School of Mechanical Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

### Abstract

The disadvantage of current compliant pairs used in micro-displacement fields are that they produce micro-deformation rather than macro-scale deformation. In order to solve this problem, a new compliant revolute pair was proposed based on the theory of elastic deformation which can provide macro-scale deformation according to its own elastic deformation. The model of flexibility matrix was established, and rotation error was calculated with Matlab software and analyzed in Ansys. The results showed that the relative rotational stiffness error was 5.6% and relative rotation error was 3.4% according to the two methods. Finally, a test of the compliant revolute pair was carried out to justify the two above-mentioned results. It showed the flexibility analysis is reasonable.

**Key words** Compliant, Revolute pair, Flexibility matrix, Macro-scale deformation, Simulation, Test

### 引言

随着现代机械向高精度、高速度和高性能方向发展,传统运动副存在的局限性:运动副零件加工质量不高、装配间隙、误差累积等,使其无法满足高精度运动要求。柔性运动副由于为整体加工、靠自身弹性变形实现运动,可弥补传统运动副的不足,具有无间隙、无摩擦磨损、可整体加工、免于装配等优点,

因此可广泛用于高频激振、高精度定位等普通运动副无法实现的运用场合。但是目前柔性机构主要应用于微动运动领域,比如:微操作器、微定位平台、微激振等<sup>[1-5]</sup>。这些微动机构中使用的柔性运动副<sup>[5-6]</sup>其变形量非常小,在一些要求宏观尺度变形的高精度工作环境中已经不能满足机械发展的要求。例如:在基于并联机构的高频运动领域,传统的并联振动装置的运动副为普通运动副,可实现较低

收稿日期: 2011-09-24 修回日期: 2011-11-06

\* 国家自然科学基金资助项目(50905077)、高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20093227120007)和江苏省博士后基金资助项目(0901010B)

作者简介: 杨启志,副教授,博士,主要从事并联机构机器人及应用、机械动力学和智能机械研究, E-mail: yqz\_ujs@126.com

运动频率的运动模拟,对于频率高达 200 Hz 以上的多维激振,由于传统运动副自身的缺点,特别是运动副存在间隙,根本无法实现如此高频的较大变形量的多维振动模拟输出。

因此有必要设计一种可以实现宏观尺度下运动的柔性运动副,从而使柔性并联机构可实现较大运动输出变形并实现高频振动模拟,扩大运用空间。

### 1 大变形柔性转动副结构设计

平面曲板可以产生较大的弹性变形<sup>[7]</sup>,并且其运动类似圆弧运动,在这基础上设计了一种新型柔性转动副,其具体的结构形式如图 1 所示,结构的中间部分为曲板,依靠曲板的弹性变形来产生相对转动,曲板与两端的矩形截面梁相连接,矩形截面梁提供与连杆相连接的载体,视为构件(刚体)。

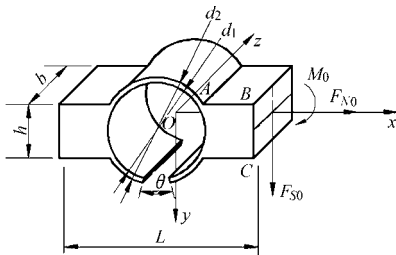


图 1 大变形柔性转动副结构简图

Fig. 1 Structure of new compliant pair

### 2 柔性转动副变形理论分析

衡量柔性转动副的一个重要结构参数为柔度,反映柔性转动副的变形与所受广义力之间的关系,对于已知力求变形和已知变形求需要加载的力都有非常重要的指导意义。在模型的几何中心处建立全局坐标系  $Oxyz$ ,并将其左端固定,在右端面形心处分别受到沿  $x$  轴的轴向力  $F_{N0}$ 、沿  $y$  轴的切向  $F_{S0}$  和绕  $z$  轴的转矩  $M_0$ ,结构产生的弹性变形主要是由中间的曲板产生,两端的矩形截面梁由于抗弯和抗拉压刚度都比较大,变形相对于曲板非常小,可以近似看作刚体,由此建立柔性副的静力学模型如图 2 所示。

在曲板的右端形心处建立局部坐标系  $O'x'y'z'$ ,

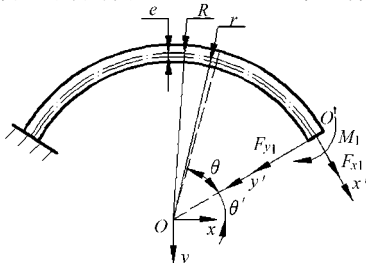


图 2 受力示意图

Fig. 2 Force diagram

其中  $x'$  为轴向,  $y'$  为切向,  $z'$  由右手螺旋法则确定,  $F_{N1}$ 、 $F_{S1}$  和  $M_1$  分别为轴向力、切向力和弯矩,  $r$  为中性层的曲率半径,  $R$  为形心轴的曲率半径,  $e$  为形心轴与中性轴之间的距离,现采用能量法计算曲板的变形,然后由卡氏定理求得曲板相应点的位移,曲板应变能的计算式为

$$V_e = \int_S \left( \frac{M^2}{2ESR_0} + \frac{MF_N}{EAR_0} + \frac{F_N^2}{2EA} + \frac{kF_S^2}{2GA} \right) dS \quad (1)$$

式中  $F_N$ 、 $F_S$ 、 $M$ ——截面所受轴向力、切向力、力矩

$E$ ——弹性模量  $G$ ——切变模量

$S$ ——截面对  $y$  轴的静矩

$R_0$ ——曲率半径  $A$ ——截面面积

$k$ ——与截面形状有关的因数(矩形截面  $k = 1.2$ )

由卡氏定理,切向位移  $\delta_s$ 、轴向位移  $\delta_N$  和转角  $\theta_z$  的计算公式为

$$\delta_s = \frac{\partial V_e}{\partial F_{S1}} = \int_S \left( \frac{M}{ESR_0} \frac{\partial M}{\partial F_{S1}} + \frac{F_N}{EAR_0} \frac{\partial M}{\partial F_{S1}} + \frac{M}{EAR_0} \frac{\partial F_N}{\partial F_{S1}} + \frac{F_N}{EA} \frac{\partial F_N}{\partial F_{S1}} + \frac{kF_S}{GA} \frac{\partial F_S}{\partial F_{S1}} \right) dS \quad (2)$$

$$\delta_N = \frac{\partial V_e}{\partial F_{N1}} = \int_S \left( \frac{M}{ESR_0} \frac{\partial M}{\partial F_{N1}} + \frac{F_N}{EAR_0} \frac{\partial M}{\partial F_{N1}} + \frac{M}{EAR_0} \frac{\partial F_N}{\partial F_{N1}} + \frac{F_N}{EA} \frac{\partial F_N}{\partial F_{N1}} + \frac{kF_S}{GA} \frac{\partial F_S}{\partial F_{N1}} \right) dS \quad (3)$$

$$\theta_z = \frac{\partial V_e}{\partial M_1} = \int_S \left( \frac{M}{ESR_0} \frac{\partial M}{\partial M_1} + \frac{F_N}{EAR_0} \frac{\partial M}{\partial M_1} + \frac{M}{EAR_0} \frac{\partial F_N}{\partial M_1} + \frac{F_N}{EA} \frac{\partial F_N}{\partial M_1} + \frac{kF_S}{GA} \frac{\partial F_S}{\partial M_1} \right) dS \quad (4)$$

其中  $M = F_{S1}R\sin\theta + F_{N1}R(1 - \cos\theta) + M_1$

$$F_N = -F_{S1}\sin\theta + F_{N1}\cos\theta$$

$$F_S = F_{S1}\cos\theta + F_{N1}\sin\theta$$

$$M_1 = F_{S0} \left( \frac{L}{2} - R\cos\theta' \right) + F_{N0}R\sin\theta' + M_0$$

$$F_{N1} = F_{S0}\cos\theta' + F_{N0}\sin\theta'$$

$$F_{S1} = F_{S0}\sin\theta' - F_{N0}\cos\theta'$$

$$\theta' = \arcsin \left( \frac{h}{d_2} \right) \quad dS = Rd\theta$$

$$R_0 = R = 0.25(d_1 + d_2) \quad r = \frac{0.5(d_2 - d_1)}{\ln(d_2/d_1)}$$

$$e = R - r \quad A = 0.5b(d_2 - d_1) \quad S = eA$$

将以上诸条件代入到公式中,并且取积分区间为  $(0, \pi - 2\arcsin(h/d_2))$ ,即可解得曲板的右端形心位移  $\delta_{N1}$  和  $\delta_{S1}$  关于  $F_{N1}$ 、 $F_{S1}$ 、 $M_1$  的解析解,经整理,将解写成矩阵的形式

$$\delta_1 = CF_1 \quad (5)$$

其中  $\delta_1 = [\delta_{N1} \quad \delta_{S1} \quad \theta_z]^T$

$$F_1 = [F_{N1} \quad F_{S1} \quad M_1]^T$$

$$\mathbf{C} = \frac{R}{EA} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

柔度矩阵  $\mathbf{C}$  中

$$\left\{ \begin{aligned} C_{11} &= -\frac{2R}{e} \sin\theta'' + \frac{3R}{2e} \theta'' + \frac{R \sin 2\theta''}{4e} + 2 \sin\theta'' - \\ &\quad (0.5\theta'' + 0.25 \sin 2\theta'') + \frac{kE}{2G} (0.5\theta'' - 0.25 \sin 2\theta'') \\ C_{12} &= -\frac{R}{e} \cos\theta'' + \frac{R \cos 2\theta''}{4e} + \cos\theta'' - 0.25 \cos 2\theta'' - \\ &\quad \frac{kE}{8G} \cos 2\theta'' + \frac{3R}{4e} - 0.75 + \frac{kE}{8G} \\ C_{13} &= \frac{\theta''}{e} + \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{e} \right) \sin\theta'' \\ C_{21} &= -\frac{R}{e} \cos\theta'' + \frac{R}{4e} \cos 2\theta'' + \cos\theta'' - \\ &\quad 0.25 \cos 2\theta'' - \frac{kE}{4G} \cos 2\theta'' + \frac{3R}{4e} - \frac{3}{4} + \frac{kE}{4G} \\ C_{22} &= \frac{R}{e} (0.5\theta'' - 0.25 \sin 2\theta'') - (0.5\theta'' - \\ &\quad 0.25 \sin 2\theta'') + \frac{kE}{G} (0.5\theta'' + 0.25 \sin 2\theta'') \\ C_{23} &= \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{e} \right) \cos\theta'' + \frac{1}{e} - \frac{1}{R} \\ C_{31} &= \frac{1}{e} \left( \theta'' - \sin\theta'' + \frac{e \sin\theta''}{R} \right) \\ C_{32} &= \frac{1}{e} - \frac{1}{R} - \frac{\cos\theta''}{e} + \frac{\cos\theta''}{R} \\ C_{33} &= \frac{\theta''}{eR} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

其中  $\theta'' = \pi - 2 \arcsin(h/d_2)$

通过坐标变换将局部坐标系  $Ox'y'z'$  下的位移  $(\delta_{N1}, \delta_{S1})$  转移到整体坐标系  $Oxyz$  中

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta''' & -\sin\theta''' & R \cos\theta' \\ \sin\theta''' & \cos\theta''' & -R \sin\theta' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{N1} \\ \delta_{S1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

式中  $\theta''' = 0.5\pi - \theta'$ , 柔性转动副右端面形心  $A$  变化后的坐标值  $A'$  为

$$\begin{bmatrix} x'_A \\ y'_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A - x'_0 \\ y_A - y'_0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中  $x_A = 0.5L$   $y_A = 0$

$$x'_0 = R \cos\theta' \quad y'_0 = -R \sin\theta'$$

柔性转动副的转角、转角误差为

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y'_A}{x'_A}\right) \quad \lambda = \sqrt{x_A'^2 + y_A'^2} - 0.5L$$

### 3 柔性转动副柔度仿真与试验分析

为了检验所建立的柔度矩阵的理论表达式是否正确,给柔性副的各部分尺寸赋值如下:  $d_1 = 24 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 26 \text{ mm}$ ,  $L = 54 \text{ mm}$ ,  $b = 20 \text{ mm}$ ,  $h = 12 \text{ mm}$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\mu = 0.288$ 。

在 Matlab<sup>[8]</sup> 中建立上述理论模型,设定切向力的变化范围为  $(0, 25 \text{ N})$ , 输出所施加的力与转角、转角误差与转角之间的变化关系。按照上述给定的柔性转动副的结构尺寸和材料参数,在 Ansys<sup>[9]</sup> 中建立其三维模型并进行结构线性静力学分析,输出其相对于坐标原点的转动角度和转动误差的仿真结果。

为进一步验证理论计算结果和仿真结果,加工制造了同材料、同尺寸的柔性转动副的实体模型,并按理论计算条件、仿真试验条件完成其加载变形测量试验。图3为试验系统图。该试验台由2支千分表、待测柔性转动副、夹持器虎钳、支撑架和待加载砝码组成。通过夹持器将柔性转动副一端固定,在另一端加载砝码施加垂直方向的作用力,用千分表测量对应点的水平和垂直方向的位移,并由几何关系计算出转角与转动误差。具体为:在柔性副的几何中心建立静坐标系  $Oxyz$ , 以点  $(27, 0, 0)$  为测量点,按线性递增的规律依次从  $0.315 \text{ kg}$  到  $2.515 \text{ kg}$  加载砝码,分12次加载,一千分表的测量值  $\Delta y$  近似为测量点的垂直位移,另一千分表的测量值  $\Delta x$  近似为端部形心  $(33, 0, 0)$  的水平位移值,计算转角  $\theta = \arctan(\Delta y/27 - \Delta x)$ , 并将转角和力的对应值输入到 Matlab 中进行线性插值计算,得出转角  $\theta$  与施加的力之间的关系。

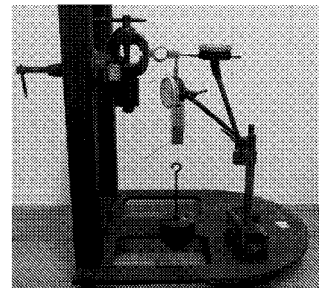


图3 柔性转动副性能测试系统

Fig. 3 Testing system of compliant joint

图4为理论计算结果、仿真结果与试验结果的力-变形曲线。图5为3种方法得出的转动误差-变形曲线(转动误差  $\lambda = \sqrt{(27 - \Delta x)^2 + \Delta y^2} - 27$ )。通过计算图4中各个曲线的斜率并乘以力臂  $(27 \text{ mm})$  得到3种方法的转动刚度,计算图5中各曲线的斜率得到3种方法下的转动误差变化率,结

果如表1所示。

从图4、5与表1中三者分析的结果可以看出,理论建立的模型与仿真的结果比较接近。理论计算

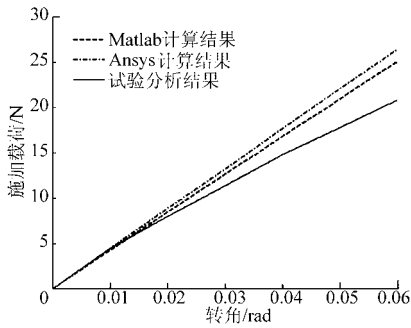


图4 柔性转动副加载力与变形曲线

Fig.4 Curves of force-deformation

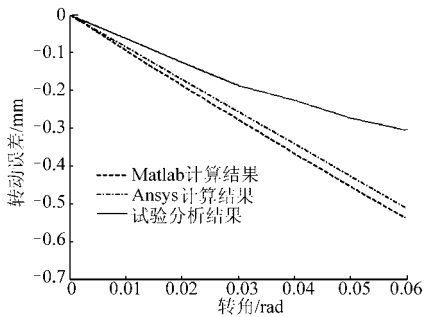


图5 柔性转动副转动误差与变形曲线

Fig.5 Curves of errors-deformation

表1 Matlab、Ansys和试验分析结果比较

Tab.1 Comparison of the three results by Matlab, Ansys and test

参数	Matlab 分析结果	Ansys 分析结果	试验分析 结果
转动刚度变化率/ $N \cdot m \cdot rad^{-1}$	11.25	11.92	9.45
转动误差变化率/ $mm \cdot rad^{-1}$	8.83	8.54	6.33

与仿真的转动刚度相对误差为5.6%,转动误差相对误差为3.4%。由于试验用实体模型受加工精度的影响、试验测试手段的限制,试验结果与理论计算结果、仿真结果有差距,但相差不大,趋势相似。由于仿真的结果更接近理想试验条件,理论建立的模型与仿真的结果比较接近,证明了理论模型的建立是比较正确的。

#### 4 结束语

针对现有的柔性运动副大多只能实现微细变形的缺点,设计了一种新型的柔性转动副,其突出特点是可以实现宏观尺度下的大变形要求。通过理论建模的方法获得了其柔度矩阵的表达式,建立了转动误差模型,对其静态特性有了定性和定量的认识,并且通过Matlab、Ansys软件仿真及实体模型试验进行了验证。

#### 参 考 文 献

- 1 Tanikawa T, Arai T. Development of a micromanipulation system having a two-fingered micro-hand [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1999, 15(1): 152 ~ 162.
- 2 杨丽峰,于梅. 压电式高频振动台:中国,201010182649.1[P]. 2010-10-06.  
Yang Lifeng, Yu Mei. A high-frequency exciter driven by Piezo; China, 201010182649.1 [P]. 2010-10-06. (in Chinese)
- 3 万德安,丁宇斌,谢长生,等. 多维驱动微型振动平台的研制[J]. 宇航计测技术,2001,21(6):39~55.  
Wan Dean, Ding Yubin, Xie Changsheng, et al. The research of multi-dimensional micro-vibration platform [J]. Astronautic Metrology and Measurement, 2001, 21(6): 39 ~ 55. (in Chinese)
- 4 赵然. 四自由度4-RRUR并联微动机器人设计与基础性能研究[D]. 秦皇岛:燕山大学,2010.  
Zhao Ran. The design and fundamental property research of a 4-DOF 4-RRUR parallel micromanipulator [D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2010. (in Chinese)
- 5 杨启志,尹小琴,马履中,等. 数值法建立单向柔性铰链刚度矩阵[J]. 农业机械学报,2005,36(1):104~106.  
Yang Qizhi, Yin Xiaoqin, Ma Lüzhong, et al. The establishment of flexure stiffness matrix by numerical method [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2005, 36(1): 104 ~ 106. (in Chinese)
- 6 杨启志,马履中,尹小琴,等. 全柔性并联机器人支链静刚度矩阵的建立[J]. 中国机械工程,2008(19):1156~1159.  
Yang Qizhi, Ma Lüzhong, Yin Xiaoqin, et al. The establishment of static stiffness matrix of fully flexible parallel robot's branches [J]. China Mechanical Engineering, 2008(19): 1156 ~ 1159. (in Chinese)
- 7 周建方. 材料力学[M]. 北京:机械工业出版社,2002.
- 8 张志涌. 精通MATLAB6.5[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2003
- 9 张洪信,管殿柱. 有限元基础理论与ANSYS11.0应用[M]. 北京:机械工业出版社,2009.

# 考虑安装误差的摆线齿准双曲面齿轮轮齿接触分析\*

王峰 方宗德 李声晋 苏进展

(西北工业大学机电学院, 西安 710072)

**【摘要】** 基于双刀头(two-part cutter head)分体式刀盘,采用面滚式切制方法加工摆线齿准双曲面齿轮,依据其加工展成原理建立了数学模型,并在考虑安装误差的情况下进行了轮齿接触分析(TCA),得出了安装误差对其啮合性能的影响。在满足传动性能要求的情况下,设计了轮坯参数和机床加工参数。以一对摆线齿准双曲面齿轮为例,分析了各个安装误差对其啮合性能的影响。

**关键词:** 摆线齿准双曲面齿轮 端面滚齿 安装误差 轮齿接触分析 啮合性能

**中图分类号:** TH132.421 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2012)09-0213-06

## Tooth Contact Analysis of Epicycloid Hypoid Gear Considering Assembly Misalignment

Wang Feng Fang Zongde Li Shengjin Su Jinzhan

(School of Mechatronics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

### Abstract

Based on two-part cutter head, the mathematical model of epicycloid hypoid gear pair was built through face-hobbing cutting method and generating principle. The relationship between assembly misalignment and meshing behavior was described by the results of tooth contact analysis. In the situation of transmission performance requirements, the parameters of wheel blank and processing parameters were designed. Based on a pair of epicycloid hypoid gears, the influence of each assembly misalignment on the meshing and transmission performance was analyzed.

**Key words** Epicycloid hypoid gears, Face hobbing, Assembly misalignment, Tooth contact analysis, Meshing performance

### 引言

准双曲面齿轮由于具有承载能力高、传动平稳、噪声小、结构紧凑等优点,在汽车后桥上得到越来越多的使用,摆线齿准双曲面齿轮在国内应用较少。摆线齿准双曲面齿轮采用等高齿制,因此在理论上可以将大小轮刀盘切削面做成一样,采用间接展成法加工出完全共轭的轮齿,同时为了克服制造及安装的不可调性,采用相应的方法将大小轮齿面进行修形形成局部共轭接触。相比弧线齿准双曲面齿

轮,摆线齿准双曲面齿轮在轮齿啮合过程中具有更长的啮合线,因此在传动过程具有更好的平稳性及更低的传动噪声;另外,不同于弧线齿准双曲面齿轮采用的间歇分齿加工,摆线齿准双曲面齿轮采用连续分齿且粗切及精切在一个切齿循环中完成,因而具有更高的加工效率<sup>[1]</sup>。

摆线齿准双曲面齿轮凭借其优越的啮合传动性能、高效的切削加工效率以及偏置布局能够有效降低底盘高度等特性,在国内得到越来越广泛的应用。但国内的研究总体还处于起步阶段。

收稿日期: 2011-09-21 修回日期: 2011-11-10

\* 国家自然科学基金资助项目(50875211)

作者简介: 王峰, 博士生, 主要从事齿面设计优化、齿轮动力学研究, E-mail: bewater@163.com

通讯作者: 方宗德, 教授, 博士生导师, 主要从事机械传动与机械系统动力学研究, E-mail: fauto@nwpu.edu.cn

文献[2]给出了克里贝格准双曲面齿轮的数学模型,文献[3]在建立数学模型的基础上分析了齿轮副接触应力,文献[4]研究了基于面铣式(face milling)切制方法的螺旋锥齿轮设计仿真以及接触分析。但关于面滚式(face hobbing)切制方法的分析文献则较少,考虑安装误差的摆线齿准双曲面齿轮齿面接触分析,尚未见文献报道。

本文分析基于双刀头(two-part cutter head)分体式刀盘,采用面滚式切制方法加工摆线齿准双曲面齿轮的基本原理,依据其加工展成原理建立一对摆线齿准双曲面齿轮的数学模型,并在考虑安装误差的情况下进行轮齿接触分析(TCA),得出安装误差对其啮合性能的影响。

### 1 摆线形成原理

摆线齿准双曲面齿轮铣齿加工是按照“假想平面齿轮”(冠轮,也称作平面产形轮)原理进行设计的。为了在滚齿加工过程中形成需求的长幅外摆线(简称摆线),假设端铣刀盘上装有 $z_0$ 组刀齿,则每组刀齿至少有外刀A和内刀I两个刀齿,分别用于加工齿的凹面和凸面。刀盘与冠轮的相对运动可以视为刀盘上一滚筒绕冠轮上基圆作纯滚动。刀盘上的内外刀刃在冠轮的分度平面上形成长幅外摆线齿线。当刀盘转过一组刀齿时,轮坯和产形轮则转过一个齿,加工出齿槽的凹凸两面。

如图1所示,当摆线齿准双曲面齿轮滚齿时,刀盘的旋转运动和工件的旋转运动以一定的传动比配合起来,刀盘刀刃在轮坯上形成长幅外摆线的齿线形状<sup>[5]</sup>,并使轮坯得到一定齿数间的连续分度,该方法称连续分度双面法,又称端面滚齿法。

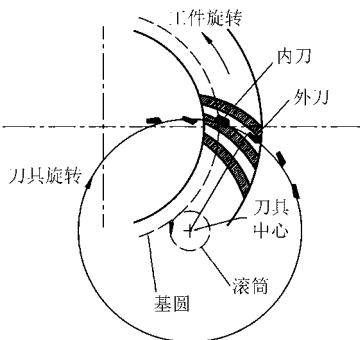


图1 长幅外摆线形成原理示意图  
Fig.1 Formation of cycloid

### 2 轮齿加工原理

#### 2.1 端面滚齿刀方程

按 Cyclo-palloid 方法用多头刀盘加工齿轮,刀盘采用双层结构,由内切刀盘和外切刀盘两部分组

成,内切刀盘上的内切刀用来切削齿轮的凸齿面,外切刀盘上的外切刀用来切削齿轮的凹齿面,外刀片的中心点为 $O_A$ ,内刀片的中心点为 $O_I$ ,两刀盘的回转轴线不重合。左旋刀盘坐标系如图2所示。

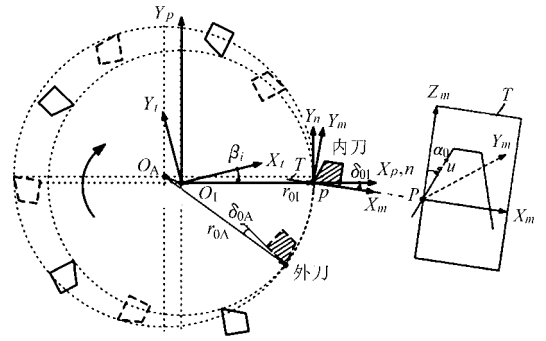


图2 左旋刀盘坐标系

Fig.2 Coordinate systems for left handed dual cutter heads of cyclo-palloid method

展成过程中,内刀与外刀以相同的速度分别绕各自旋转轴运动。在实际应用中,内刀半径 $r_{0I}$ 一般取为刀具名义半径,通过调整外刀半径 $r_{0A}$ 来改变凹面纵向曲率,从而得到理想的齿面接触椭圆。其它的刀具参数包括刀具齿形角 $\alpha_0$ 、刀具偏置角 $\delta_0$ 、刀头组数 $z_0$ 。 $S_m, S_i$ 分别为与切削刃和刀头固连的坐标系, $S_n, S_p$ 为辅助坐标系。刀刃上任意一点P在 $S_i$ 坐标系中矢量方程为

$$r_i(u) = M_{tp} M_{pn} M_{nm} r_m(u) \tag{1}$$

其中

$$r_m(u) = \begin{bmatrix} u \sin \alpha_{0k} \\ 0 \\ u \cos \alpha_{0k} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$M_{nm} = \begin{bmatrix} \cos \delta_{0k} & -\sin \delta_{0k} & 0 & 0 \\ \sin \delta_{0k} & \cos \delta_{0k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$M_{pn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r_{0k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$M_{tp} = \begin{bmatrix} \cos \beta_{ik} & -\sin \beta_{ik} & 0 & 0 \\ \sin \beta_{ik} & \cos \beta_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中  $\beta_{ik}$ ——刀具初始角  $u$ ——刀具参数

变换矩阵中的下标 $k$ 代表I和A,分别表示内刀和外刀。

#### 2.2 假想产形轮

假想产形轮通常用来解释锥齿轮的加工过程,

是由刀刃的运动轨迹形成的虚拟齿轮<sup>[6]</sup>。即在切齿过程中,假设假想平面齿轮与被切齿轮做无间隙啮合,整个齿轮的切削过程如同一对锥齿轮进行啮合的过程,刀盘的切削面与被加工出的轮齿曲面是一对完全共轭的曲面。

图3为产形轮形成坐标系。 $S_d$ 为与产形轮固连的坐标系, $S_b$ 、 $S_c$ 为辅助坐标系。点 $Q$ 是刀倾机构

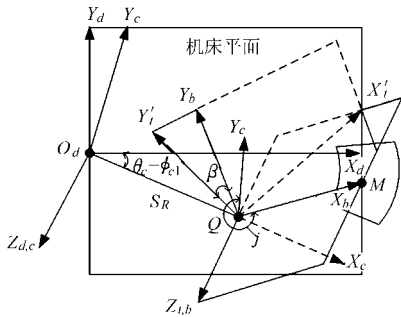


图3 产形轮形成坐标系

Fig.3 Coordinate system between cutter head and imaginary generating gear

在切削平面上的中心点。产形轮方程为

$$r_d(u, \beta, \phi_{c1}) = M_{dc}(\phi_{c1}) M_{cb} M_{bt}(\beta) r_i(u) \quad (6)$$

其中

$$M_{bt}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & E_{xz} \cos\varphi_e \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & E_{xz} \sin\varphi_e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$M_{cb} = \begin{bmatrix} -\sin j & -\cos j & 0 & S_R \\ \cos j & -\sin j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$M_{dc}(\phi_{c1}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_c - \phi_{c1}) & \sin(\theta_c - \phi_{c1}) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_c - \phi_{c1}) & \cos(\theta_c - \phi_{c1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中  $\beta$ ——刀具转角  $E_{xz}$ ——刀具偏心距  
 $\varphi_e$ ——刀具定位角  $S_R$ ——摇台径向距离  
 $j$ ——刀转角  $\theta_c$ ——摇台初始转角  
 $\phi_{c1}$ ——摇台转角  
 $\phi_{c1}$ 与刀具转角的关系为

$$\phi_{c1} = \frac{z_0}{z_p} \beta \quad (10)$$

式中  $z_p$ ——产形轮齿数

### 2.3 准双曲面齿轮齿面方程

在展成过程中,轮坯与产形轮滚切形成摆线齿准双曲面齿轮。图4为齿面展成坐标系, $S_1$ 为与被加工齿轮固连的坐标系, $S_e$ 、 $S_f$ 、 $S_g$ 为辅助坐标系。齿面方程为

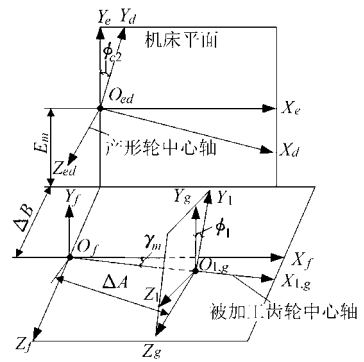


图4 齿面展成坐标系

Fig.4 Coordinate system between generating gear and work gear

$$r_1(u, \beta, \phi_{c2}, \phi_1) = M_{1g}(\phi_1) M_{gf} M_{fe} M_{ed}(\phi_{c2}) r_d(u, \beta) \quad (11)$$

其中

$$M_{ed}(\phi_{c2}) = \begin{bmatrix} \cos\phi_{c2} & \sin\phi_{c2} & 0 & 0 \\ -\sin\phi_{c2} & \cos\phi_{c2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$M_{fe} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E_m \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$M_{gf} = \begin{bmatrix} \cos\gamma_m & 0 & \sin\gamma_m & -\Delta A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\gamma_m & 0 & \cos\gamma_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$M_{1g}(\phi_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & 0 \\ 0 & \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中  $E_m$ ——机床垂直偏置距  
 $\Delta B$ ——滑座进给量  $\phi_{c2}$ ——摇台从动转角  
 $\Delta A$ ——机器中心到后座行程  
 $\gamma_m$ ——机床根锥角  $\phi_1$ ——被加工齿轮转角  
 摇台从动转角  $\phi_{c2}$ 与被加工齿轮转角  $\phi_1$ 之间的关系为

$$\phi_{c2} = \frac{z}{z_p} \phi_1 \quad (16)$$

在产形轮与轮坯的啮合过程中,在  $S_1$  坐标系下有啮合方程

$$f_1(u, \beta, \phi_1) = n_1 v_1^{(m1)} = n_1 \left( \dot{\phi}_1 \frac{\partial r_1}{\partial \phi_1} \right) = 0 \quad (17)$$

式中  $v_1^{(m1)}$ ——切削刃与被加工齿轮在坐标系  $S_1$  中的相对速度

$n_1$ ——齿面单位矢

根据式(1)~(17)可求解出齿面方程。再过齿

轮轴截面做旋转投影面,对齿面进行网格划分,得到齿面仿真模型。

### 3 齿面接触分析

图5为齿轮副啮合坐标系,  $S_1$ 和 $S_2$ 分别是小轮和大轮的动坐标系,  $S_s$ 为轮齿啮合坐标系,  $H$ 为轴向装配距离,  $\Sigma$ 为轴交角,  $V$ 为小轮偏置距。

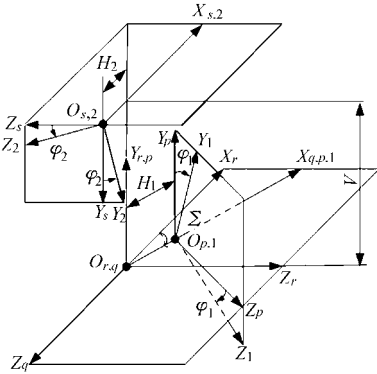


图5 齿轮副啮合坐标系

Fig.5 Coordinate system for assembly of gear pair

在啮合坐标系  $S_s$  中,两啮合齿面  $\Sigma_1$ 、 $\Sigma_2$  的位置矢量、单位法向矢量分别为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_s^{(1)}(u^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \varphi_1) = \\ \quad \mathbf{M}_{sr} \mathbf{M}_{rq} \mathbf{M}_{qp} \mathbf{M}_{p1} \mathbf{r}_1(u^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi_1^{(1)}) \\ \mathbf{r}_s^{(2)}(u^{(2)}, \beta^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \varphi_2) = \\ \quad \mathbf{M}_{s2} \mathbf{r}_2(u^{(2)}, \beta^{(2)}, \phi_1^{(2)}) \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \mathbf{n}_s^{(1)}(u^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \varphi_1) = \\ \quad \mathbf{L}_{sr} \mathbf{L}_{rq} \mathbf{L}_{qp} \mathbf{L}_{p1} \mathbf{n}_1(u^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi_1^{(1)}) \\ \mathbf{n}_s^{(2)}(u^{(2)}, \beta^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \varphi_2) = \\ \quad \mathbf{L}_{s2} \mathbf{n}_2(u^{(2)}, \beta^{(2)}, \phi_1^{(2)}) \end{cases} \quad (19)$$

式中  $u^{(1)}$ 、 $\beta^{(1)}$ 、 $\phi_1^{(1)}$ ——小轮齿面参数

$u^{(2)}$ 、 $\beta^{(2)}$ 、 $\phi_1^{(2)}$ ——大轮齿面参数

$\varphi_1$ ——小轮啮合转角

$\varphi_2$ ——大轮啮合转角

$\mathbf{M}_{ij}$ ——坐标系变换矩阵

$\mathbf{L}_{ij}$ —— $\mathbf{M}_{ij}$ 去掉最后一行和最后一列的旋转矩阵

由图6所示,根据啮合原理,在轮齿啮合过程中,两齿面连续相切接触。因此,在固定坐标系  $S_s$  中,任意时刻两齿面都有公共接触点,且公共接触点处都有公法线,即TCA基本方程组<sup>[7]</sup>为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_s^{(1)}(u^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \varphi_1) = \\ \quad \mathbf{r}_s^{(2)}(u^{(2)}, \beta^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \varphi_2) \\ \mathbf{n}_s^{(1)}(u^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \varphi_1) = \\ \quad \mathbf{n}_s^{(2)}(u^{(2)}, \beta^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \varphi_2) \end{cases} \quad (20)$$

由于  $|\mathbf{n}_s^{(1)}| = |\mathbf{n}_s^{(2)}| = 1$ ,故由方程组(20)可得

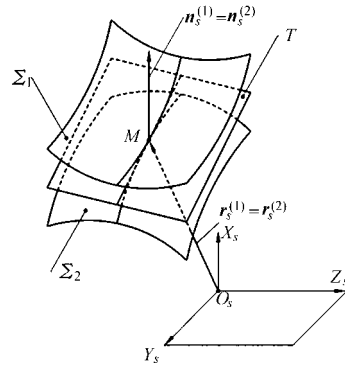


图6 齿面相切接触示意图

Fig.6 Schematic diagram of tooth tangent

到5个方程,加上两齿面加工时的2个啮合方程,共有独立的标量。而未知量有  $u^{(1)}$ 、 $u^{(2)}$ 、 $\beta^{(1)}$ 、 $\beta^{(2)}$ 、 $\phi_1^{(1)}$ 、 $\phi_1^{(2)}$ 、 $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 共8个。此时,可取  $\varphi_1$  为输入量,求解  $u^{(1)}$ 、 $u^{(2)}$ 、 $\beta^{(1)}$ 、 $\beta^{(2)}$ 、 $\phi_1^{(1)}$ 、 $\phi_1^{(2)}$ 、 $\varphi_2$ ,从而得到两齿面的一个接触点。然后以一定步长改变  $\varphi_1$  的值,继续求解,直至求出的接触点超出齿面的有效边界。这些求得的齿面瞬时接触点就构成了齿面接触路径,同时也能得到齿面的传动误差为

$$e(\varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_{20} - \frac{z_1}{z_2}(\varphi_1 - \varphi_{10}) \quad (21)$$

式中  $\varphi_{10}$ 、 $\varphi_{20}$ ——齿面1和齿面2啮合时初始转角  
 $z_1$ 、 $z_2$ ——齿轮1和齿轮2的齿数

当给定齿面的弹性变形量  $d \leq 0.00635 \text{ mm}$ <sup>[8]</sup> 时,在每个接触点处又可以求出瞬时接触椭圆的大小和方向,这一系列的接触椭圆就构成了齿面接触印痕。

### 4 算例

建立分体刀盘面滚式切制法的准双曲面齿轮数学模型,其主要设计及加工参数见表1、2,其它齿轮

表1 准双曲面齿轮轮坯参数

Tab.1 Parameters of wheel blank

参数	小齿轮		大齿轮	
	凸面 (I)	凹面 (A)	凸面 (I)	凹面 (A)
轴交角 $\Sigma/(\circ)$	90		90	
偏置距 $V/\text{mm}$	40		40	
齿轮名义模数 $m/\text{mm}$	6.065		6.065	
齿轮名义半径 $r_m/\text{mm}$	49.692		171.575	
平均螺旋角 $\beta_m/(\circ)$	42.922(左旋)		30(右旋)	
轴向安装距 $H/\text{mm}$	16.570		8.331	
齿轮齿数 $z$	12		49	
节锥角 $\delta/(\circ)$	18.206		71.354	
齿宽 $F/\text{mm}$	65		60	
产形轮齿数 $z_p$			50.033 173	



表 2 齿轮副加工参数  
Tab.2 Processing parameters

参数	小齿轮		大齿轮	
	凸面 (I)	凹面 (A)	凸面 (I)	凹面 (A)
刀具组数 $z_0$	5			
刀尖半径 $r_{0k}/\text{mm}$	135	135.39	135	135.46
刀具齿形角 $\alpha_{0k}/(^{\circ})$	21	-19	19	-21
刀具偏置角 $\delta_{0k}/(^{\circ})$	-6.4	-6.429	6.4	6.4265
刀具初始角 $\beta_{ik}/(^{\circ})$	0	-48	0	48
刀具偏心距 $E_{iz}/\text{mm}$	0	3.872	0	3.311
刀具定位角 $\varphi_{iz}/(^{\circ})$	0	160.29	0	-160.90
刀转角 $j/(^{\circ})$	20.5097		159.4903	
摇台径向距离 $S_R/\text{mm}$	172.038		172.038	
摇台初始角 $\theta_c/(^{\circ})$	56.9829		-44.0611	
机床垂直偏距 $E_m/\text{mm}$	35.697		4.115	
机床中心到后座行程 $\Delta A/\text{mm}$	15.728		-10.982	
滑座进给量 $\Delta B/\text{mm}$	-3.034		8.526	
机床根锥角 $\gamma_m/(^{\circ})$	18.2058		71.3535	

基本参数可参考文献[9]。

仿真得小轮三维模型如图 7 所示,大轮三维模型如图 8 所示,齿轮三维啮合模型如图 9 所示。

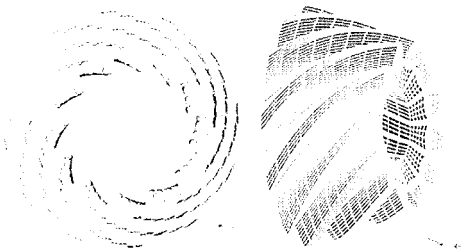


图 7 小轮三维模型  
Fig.7 3-D model for pinion

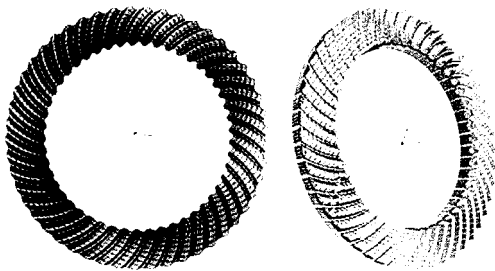


图 8 大轮三维模型  
Fig.8 3-D model for gear

根据 Litvin F L 的研究<sup>[7,10-11]</sup>,对称抛物线型的传动误差曲线能够有效吸收弧齿锥齿轮传动过程中的线性误差,从而降低传动过程中的振动与噪声。通过局部综合法<sup>[12]</sup>调整切入摇台角和内、外刀盘的回转中心偏距等设计加工参数,可以得到理想的接

触椭圆和传动误差曲线。本例中的摆线齿准双曲面齿轮副 TCA 仿真结果如图 10 所示,齿面接触印痕处于齿面中部,传动误差呈对称特性,能够满足设计所需的啮合传动性能。

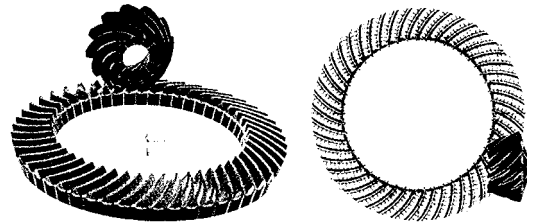


图 9 齿轮副啮合三维模型  
Fig.9 3-D models for assembly of gear pair

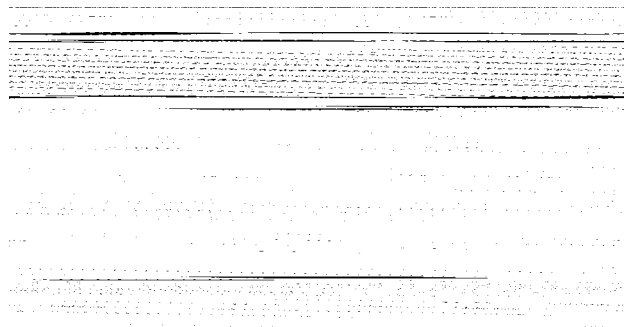


图 10 轮齿接触分析结果

Fig.10 Results of TCA

(a) 大轮凸面 (b) 大轮凹面

### 5 考虑安装误差的啮合性能

在工程实际应用中,由于加工误差、安装误差、支撑变形等,准双曲面齿轮副的啮合位置不可能达到理想状态,总会存在一定的误差。这种误差会影响齿轮啮合性能,导致齿面接触不良,振动,传动平稳性降低。而安装误差又是影响准双曲面齿轮啮合性能的关键因素。分别选取轴交角误差、轴向误差和中心偏置距误差,研究安装误差对啮合性能的影响。

图 11 是轴交角误差  $\Delta\Sigma = -0.05^{\circ}$  时的接触印痕和传动误差曲线。

图 12 是轴向安装误差  $\Delta H = -0.1 \text{ mm}$  时的接

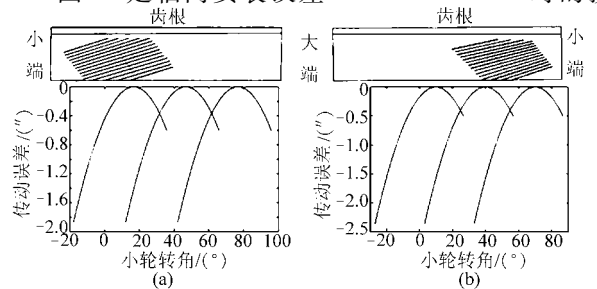


图 11 考虑轴交角误差的接触分析结果

Fig.11 Results with shaft angle misalignment

(a) 大轮凸面 (b) 大轮凹面

触印痕和传动误差曲线。

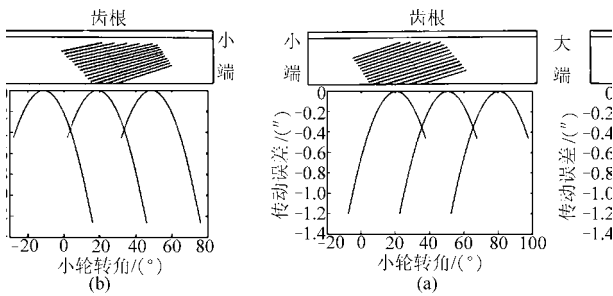


图 12 考虑轴向误差的接触分析结果

Fig. 12 Results with axial setting misalignment

(a) 大轮凸面 (b) 大轮凹面

图 13 是中心偏置距安装误差  $\Delta V = 0.1 \text{ mm}$  时的接触印痕和传动误差曲线。

图 11 ~ 13 表明,安装误差为正值时,接触印痕偏向大轮大端,负值时接触印痕偏向大轮小端。且轴交角安装误差对其啮合性能(接触印痕和传动误差)的影响大于其他安装误差项对啮合性能的影响,但与一般直齿锥齿轮相比摆线齿准双曲面齿轮啮合性能对安装误差敏感性较低。由此可见,摆线齿准双曲面齿轮对安装误差起到了较好的吸收作用。

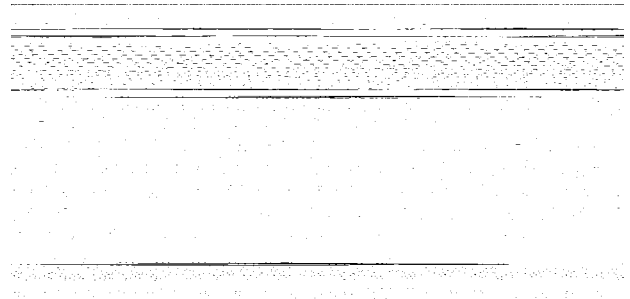


图 13 考虑中心偏置距误差的接触分析结果

Fig. 13 Results with offset misalignment

(a) 大轮凸面 (b) 大轮凹面

## 6 结论

(1) 通过对面滚式切制法的分体式刀盘、成型加工原理和参数的研究,准确地建立了摆线齿准双曲面大小轮的数学模型。

(2) 提出考虑安装误差的摆线齿准双曲面齿轮齿面接触分析,通过调整外刀半径来改变凹面纵向曲率,从而得到理想的接触椭圆。

(3) 摆线齿准双曲面齿轮对安装误差敏感性较低,可以通过控制安装误差,从而有效改善啮合轨迹位置和传动质量。

## 参 考 文 献

- 禹文涛. 摆线齿锥齿轮全数控加工方法及软件实现[D]. 重庆:重庆理工大学,2009.
- Fong Z H. Mathematical model of universal hypoid generator with supplemental kinematic flank correction motions [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1993, 122(1):136 ~ 141.
- Vimercati M. Mathematical model for tooth surfaces representation of face-hobbed hypoid gears and its application to contact analysis and stress calculation [J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(6):668 ~ 690.
- Litvin F L, Alfonso Fuentes, Qi Fan, et al. Computerized design, simulation of meshing, and contact and stress analysis of face-milled format generated spiral bevel gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(5):441 ~ 459.
- Zhao X. Computerized investigation of straight and face-hobbed spiral bevel gears [D]. Chicago: University of Illinois at Chicago, 1995.
- Lin C Y, Tsay C B, et al. Computer-aided manufacturing of spiral bevel and hypoid gears with minimum surface-deviation [J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33(6):785 ~ 803.
- Litvin F L, Gear geometry and applied theory [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994:160 ~ 257.
- 方宗德,郭琳琳,苏进展,等. 基于齿面印痕控制的弧齿锥齿轮公差优化设计[J]. 农业机械学报,2011,42(7):223 ~ 228. Fang Zongde, Guo Linlin, Su Jinzhan, et al. Optimal design of tolerance for spiral bevel gears by controlling contact path [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(7):223 ~ 228. (in Chinese)
- 董学朱. 摆线齿锥齿轮及准双曲面齿轮设计和制造[M]. 北京:机械工业出版社,2002.
- Litvin F L, Vecchiato D, Gurovich E, et al. Computerized developments in design, generation, simulation of meshing, and stress analysis of gear drives [J]. Meccanica, 2005, 40(3):291 ~ 324.
- Litvin F L, Vecchiato D, Yukishima K, et al. Reduction of noise of loaded and unloaded misaligned gear drives [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(41 ~ 43):5 523 ~ 5 536.
- Litvin F L. Local synthesis and tooth contact analysis of face-milled spiral bevel gears [R]. NASA, CR4342, 1990.