

DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.09.009

# 离心风机叶轮三维反问题气动优化设计\*

杨魏<sup>1</sup> 王宏<sup>2</sup> 吴玉林<sup>3</sup>

(1. 中国农业大学水利与土木工程学院, 北京 100083; 2. 清华大学核能技术与新能源技术研究院, 北京 100084;  
3. 清华大学热能工程系, 北京 100084)

**【摘要】** 基于三维反问题设计方法和 CFD 技术, 结合试验设计方法和模拟退火优化算法, 以轴面流道形状参数和叶片形状参数为设计变量, 以叶轮效率为优化目标, 建立了离心风机叶轮三维反问题气动优化设计方法。叶片形状通过三维反问题设计方法由叶轮的环量分布参数表达。运用该方法进行了离心风机叶轮的优化设计, 叶轮效率提高了 3.3%。根据建立的优化设计变量和叶轮效率之间的响应面函数关系式, 分析了不同轴面流道形状参数和环量分布参数及参数间交互效应对叶轮效率的影响。结果表明: 相对于轮盘处轴面流道轮盖处型线和环量分布形式, 轴面流道叶片进口边倾斜角对叶轮效率影响更为显著。

**关键词:** 离心风机 叶轮 反问题设计 计算流体力学

**中图分类号:** TH432.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2012)09-0043-06

## Aerodynamic Optimization Design of Centrifugal Fan Impeller Based on Three-dimensional Inverse Design Method

Yang Wei<sup>1</sup> Wang Hong<sup>2</sup> Wu Yulin<sup>3</sup>

(1. College of Water Resources and Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China  
2. Institute of Nuclear and New Energy Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China  
3. Department of Thermal Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

### Abstract

An optimization design method based on three-dimensional inverse design method and CFD was developed by combining design of experimental method, response surface method and simulated annealing optimization calculation. The shape parameters of meridional channel and blade were taken as optimization design parameters, and the impeller efficiency was setting as the optimization object. The shape parameters of the blade were expressed by velocity circulation distribution parameters through three-dimensional inverse design method. The optimization method was applied to a centrifugal fan impeller with the efficiency improved by 3.3%. The effects of the meridional channel shape parameters, circulation parameters and their interaction effects on the impeller efficiency were analyzed according to the constructed response surface between the design parameters and the impeller efficiency. It is shown that the lean angle of the blade leading edge on meridional channel played an important role on the impeller efficiency. Compared with the hub, the shape curve and the circulation distribution shape on the shroud have more influences on the efficiency.

**Key words** Centrifugal fan, Impeller, Inverse design, Computational fluid dynamics

### 引言

离心式叶轮机械的设计任务在很多时候仍然是

一种反复试验的过程, 根据已有的经验给定一种设计, 然后评价这种设计的效果, 如不满意再进行设计修改。由于离心式叶轮内部流动的复杂性, 这个过

收稿日期: 2012-03-31 修回日期: 2012-04-23

\* 国家自然科学基金资助项目(51139007)和中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(15051105)

作者简介: 杨魏, 讲师, 主要从事流体机械优化设计和复杂流动分析计算研究, E-mail: wyang@cau.edu.cn

程耗时耗力,最终的设计结果很大程度上取决于设计者的经验。随着计算机硬件技术和应用数学理论的发展,CFD 技术应用越来越广泛,成为离心式叶轮机械设计的有力工具<sup>[1-2]</sup>。然而,决定叶轮形状的几何参数很多,各个参数对性能的影响并不清楚,而且参数之间相互影响,因此结合三维流场计算和外部优化方法的叶轮优化设计往往需要进行大量的流场数值计算,使该方法缺乏实用性。

相比于以经验为指导的传统设计方法,反问题设计方法更具优势<sup>[3-6]</sup>。它可以根据设计者给定的流场要求计算叶片形状。与上述叶片设计方法中通过叶片几何参数控制叶片形状不同,反问题设计方法通过给定流场条件控制叶片形状,设计参数更少,同时给定的流场参数对叶轮的性能有直接影响<sup>[7]</sup>,便于对叶轮性能的控制。例如,通过给定的速度环量分布,可以抑制二次流和空化等现象<sup>[8-9]</sup>,提高叶轮的能量性能和空化性能。因此,基于反问题设计方法的叶轮优化设计能够有效减少计算量,获得满意的优化设计结果。

本文以三维无粘反问题设计方法<sup>[10]</sup>和 CFD 技术为基础,结合正交试验设计方法、响应面方法和模拟退火优化算法,建立离心式风机叶轮三维优化设计方法,对风机叶轮轴面流道形状和叶片形状进行联合优化,并进行实例研究,验证方法的有效性。

## 1 优化设计方法

### 1.1 反问题设计方法

在反问题设计方法中流场计算和叶片形状计算迭代进行<sup>[11-12]</sup>,在获得叶片形状的同时可以得到其对应的流场计算结果。本文采用三维定常可压缩无粘反问题设计方法<sup>[10]</sup>,该方法中将速度场分解为周向平均速度和周期速度进行求解。周向平均速度满足流函数方程

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\rho_i}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_i}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial C}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1)$$

其中

$$C = r \bar{V}_u$$

式中  $r$ ——径向坐标

$z$ ——轴向坐标

$\rho_i$ ——参考密度

$\bar{\rho}$ ——周向平均密度

$\Psi$ ——流函数

$C$ ——周向平均的速度环量

$f$ ——叶片包角

$\bar{V}_u$ ——周向平均的圆周速度分量

周期速度满足势函数方程

$$\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \frac{\partial \ln(\bar{\rho}/\rho_i)}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \frac{\partial \ln(\bar{\rho}/\rho_i)}{\partial r} - \frac{m^2 B^2}{r^2} \Phi_m = \frac{e^{-imBf(r,z)}}{imB} \left( \nabla^2 C + \frac{\partial C}{\partial r} \frac{\partial \ln(\bar{\rho}/\rho_i)}{\partial r} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial \ln(\bar{\rho}/\rho_i)}{\partial z} \right) - e^{-imBf(r,z)} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (2)$$

式中  $m$ ——傅里叶展开的项数

$\Phi_m$ ——速度势函数

$B$ ——叶片数  $i$ ——虚数单位

密度根据理想气体等熵关系式进行计算,即

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_i} = \left[ 1 + \frac{\omega^2 r^2 - (\mathbf{W} \cdot \mathbf{W})}{2C_p T_i} \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (3)$$

式中  $\omega$ ——旋转角速度

$\mathbf{W}$ ——相对速度矢量

$C_p$ ——定压比热容

$T_i$ ——参考温度  $\gamma$ ——绝热系数

叶片形状由速度在叶片表面满足滑移条件进行计算,即

$$(\bar{v}_z + v_{zbl}) \frac{\partial f}{\partial z} + (\bar{v}_r + v_{rbl}) \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{C}{r^2} + \frac{v_{\theta bl}}{r} - \omega \quad (4)$$

式中  $\bar{v}_z$ ——周向平均的轴向速度

$\bar{v}_r$ ——周向平均的径向速度

$v_{zbl}, v_{rbl}, v_{\theta bl}$ ——轴向、径向和周向周期速度分量

式(1)~(4)构成本文反问题设计方法的求解方程组,给定轴面流道形状及其上的环量分布、厚度分布和叶轮的相关参数即可进行叶片形状的设计计算。

### 1.2 CFD 计算方法

采用商业软件 CFX 进行叶轮三维定常湍流流动的数值模拟。选择 SST  $k-\omega$  湍流模型,对风机叶轮的单流道模型进行数值模拟计算。采用分块结构化网格划分技术进行计算域网格的划分,如图 1 所示。

叶片周围采用 O 型网格加密;叶片前缘和后缘采用 H 型网格加密;根据湍流模型的  $y^+$  要求确定壁面附近网格尺寸的大小。边界条件设置如下:进口给定总压和总温,出口给定质量流量。在旋转周期边界上给定周期性条件。根据 CFD 计算结果可对叶轮流场及其性能进行评价,为寻优计算提供依据。

### 1.3 优化方法

#### 1.3.1 轴面流道形状参数化

轴面流道的轮盘和轮盖型线由三阶 Bezier 曲线

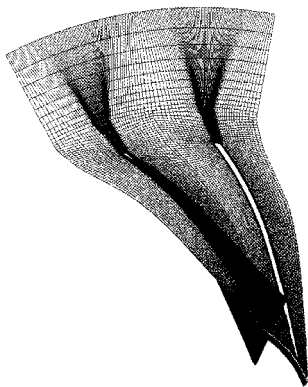


图 1 叶轮 50% 翼展截面网格示意图

Fig. 1 Mesh on 50% spanwise section surface of the impeller

进行参数化,其中进口和出口型线的切线分别平行于轴向和径向,根据 Bezier 曲线性质,轮盘和轮盖型线的 Bezier 曲线参数化各只需 1 个参数确定,即轮盘和轮盖型线的曲率半径  $R_h$  和  $R_s$ ,如图 2 所示。另外,考察叶轮的轴向长度  $A_l$  和进口斜角  $L_a$  的变化,如图 2 所示。

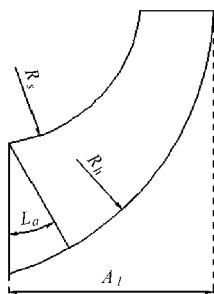


图 2 轴面流道形状参数化

Fig. 2 Parameterized of the meridional channel

### 1.3.2 叶片形状参数化

叶片形状的参数化通过反问题设计方法由环量分布的参数化实现。本文直接给定整个子午流道的环量分布,其分布规律与子午流道的形状有关。同时环量分布满足在叶轮进口边的冲角条件和出口边的库塔条件。具体的环量分布形式为<sup>[13]</sup>

$$C = c_1(R)(a(R)\sin(2\beta) + 2\cos(2\beta))e^{-a(R)\beta} + c_2(R) \quad (5)$$

其中  $R$  和  $\beta$  如图 3 所示。指数  $a(R)$  从轮盘到轮盖线性变化,通过改变轮盘和轮盖处的  $a(R)$  值可以改变环量分布规律;常数  $c_1$  和  $c_2$  由环量在进口边和出口边的取值确定。上述环量给定方法只有 2 个参数,即轮盘和轮盖处的  $a(R)$  值  $a_h(R)$  和  $a_s(R)$ 。

因此,风机叶轮的优化设计变量共 6 个 ( $A_l, L_a, R_h, R_s, a_h(R), a_s(R)$ ),其中轴面流道形状参数 4 个,环量分布参数 2 个。

### 1.3.3 优化步骤

以叶轮效率为优化目标,叶轮效率计算公式为

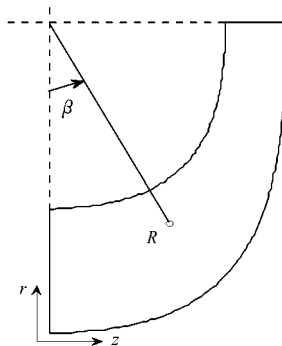


图 3 离心叶轮轴面流道示意图

Fig. 3 Meridional channel of a centrifugal impeller

$$\eta = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{\ln \frac{T_2}{T_1}} \times 100\% \quad (6)$$

式中  $\eta$ ——叶轮效率

$p_2, p_1$ ——叶轮进、出口压力

$T_2, T_1$ ——叶轮进、出口温度

采用正交试验设计进行参数的组合设计。为了在获得优化设计结果的同时得到不同参数及参数组合对叶轮效率的影响大小,采用响应面方法建立设计参数与性能参数的响应面函数关系式,考虑参数之间的交互效应,忽略二次项,选择的响应面函数的形式为

$$\eta = \alpha_0 + \sum_{i=0}^n \alpha_i X_i + \sum_{i \neq k}^n \alpha_{i,k} X_i X_k \quad (7)$$

式中  $X$ ——优化设计变量

$\alpha$ ——待求系数  $n$ ——变量个数

根据 CFD 计算结果,由最小二乘法确定式(7)中的待求系数  $\alpha$  即可获得设计参数与性能参数的响应面函数关系。响应面函数存在误差,通常使用相关系数  $E^2$  和  $E_a^2$  进行其准确性的评估,计算公式为

$$E^2 = \frac{S_R}{S_T} = 1 - \frac{S_E}{S_T} \quad (8)$$

$$E_a^2 = 1 - \frac{s-1}{s-s_p}(1-E^2) \quad (9)$$

式中  $S_E$ ——残差平方和  $S_R$ ——回归平方和  
 $S_T$ ——总平方和  $s$ ——样本数  
 $s_p$ ——多项式系数个数

$E^2$  和  $E_a^2$  的值越接近 1 表示响应面模型拟合样本数据越精确。

离心式风机叶轮的优化步骤如下:首先采用正交试验设计方法建立风机叶轮参数的样本空间;然后采用三维反问题设计方法对样本空间的试验点进行设计计算,得到风机叶轮的设计集合;采用 CFD 技术对得到的风机叶轮模型进行效率计算;根据

CFD 计算结果建立风机叶轮效率与设计参数的响应面函数关系;采用模拟退火算法对得到的响应面函数关系式进行全局最优搜索,得到近似最优解;对优化得到的近似最优解进行 CFD 计算校核,若确实为最优则输出结果;若不是最优,则将本次结算结果加入样本空间,更新响应面函数关系式,重新采用模拟退火算法进行全局最优搜索,直到获得最优结果。具体的优化流程如图 4 所示。

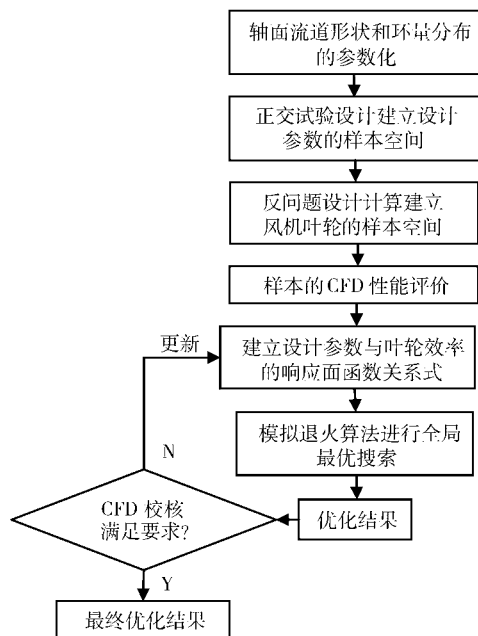


图 4 优化设计计算流程图

Fig. 4 Procedures of the optimization design process

## 2 优化设计实例

为了验证上述离心式风机叶轮优化设计方法,将该方法应用到某一离心风机叶轮的优化设计中,其主要性能参数及要求如下:流量 96 kg/s、转速 4 000 r/min、叶轮进出口静压升大于等于 200 kPa、输入功率大于等于 4 500 kW。轴面流道的基本尺寸根据叶轮机械设计的一元理论确定,如表 1 所示,表中  $D_2$  为叶轮直径,  $D_h$  为轮盘直径,  $D_s$  为轮盖直径,  $b_2$  为叶轮出口宽度,  $B$  为叶片数,上述参数在优化过程中保持不变。优化设计变量 ( $A_l$ ,  $L_a$ ,  $R_h$ ,  $R_s$ ,  $a_h(R)$ ,  $a_s(R)$ ) 的取值范围如表 2 所示。

根据优化设计步骤,首先采用正交试验设计进行试验工况点的选择,建立参数样本空间。考虑参数的交互作用,因此选用正交表  $L_{32}(2^6)$ 。将各参数

表 1 风机叶轮的基本尺寸

Tab. 1 Basic dimensions of the fan impeller

参数	$D_2/m$	$D_h/m$	$D_s/m$	$b_2/m$	$B$
数值	1	0.25	0.55	0.075	20

表 2 优化设计变量取值范围

Tab. 2 Value range of optimization design parameters

轴面流道形状				环量分布	
$A_l/m$	$L_a/(^\circ)$	$R_h/m$	$R_s/m$	$a_h(R)$	$a_s(R)$
0.20 ~ 0.29	10 ~ 40	0.5 ~ 0.7	0.4 ~ 0.5	-2 ~ -1	0 ~ 1

的取值范围进行编码变换,统一换算到  $[-1, 1]$ , -1 对应参数取值的下限,1 对应参数选择的上限。然后对样本空间中 32 组参数采用三维反问题设计方法进行设计计算,建立风机叶轮的样本空间。对得到的叶轮样本空间采用上述 CFD 方法进行性能评价,根据式 (6) 得到目标函数效率的计算结果。基于计算结果,根据式 (7) 采用最小二乘法确定相关系数,建立叶轮效率与设计参数之间的响应面函数关系式。

根据计算结果,由式 (8) 和式 (9) 得到响应面函数关系式的相关系数分别为 0.985 和 0.954,表明所建立的响应面函数关系式是有效的。采用模拟退火算法对该响应面函数关系式进行全局搜索,得到最优计算结果如表 3 所示,对应的最优参数组合 ( $A_l$ ,  $L_a$ ,  $R_h$ ,  $R_s$ ,  $a_h(R)$ ,  $a_s(R)$ ) 的值为 (0.29, 10, 0.7, 0.5, -2, 1),对应的轴面流道形状和环量分布如图 5 所示,优化后的叶轮三维几何形状如图 6 所示。从计算结果来看,最优叶轮的效率显著提高,相对于参考叶轮效率提高了 3.3%,如表 3 所示。从

表 3 离心风机叶轮优化设计结果

Tab. 3 Optimization design results of the centrifugal fan impeller

叶轮类别	静压升 $p_s/kPa$	输入功率 $N/kW$	效率 $\eta/\%$
参考叶轮	250.4	4 627	80.7
优化叶轮	212.5	3 837	84.0
性能要求	$\geq 200$	$\leq 4 500$	$\geq 80$

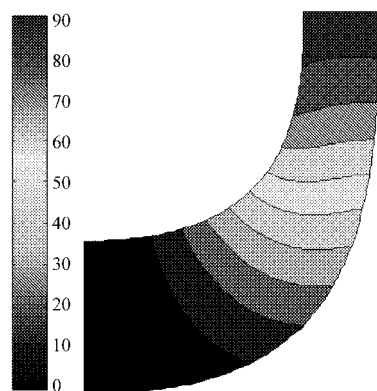


图 5 优化轴面流道形状和环量分布

Fig. 5 Optimized meridional channel and velocity circulation distributions

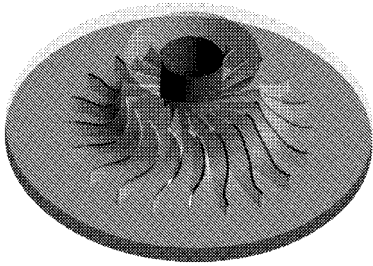


图 6 优化的叶轮三维几何模型

Fig. 6 Optimized 3D geometry model of the impeller

内部流动的情况来看,优化叶轮叶道中的流动较参考叶轮更加顺畅,如图 7 所示。

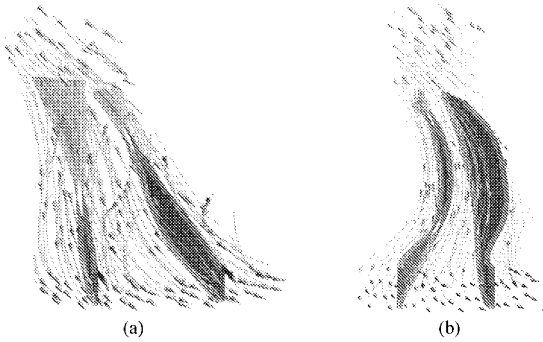


图 7 叶轮叶道中的流线图

Fig. 7 Streamlines in blade channel of the impeller

(a) 参考叶轮 (b) 优化叶轮

为了进一步分析轴面流道形状和环量分布参数对风机性能的影响,基于得到的效率与设计参数的响应面函数关系式,采用试验设计方法进行参数主效应和参数间交互效应的计算,以分析不同设计参数对风机叶轮效率的影响。

图 8 为设计参数对叶轮效率的主效应,其中参数水平从“1”到“2”表示参数取值从小到大。从影响风机叶轮效率的各个参数的主效应来看,叶轮叶片进口倾斜角  $L_a$  的影响最大;其次是轮盘处的环量分布参数  $a_s(R)$ ;再次是叶片轴面流道的轴向长度  $A_l$  和轮盘处的环量分布参数  $a_h(R)$ ;轮盖及轮盘进

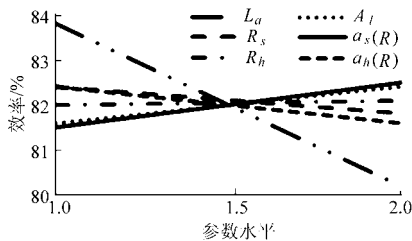


图 8 设计参数对风机叶轮效率的主效应  
Fig. 8 Main effects on the impeller efficiency from the design parameters

口处的曲率半径  $R_s$  及  $R_h$  影响最小。

从设计参数的交互效应结果来看,如图 9(双向箭头线越粗交互效应越大)所示,与轮盖进口处曲率半径  $R_s$  相关的交互效应最多,为 5 种;其次是与轴面长度  $A_l$  和轮盘进口处曲率半径  $R_h$  相关的交互效应,为 4 种;交互效应为 3 种的分别是与轮盖处环量分布参数  $a_s(R)$  和叶片进口边倾斜角  $L_a$  相关的交互效应;与轮盖处环量分布参数  $a_h(R)$  相关的交互效应最少,为 1 种。综合各参数对风机叶轮多变效率的主效应和交互效应,可以发现叶片进口倾斜角  $L_a$  为最重要的参数;其次是轮盖处的曲率半径  $R_s$ 、轮盖处环量分布参数  $a_s(R)$  和叶片子午流道的轴向长度  $A_l$ ;影响相对较小的是轮盘处的环量分布参数  $a_h(R)$  和轮盘进口处的曲率  $R_h$ 。

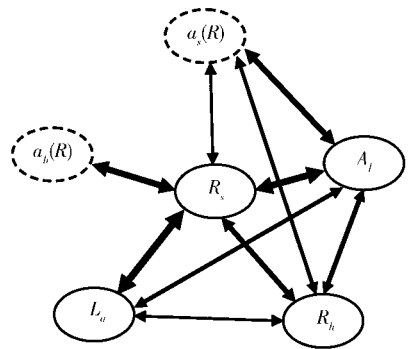


图 9 各参数交互效应示意图

Fig. 9 Interaction effects between design parameters on the impeller efficiency

### 3 结论

(1) 基于三维反问题设计方法和 CFD 技术,结合正交试验设计方法、响应面方法和模拟退火优化算法,以轴面流道形状参数和环量分布参数为优化设计变量,以叶轮效率为优化目标,建立了离心式风机叶轮三维气动优化设计方法。

(2) 应用上述方法进行了某离心风机叶轮的优化设计,优化后叶轮效率显著提高,同时优化设计变量少,优化计算成本低,可实现在设计阶段对叶轮最终性能的有效控制。

(3) 根据优化设计结果分析了不同轴面流道形状参数和环量分布参数及参数间交互效应对叶轮效率的影响:轴面流道叶轮叶片进口边倾斜角和轮盖型线的影响最为显著;轴面流道轮盘处的型线及环量分布形式影响较小。

### 参 考 文 献

1 刘文龙,郭加宏,陈红勋. CFD 在双吸式离心泵优化设计中的应用[J]. 工程热物理学报, 2007, 28(3): 421 ~ 423.  
Liu Wenlong, Guo Jiahong, Chen Hongxun. Application of CFD in optimization design of the double-suction centrifugal pump

- [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2007, 28(3): 421 ~ 423. (in Chinese)
- 2 齐学义,孔源,田亚斌,等. 基于 CFD 技术的超低比转速离心泵叶轮的优化设计[J]. 兰州理工大学学报,2010,36(4): 52 ~ 55.  
Qi Xueyi, Kong Yuan, Tian Yabin, et al. Optimization design of impeller for centrifugal pumps with super-low specific-speed by means of CFD technology [J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2010, 36(4): 52 ~ 55. (in Chinese)
- 3 李凤超,樊红刚,陈乃祥. 水泵水轮机双向流动控制优化设计[J]. 水力发电学报, 2010, 29(1): 223 ~ 228.  
Li Fengchao, Fan Honggang, Chen Naixiang. Optimum design of pump-turbine for bidirectional flow control [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2010, 29(1):223 ~ 228. (in Chinese)
- 4 Zangeneh M, Daneshkhan K. A fast 3d inverse design based multi objective optimization strategy for design of pumps [C] // Proceedings of the ASME 2009 Fluids Engineering Division Summer Meeting. Colorado, 2009.
- 5 杨魏,王福军,王宏. 离心风机叶片三维反问题优化设计[J]. 农业机械学报,2012,43(8):105 ~ 109.  
Yang Wei, Wang Fujun, Wang Hong. Aerodynamic optimization design of centrifugal fan blades based on 3-D inverse design method [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012,43(8):105 ~ 109. (in Chinese)
- 6 Bonaiuti D, Zangeneh M. On the coupling of inverse design and optimization techniques for the multi-objective, multipoint design of turbomachinery blades [J]. ASME Journal of Turbomachinery, 2009, 131(2): 1 014 ~ 1 029.
- 7 Bonaiuti D, Zangeneh M, Aartojarvi R, et al. Parametric design of a water-jet pump by means of inverse design, CFD calculations and experimental analyses [J]. ASME Journal of Fluids Engineering, 2010, 132(3): 031104-1 ~ 15.
- 8 Okamoto H, Goto A. Suppression of cavitation in a Francis turbine runner by application of 3D inverse design method [C] // Proceedings of FEDSM02: The 2002 Joint US ASME-European Fluids Engineering Summer Conference. Montreal, 2002.
- 9 Zangeneh M, Goto A, Harada H. On the design criteria for suppression of secondary flows in centrifugal and mixed flow impellers [J]. ASME Journal of Turbomachinery, 1998, 120(4): 723 ~ 735.
- 10 Zangeneh M. A compressible 3D design method for radial and mixed flow turbomachinery blades [J]. International Journal of Numerical Methods in Fluids, 1991, 13(5): 599 ~ 624.
- 11 邴浩,曹树良,谭磊. 混流泵叶轮设计正反问题迭代方法[J]. 排灌机械工程学报,2011,29(4):277 ~ 281,302.  
Bing Hao, Cao Shuliang, Tan Lei. Iteration method of direct inverse problem of mixed-flow pump impeller design [J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2011, 29(4):277 ~ 281,302. (in Chinese)
- 12 谭磊,曹树良,桂绍波,等. 离心泵叶轮正反问题迭代设计方法[J]. 农业机械学报,2010,41(7):30 ~ 35,10.  
Tan Lei, Cao Shuliang, Gui Shaobo, et al. Centrifugal pump impeller design by using direct inverse problem iteration [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(7):30 ~ 35,10. (in Chinese)
- 13 Ghaly W S. A parametric study of radial turbomachinery blade design in three-dimensional subsonic flow [J]. ASME Journal of Turbomachinery, 1990, 112(3): 338 ~ 345.

(上接第 52 页)

- 10 曹卫东,张晓娣,高一,等. 径向回流平衡孔低比转数离心泵空化性能研究[J]. 农业机械学报,2012,43(1):37 ~ 41.  
Cao Weidong, Zhang Xiaodi, Gao Yi, et al. Cavitation performance of the low specific-speed centrifugal pump with radial reflux balance hole [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(1): 37 ~ 41. (in Chinese)
- 11 王勇,刘厚林,袁寿其,等. 离心泵内部空化特性的 CFD 模拟[J]. 排灌机械工程学报,2011,29(2):99 ~ 103.  
Wang Yong, Liu Houlin, Yuan Shouqi, et al. CFD simulation on cavitation characteristics in centrifugal pump [J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2011, 29(2): 99 ~ 103. (in Chinese)
- 12 Kubota A, Kato H, Yamaguchi H. A new modeling of cavitating flows; a numerical study of unsteady cavitation on a hydrofoil section [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1992, 240: 59 ~ 96.
- 13 Merkle C L, Feng J, Peo B. Computational modeling of the dynamics of sheet cavitation [C] // Proceedings of 3rd International Symposium on Cavitation, Grenoble, France: 1998.
- 14 Kunz R F, Boger D A, Stinebring D R, et al. A preconditioned Navier - Stokes method for two-phase flows with application to cavitation prediction [J]. Computers & Fluids, 2000, 29(8): 849 ~ 875.
- 15 Singhal A K, Athavale M M, Li H, et al. Mathematical basis and validation of the full cavitation model [J]. ASME Journal of Fluids Engineering, 2002, 124(3): 617 ~ 624.
- 16 Coutier D O, Fortes P R, Reboud J L. Evaluation of the turbulence model influence on the numerical simulations of unsteady cavitation [J]. ASME Journal of Fluids Engineering, 2003, 125(1): 38 ~ 45.
- 17 Johansen S T, Wu J, Shyy W. Filter-based unsteady RANS computations [J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2004, 25(1): 10 ~ 21.