

DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.08.038

# 空间全柔性并联机构动力学分析<sup>\*</sup>

贾晓辉<sup>1</sup> 刘今越<sup>1</sup> 田延岭<sup>2</sup>

(1. 河北工业大学机械工程学院, 天津 300130; 2. 天津大学机械工程学院, 天津 300072)

**【摘要】** 针对精密柔性机构多自由度高精度运动的需求,以传统 Delta 并联机构为基础,设计了一种采用压电陶瓷驱动方式的空间柔性并联机构,基于伪刚体模型进行运动学分析。将从动臂质量分布作简化处理并主要考虑结构中柔性铰链的弹性应变能,利用拉格朗日方程建立动力学弹性振动微分方程,得到其固有频率表达式,并结合实际结构参数得到了相应的理论结果。3个主要运动方向的三阶固有频率的试验结果和理论分析结果误差分别为:12.71%、12.14%和14.90%,有限元仿真结果和试验结果误差分别为:6.20%、5.66%和10.28%,表明理论分析时所作的简化处理合理,得到的动力学数学模型有效、可信。

**关键词:** 柔性并联机构 动力学 固有频率 有限元仿真

**中图分类号:** TH113 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2012)08-0210-05

## Dynamics Analysis of Spatial Compliant Parallel Mechanism

Jia Xiaohui<sup>1</sup> Liu Jinyue<sup>1</sup> Tian Yanling<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China

2. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

### Abstract

Due to the requirement of multi-dimensional nanometer level positioning of the compliant precision mechanism, a piezo-driven spatial compliant parallel mechanism was presented through the conventional Delta parallel mechanism. The inverse kinematics was developed on the basis of the Pseudo-Rigid-Body (PRB) model. After the simplifying of the mass of passive arm and calculating the strain energy of the flexure hinges, the dynamic equation was established through the Lagrangian approach, and the natural frequencies are evaluated by utilizing the geometric parameters. Three natural frequency errors, which were along with three primary translation directions, between the experiment results and the theoretical analysis were 12.71%, 12.14% and 14.90%. The error between the finite element simulation and the theoretical results were 6.20%, 5.66% and 10.28%. The results also showed that the simplified process during the theoretical analysis was reasonable and the derived mathematics model was creditable.

**Key words** Compliant parallel mechanism, Dynamics, Natural frequency, Finite element simulation

### 引言

柔性并联机构主要依靠柔性铰链的变形来产生运动输出,虽然其末端工作范围较小,但结构简洁、紧凑且无传动空程、无摩擦<sup>[1]</sup>,因而在超精密加工

和微纳米操作等研究领域得到了广泛的应用,但已知的该类型机构中大多采用平面的结构形式<sup>[2-5]</sup>。随着微纳米技术的快速发展,可实现多个自由度尤其是具有空间构型形式的纳米级柔性并联精密定位机构的构型设计及其相关性能研究正逐渐引起各国

收稿日期: 2011-07-12 修回日期: 2011-07-21

\* 国家自然科学基金资助项目(50705064)和天津市自然科学基金资助项目(08JCYBJC01400)

作者简介: 贾晓辉,讲师,博士,主要从事柔性精密定位系统设计和机械系统动力学研究,E-mail: jia\_dragon@163.com

通讯作者: 田延岭,副教授,主要从事精密工程与微纳米技术、精密测试系统与理论研究,E-mail: meytian@tju.edu.cn

专家和研究机构的重视<sup>[6-8]</sup>。作为微纳米技术的一个重要分支,纳米压印技术及其设备的开发和优化在我国的发展始于卢秉恒院士率先开展的“微压印技术”研究,但到目前为至也只有为数不多的几个科研所在该项技术的相关领域开展了相对深入的工作<sup>[9-10]</sup>,与国际水平还存在一定的差距。基于新型构型形式和驱动方式的精密定位系统研究,是纳米压印装备中的重要研究内容,对于促进 IC 加工技术的发展具有一定的理论意义和工程实用价值。此外,柔性机构的动力学分析对其机构设计、控制以及性能优化具有一定的意义,尤其在涉及高频控制情况时,动力学特性对机构性能的影响更为突出<sup>[11]</sup>。

因此,本文提出基于压电陶瓷驱动的柔性并联机构实现纳米压印过程中的精密定位,采用拉格朗日方程<sup>[12]</sup>方法进行动力学分析,建立其振动微分方程,得到其固有频率求解关系式,并分别进行有限元模态仿真和固有频率试验,验证所建数学模型的有效性。

### 1 逆运动学分析

图 1 为空间并联柔性机构样机,它是以 Tsai 等提出的改进 Delta 机构<sup>[13]</sup>为基础设计而来的,由基座、动平台和 3 个沿圆周等间隔均匀分布的独立柔性支链构成。

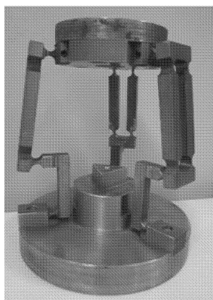


图 1 空间柔性并联机构

Fig. 1 Spatial compliant parallel mechanism

取出其中一个支链,将单自由度柔性铰链等效为线性扭簧和转动铰链,连杆等效为刚性杆,建立其伪刚体模型(图 2)。参照文献[14],将参考坐标系  $Ox_0y_0z_0$  的坐标原点  $O$  设置于基座的中心处, $z$  轴平行于基座平面法线方向并指向动平台, $x$  轴指向  $OA_i$ , $y$  轴方向由右手坐标系确定。动平台的中心为  $P$ ,基座和动平台半径分别为  $r_b$ 、 $r_t$ ,主动臂长度为  $L_1$ ,从动臂平行四边形机构长度  $\overline{C_iD_i}$  为  $L_2$ ,横梁半长  $\overline{B_iC_i}$  为  $L_d$ , $\gamma_i$  为驱动臂与参考坐标系  $z$  轴的夹角,从动杆转角为  $\beta_i$ 。在各关节处建立局部坐标系,各坐标系的  $z$  轴均与该处转动铰链的转轴方向平行,各铰链绕局部坐标系  $z$  轴的相对转动表示为  $\theta_{k,k-1}^i$

( $k = 1, 2, \dots, 5$ )。根据坐标变换建立上述各坐标系间的矩阵转换关系为

$$R_{10} = r_{10} R_{\gamma_i} U_1 R_{\alpha_i} \quad R_{21} = r_{21} R_{\beta_i} R_{\gamma_i} U_2 \quad R_{32} = r_{32} U_1$$

$$R_{43} = r_{43} U_2 \quad R_{54} = r_{54} R_{\beta_i} U_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$R_{k0} = \prod_{s=1}^k R_{k-s+1,k-s} \quad (k = 1, 2, \dots, 5)$$

其中

$$r_{k,k-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{k,k-1} & \sin\theta_{k,k-1} & 0 \\ -\sin\theta_{k,k-1} & \cos\theta_{k,k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中  $R_{\alpha_i}$ 、 $R_{\beta_i}$ 、 $R_{\gamma_i}$ ——关于  $\alpha_i$ 、 $\beta_i$ 、 $\gamma_i$  的变换矩阵

$r_{k,k-1}$ ——变换矩阵

$U_1$ 、 $U_2$ 、 $U_3$ ——常数矩阵

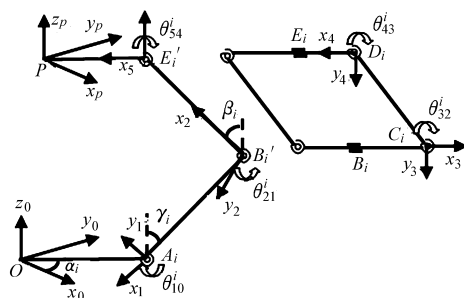


图 2 伪刚体模型及坐标系设置示意图

Fig. 2 PRB model and coordinate system

由于机构只具有 3 个沿坐标轴方向的移动自由度,在机构的变形过程中,动平台与基座之间没有相对的转动,因此局部坐标系  $Px_p y_p z_p$  与参考坐标系  $Ox_0 y_0 z_0$  之间的旋转变换矩阵应表示为

$$R = I = \text{diag}[1 \quad 1 \quad 1] \quad (1)$$

即机构经过时间  $t$  后所呈现的状态与初始状态之间满足

$$R_{50}^{0T} R_{50} = I \quad (2)$$

其中  $R_{50}^0 = R(z, \pi/2 + \alpha_i) R(y, \pi/2) R(z, \pi/2)$

$$R_{50} = R_{54} R_{43} R_{32} R_{21} R_{10}$$

求解式(2),则可以得到

$$\theta_{54}^i = \theta_{21}^i - \theta_{10}^i \quad (3)$$

将动平台中心点  $P$  在参考坐标系  $Ox_0 y_0 z_0$  中的位置矢量表示为  $P = (x, y, z)$ ,从图 2 所示单个支链各杆件之间的形位关系可以得到

$$P = r_{10}^i + \sum_{k=1}^4 R_{k0}^T r_{k,k-1}^i + R_{50}^T r_5^{PAi} \quad (4)$$

式中  $r_{10}^i$ ——基座半径在局部坐标系中的位矢

$r_{k,k-1}^i$ ——杆件在各自局部坐标系中的位矢

$r_5^{PAi}$ ——动平台半径在局部坐标系中的位矢

将式(4)展开并化简,可得到

$$(x + E_i \cos\alpha_i)^2 + (y + E_i \sin\alpha_i)^2 + (z + D_i)^2 = L_2^2 \quad (5)$$

其中  $E_i = -\Delta r - L_1 \sin(\theta_{10}^i + \gamma_i)$

$$D_i = -L_1 \cos(\theta_{10}^i + \gamma_i) \quad \Delta r = r_b - r_i$$

令  $\theta_{i+1,i} = [\theta_{i+1,i}^j \quad \theta_{i+1,i}^{j+1} \quad \theta_{i+1,i}^{j+2}]$  ( $i = 0, 1, 2$ ;  $j = 1$ ), 将式(5)关于时间求导, 得到

$$\dot{\theta}_{10} = J_1^{-1} J_2 \dot{P} = J \dot{P} \quad (6)$$

其中

$$J_1 = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \xi_1^x & \xi_1^y & \xi_1^z \\ \xi_2^x & \xi_2^y & \xi_2^z \\ \xi_3^x & \xi_3^y & \xi_3^z \end{bmatrix}$$

$$\delta_i = L_1 z \sin(\theta_{10}^i + \gamma_i) - H_i \cos(\theta_{10}^i + \gamma_i)$$

$$H_i = x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i + \Delta r \quad \xi_i^z = z + D_i$$

$$\xi_i^x = x + E_i \cos \alpha_i \quad \xi_i^y = y + E_i \sin \alpha_i$$

式中  $J$ ——雅可比矩阵

同理, 求解式(5), 可以得到其他关节位置处柔性铰链的转角变化与动平台中心位置之间的关系, 将其分别表示为

$$\theta_{21} = J_r \dot{P} \quad (7)$$

$$\theta_{32} = J_c \dot{P} \quad (8)$$

式中  $J_r$ ——关于  $\theta_{21}^i$  的雅可比矩阵

$J_c$ ——关于  $\theta_{32}^i$  的雅可比矩阵

## 2 动力学分析

机构的动能包括动平台、主动臂和从动臂动能, 而势能则由上述各部分的重力势能和各柔性铰链发生弹性变形而产生的应变能组成。

由于动平台具有 3 个沿坐标轴方向的平动自由度, 因此其具有的动能和势能分别为

$$T_p = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (9)$$

$$V_p = m_p g z \quad (10)$$

式中  $m_p$ ——动平台质量  $g$ ——重力加速度

此柔性机构工作过程中,  $A_i$  处柔性铰链发生弯曲变形使得主动臂产生绕端点  $A_i$  的转动, 因此主动臂具有的动、势能分别为

$$T_{ai} = \frac{1}{2} I_g \dot{\theta}_{10}^i \quad (11)$$

$$V_{ai} = \frac{1}{2} m_a g L_1 \sin \theta_{10}^i \quad (12)$$

式中  $I_g$ ——主动杆转动惯量

$m_a$ ——主动杆质量

由于从动平行四边形的运动形式复杂且不易求解, 本文的分析中将其做简化处理, 即假设从动平行四边形的质量集中在与动平台和主动臂末端相连的两端, 这样可以认为从动臂上部端子和下部端子的运动形式分别与动平台和主动杆保持一致。因此, 从动四边形结构所具有的动、势能为

$$T_{bi} = \frac{1}{2} m_b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} m_b (L_1 \dot{\theta}_{10}^i)^2 \quad (13)$$

$$V_{bi} = m_b g L_1 \sin \theta_{10}^i + m_b g z \quad (14)$$

式中  $m_b$ ——从动臂 1 个端子的质量

由于柔性铰链机构主要依靠柔性铰链的弹性变形来产生运动, 因此, 在此空间柔性并联机构工作过程中, 柔性支链各关节位置上的柔性铰链发生弯曲变形而储存应变能为

$$V_{ci} = \frac{1}{2} (k_a \theta_{10}^i{}^2 + k_b \theta_{21}^i{}^2 + 4k_c \theta_{32}^i{}^2 + k_e \theta_{54}^i{}^2) \quad (15)$$

式中  $k_a$ ——支链上位置  $A_i$  的柔性铰链转动刚度

$k_b$ ——支链上位置  $B_i$  的柔性铰链转动刚度

$k_c$ ——支链上位置  $C_i$  的柔性铰链转动刚度

$k_e$ ——支链上位置  $E_i$  的柔性铰链转动刚度

基于以上分析, 此柔性定位平台的总动能和总势能为

$$T = T_p + \sum_{i=1}^3 (T_{ai} + T_{bi}) \quad (16)$$

$$V = V_p + \sum_{i=1}^3 (V_{ai} + V_{bi}) + \sum_{i=1}^3 V_{ci} \quad (17)$$

拉格朗日方程表示为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial s_i} + \frac{\partial V}{\partial s_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

其中  $s = [\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z]^T$

式中  $s$ ——系统广义坐标

$Q_i$ ——广义非保守力

$n$ ——广义坐标个数

将柔性环节理想化, 当柔性并联机构产生自由振动时, 机构中不存在其他形式的非保守力, 即  $Q_i = 0$ , 另外, 考虑到机构实际的工作空间尺寸及柔性铰链微小的转角变化, 为了简化求解过程, 将雅可比矩阵  $J$ 、 $J_r$  和  $J_c$  视为常数矩阵, 因此将式(10)、(17)分别表示为广义坐标、广义速度和时间的函数后, 代入式(18)得到

$$M \begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{z} \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + F_s = 0 \quad (19)$$

其中  $M = (m_p + 3m_b)E + (I_g + m_b L_1^2)J^T J$

$K = k_a J^T J + k_b J_r^T J_r + 4k_c J_c^T J_c + k_e (J_r - J)^T (J_r - J) -$

$$\left( \frac{1}{2} m_a + m_b \right) g L_1 \sin \theta_{10} J^T J$$

式中  $M$ ——系统质量矩阵

$K$ ——系统刚度矩阵

$E$ —— $3 \times 3$  单位对角矩阵

$F_s$ ——与质量有关的关系矩阵

由式(19), 空间柔性并联机构无阻尼弹性振动

固有频率  $p$  满足

$$|\mathbf{K} - p^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (20)$$

结构参数为:  $\alpha_1 = 0^\circ$ 、 $\alpha_2 = 120^\circ$ 、 $\alpha_3 = 240^\circ$ 、 $r_b = r_i = 25 \text{ mm}$ 、 $L_1 = 39.24 \text{ mm}$ 、 $L_2 = 69.93 \text{ mm}$ 、 $L_d = 16 \text{ mm}$ 、 $\gamma_i = 14.4^\circ$ 、 $\beta_i = 8^\circ$ 。将上述参数代入式(20)求解,得到系统相应于 3 个主要运动方向的三阶固有频率为:55.05、55.05 和 423.41 Hz。

### 3 有限元分析

为了验证所建动力学模型的有效性,运用 ANSYS 进行模态仿真分析,得到如图 3 所示的三阶模态形式及相应的三阶固有频率。

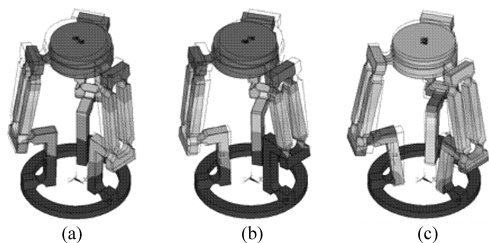


图 3 空间柔性并联机构 3 种模态形式

Fig. 3 Three modes of spatial compliant parallel mechanism

(a) 51.87 Hz (b) 51.87 Hz (c) 406.41 Hz

### 4 试验

利用 SQLabII 3510MMM II 动态测试系统对空间柔性并联机构的固有频率进行测试。利用冲击锤对定位工作台施加冲击力,激励力脉冲曲线如图 4 所示,空间柔性并联机构的模态时域响应和频率响应曲线如图 5 所示。

根据图 5 所示,可读取系统对应 3 个主要运动方向的三阶固有频率试验结果分别为:48.84、49.09 和 368.5 Hz。

3 个主要运动方向的三阶固有频率的理论分析结果和试验结果误差分别为:12.71%、12.14% 和 14.90%。有限元仿真结果和试验结果误差分别为:6.20%、5.66% 和 10.28%,均是可以接受的误差范

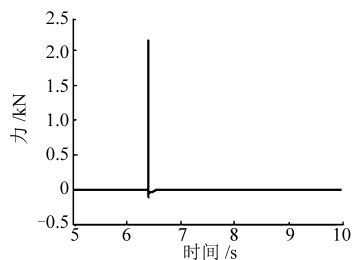


图 4 激励力脉冲曲线

Fig. 4 Graph of force impulse

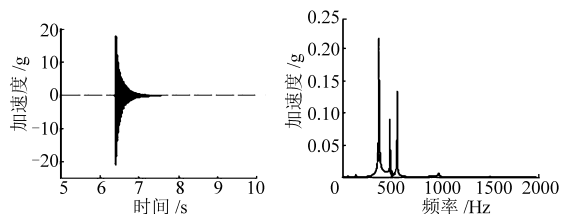


图 5 动平台时域响应和频域响应曲线

Fig. 5 Response curves of time-domain and frequency-domain

围。这是因为在采用拉格朗日方程方法分析建模过程中,将从动臂的质量分布方式加以简化,并将动平台以及铰链之间的连杆视为绝对的刚性体,而忽略其柔性特性及其发生形变时所储存的弹性应变能,所以误差相对较大。有限元仿真方法采用能量守恒原理进行力学分析,更好地保证了其数字模拟的精度,但同样由于单元类型、网格划分方式、边界条件设置等不可避免的问题的存在,存在约为 10% 的误差是可以接受的。

### 5 结论

(1) 基于质量集中方法将一种新型空间柔性并联机构从动臂简化,应用拉格朗日方程方法建立其动力学弹性振动微分方程。

(2) 构建此类柔性并联机构固有频率的求解表达式。

(3) 有限元仿真、试验和理论计算的结果比较说明文中采用拉格朗日方法理论建模所进行的简化处理有一定的合理性,得到的动力学数学模型有效可信。

### 参 考 文 献

- Tian Y L, Shirinzadeh B, Zhang D W. A flexure-based mechanism and control methodology for ultra-precision turning operation[J]. Precision Engineering, 2009, 33(2): 160 ~ 166.
- Tian Y L, Shirinzadeh B, Zhang D W, et al. Design and forward kinematics of the compliant micro-manipulator with lever mechanisms[J]. Precision Engineering, 2009, 33(4): 466 ~ 475.
- Yao Q, Dong J C, Ferreira P M. Design, analysis, fabrication and testing of a parallel-kinematic micropositioning XY stage [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2007, 47(6): 946 ~ 961.
- 刘定强, 黄玉美, 谢礼, 等. 压电型宏微双驱动精密定位系统点位协调控制[J]. 农业机械学报, 2011, 42(4): 220 ~ 223. Liu Dingqiang, Huang Yumei, Xie Li, et al. Positioning control of piezoelectric macro-micro dual drive[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(4): 220 ~ 223. (in Chinese)
- Zettl B, Szyzkowski W, Zhang W J. Accurate low DOF modeling of a planar compliant mechanism with flexure hinges: the

- equivalent beam methodology[J]. Precision Engineering, 2005, 29(2): 237 ~ 245.
- 6 Yao Q, Dong J C, Ferreira P M. A novel parallel-kinematics mechanism for integrated, multi-axis nanopositioning part 1: kinematics and design for fabrication[J]. Precision Engineering, 2008, 32(1): 7 ~ 19.
  - 7 荣伟彬, 王乐锋, 孙立宁. 3-PPSR 并联微动机器人静刚度分析[J]. 机械工程学报, 2008, 44(1): 13 ~ 18.  
Rong Weibin, Wang Lefeng, Sun Lining. Static stiffness analysis of 3-PPSR parallel micromanipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(1): 13 ~ 18. (in Chinese)
  - 8 Dong W, Sun L N, Du Z J. Design of a precision compliant parallel positioner driven by dual piezoelectric actuators[J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2007, 135(1): 250 ~ 256.
  - 9 范细秋, 张鸿海, 胡晓峰, 等. 宽范围高对准精度纳米压印样机的研制[J]. 中国机械工程, 2005, 16(增刊): 64 ~ 66.  
Fan Xiqiu, Zhang Honghai, Hu Xiaofeng, et al. A nanoimprint lithography prototype with wide working range and high precision alignment[J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16(Supp.): 64 ~ 66. (in Chinese)
  - 10 Lan H B, Ding Y C, Liu H Z, et al. Review of the wafer stage for nanoimprint lithography [J]. Microelectronic Engineering, 2007, 84(4): 684 ~ 688.
  - 11 Li Yangmin, Xu Qingsong. Dynamics analysis of a modified 3-PRC compliant parallel micromanipulator[C]//Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Nanotechnology, 2007: 432 ~ 437.
  - 12 Dong J C, Yao Q, Ferreira P M. A novel parallel-kinematics mechanism for integrated, multi-axis nanopositioning part 2: dynamics, control and performance analysis[J]. Precision Engineering, 2008, 32(1): 20 ~ 33.
  - 13 Tsai L W, Walsh G C, Stamper R E. Kinematics of a novel three-DOF translational platform[C]//Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1996, 4: 3 446 ~ 3 451.
  - 14 Staicu S. Inverse dynamics of the 3-PRR planar parallel robot[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2009, 57(5): 556 ~ 563.

(上接第 209 页)

#### 参 考 文 献

- 1 Marc A, Roger B. Synthesis of planar parallel mechanism while considering workspace, dexterity, stiffness and singularity avoidance[J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 69 ~ 78.
- 2 Dou Runliang. Optimum design of 3-RRR planar parallel manipulators[J]. Proc. I. Mech. E. Part C: Mechanical Engineering Science, 2010, 224(2): 411 ~ 418.
- 3 Gao Mingwang, Zhang Xianmin, Wu Zhiwei. Optimum design of a 3-RRR planar parallel manipulator with a singularity-free workspace[J]. Applied Mechanics and Materials, 2011, 86: 606 ~ 610.
- 4 Octomo D, Hwee C L, Alici G. Direct kinematics and analytical solution to 3RRR parallel planar mechanisms[C]//2006 9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV'06, 2006: 1 ~ 6.
- 5 Waseem A, Khan V, Krovi N. Recursive kinematics and inverse dynamics for a planar 3R parallel manipulator[J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2005, 127(4): 529 ~ 536.
- 6 Asier Z, Itziar C, Marga M. Dynamic modeling of planar parallel robots considering passive joint sensor data[J]. Robotica, 2010, 28(5): 649 ~ 661.
- 7 Yu Yueqing, Du Zhaocai, Yang Jianxin. An experimental study on the dynamics of a 3-RRR flexible parallel robot[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2011, 27(5): 992 ~ 997.
- 8 鲁开讲, 师俊平, 高秀兰. 平面柔性并联机构弹性动力学研究[J]. 农业机械学报, 2010, 41(6): 208 ~ 215.  
Lu Kaijiang, Shi Junping, Gao Xiulan. Elastic-dynamics of planar flexile parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(6): 208 ~ 215. (in Chinese)
- 9 胡俊峰, 张宪民, 朱大昌. 柔性并联机器人动力学建模[J]. 农业机械学报, 2011, 42(11): 208 ~ 213.  
Hu Junfeng, Zhang Xianmin, Zhu Dachang. Dynamic modeling of flexible parallel robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(11): 208 ~ 213. (in Chinese)
- 10 Zhang Changde, Song Shinmin. An efficient method for inverse dynamics of manipulators based on the virtual work principle [J]. Journal of Robotics Systems, 1993, 10(5): 605 ~ 627.