

DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.08.037

平面宏动并联机器人动态模拟*

高名旺^{1,2} 张宪民¹

(1. 华南理工大学广东省精密装备与制造技术重点实验室, 广州 510641; 2. 山东理工大学机械工程学院, 淄博 255012)

【摘要】 针对宏微结合的宏动并联机器人建立了动力学模型, 实现基于模型的滑模控制及仿真。首先, 根据机构闭式约束等式, 分析机构的逆位置和正位置, 同时推导了机构的速度和加速度关系式。在此基础上, 选择各杆件的关键点, 建立各关键点的偏速度和偏角速度, 利用 Newton - Euler 公式分析各杆件的惯性力和惯性力矩, 考虑了微动平台对宏动机器人运动的作用, 根据虚功原理建立了动力学方程。最后, 应用动态补偿策略, 设计了滑模控制器。仿真结果表明了方法的有效性。

关键词: 宏动并联机器人 虚功原理 滑模控制 动力学模型

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2012)08-0205-05

Dynamic Modeling of Planar Macro-driven Parallel Robot

Gao Mingwang^{1,2} Zhang Xianmin¹

(1. Guangdong Province Key Laboratory of Precision Equipment and Manufacturing Technology, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China 2. College of Mechanical Engineering, Shandong University of Technology, Zibo 255012, China)

Abstract

The dynamic modeling and slide-mode control for a planar macro-micro parallel robot were investigated. Firstly, the inverse position and the forward position were analyzed by vector method. The velocities and accelerations of the mechanism were derived. Then, pivotal points were selected. The partial velocity and angular velocity about these ones were obtained. The inertial force and moment of the links were obtained by Newton - Euler formulation. Furthermore, based on the principle of virtual work, the dynamic formulation of the system with micro-driven table was formulated. Finally, a sliding-mode controller was designed. The result showed that proposed method was effective.

Key words Macro-driven parallel robot, Principle of virtual work, Slide-mode control, Dynamic model

引言

宏微结合的驱动控制技术, 是实现大行程、精密定位的一种有效手段。基于 3 - RRR 构型, 可以构造宏微结合的双重驱动精密定位系统。3 - RRR 机构可以在 XY 平面内平动和绕 Z 轴转动。许多学者对该机构进行了研究。文献[1~3]研究了机构的尺度优化设计, 文献[4]分析了机构的正运动学, 文

献[5]把机构分解, 利用 Newton - Euler 法和 Lagrangian 乘子建立了 3 - RRR 机构的动力学公式。基于冗余传感信息, 文献[6]用 Lagrangian 公式建立了 3 - RRR 机构的动力方程。文献[7~9]从弹性动力学角度分析了平面并联机构的动态特性。上述研究主要针对单个机构进行了设计和分析。

本文针对宏微双重驱动的精确定位系统, 对执行大范围运动的机构进行动力学分析和控制设计。

收稿日期: 2012-01-12 修回日期: 2012-03-21

* 国家杰出青年基金资助项目(50825504)、中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2012ZP0004)、NSFC-广东省自然科学基金联合基金资助项目(U0934004)、广东省高等学校珠江学者岗位计划资助项目(2010)和广东省重大科技专项项目(2009A080204005)

作者简介: 高名旺, 博士生, 山东理工大学讲师, 主要从事并联机器人设计、动力学研究, E-mail: gmw_2001@163.com

通讯作者: 张宪民, 教授, 博士生导师, 主要从事机械动力学、精密制造装备技术研究, E-mail: zhangxm@scut.edu.cn

考虑微动平台对宏动机器人的作用,利用虚功原理建立动力学模型,基于滑模控制原理设计动力学补偿器并进行仿真。

1 机构描述

图 1 是宏微结合的精确定位系统,它由宏动并联机器人和微动机构组成,两者均为 3-RRR 构型。

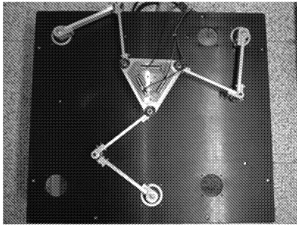


图 1 精确定位系统

Fig. 1 Precision positioning system

如图 2 所示,3-RRR 机构呈对称分布,它包含动平台 $C_1C_2C_3$ 、基座 $O_1O_2O_3$ 及连接两者的 3 条 RRR 串联支链。第 i 条支链有 3 个转动副 O_i 、 B_i 和 C_i ($i = 1, 2, 3$),转动副之间用 2 根连杆链接,即主动杆 O_iB_i 和从动杆 B_iC_i 。电动机固定在基座 O_i 处。

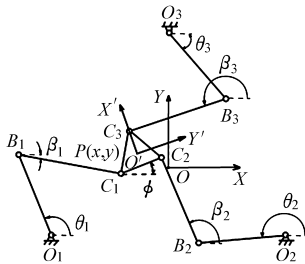


图 2 机构示意图

Fig. 2 Structure of mechanism

OXY 是建立在基座上的固定坐标系,原点 O 在 $\Delta O_1O_2O_3$ 的中心。 $O'X'Y'$ 是建立在动平台的动坐标系,原点 O' 和点 P 重合。动平台的中心 $P(x, y)$ 表示机构运动的位置, ϕ 表示其姿态。机构的参数如表 1 所示。

表 1 3-RRR 的参数

Tab. 1 Parameters of 3-RRR

部件	长度	质量	惯性	质心位置
主动杆 O_iB_i	l_{i1}	m_{i1}	I_{i1}	l_{i1c}
从动杆 B_iC_i	l_{i2}	m_{i2}	I_{i2}	l_{i2c}
动平台 $C_1C_2C_3$	h_i	m_c	I_c	$P(x, y)$
OO_i	l_{i3}			
C_iO'	l_{i4}			

沿直线 OO_i 、 O_iB_i 、 B_iC_i 、 C_iO' 、 OO' 和 C_iC_{i+1} 的向量分别用 \mathbf{o}_i 、 \mathbf{u}_i 、 \mathbf{v}_i 、 \mathbf{s}_i 、 \mathbf{p} 和 \mathbf{w}_i 表示,其中直线 C_1C_2 用 \mathbf{w}_1 表示,直线 C_2C_3 用 \mathbf{w}_2 表示,直线 C_3C_1 用 \mathbf{w}_3 表示。

θ_i 是驱动角度,即输入量,它们组成向量 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 。机构运动的笛卡尔坐标用向量表示为 $\mathbf{q} = (x, y, \phi)$ 。

2 运动学分析

2.1 闭式约束等式

根据图 2,可以得到关于 $\boldsymbol{\theta}$ 和 \mathbf{q} 的向量方程

$$\mathbf{o}_i + \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i + \mathbf{s}_i = \mathbf{q} \tag{1}$$

同样,也可以得到另外一组向量方程

$$\mathbf{o}_i + \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i - \mathbf{o}_{i+1} - \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{0} \tag{2}$$

2.2 位置分析

2.2.1 逆向位置计算

由式(1)可得联系 $\boldsymbol{\theta}$ 和 \mathbf{q} 的等式

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{o}_i - \mathbf{u}_i - \mathbf{s}_i\| = l_{i2} \tag{3}$$

进而,式(3)可为

$$e_{i1} \sin \theta_i + e_{i2} \cos \theta_i + e_{i3} = 0 \tag{4}$$

利用三角万能公式,根据式(4)机构逆运动学位置解可得

$$\theta_i = \arctan \frac{-e_{i1} \pm \sqrt{e_{i1}^2 + e_{i2}^2 - e_{i3}^2}}{e_{i3} - e_{i2}} \tag{5}$$

其中 $e_{i1} = -2l_{i1} [y + l_{i3} \sin(\varphi_i + \phi) - l_{i4} \sin \alpha_i]$

$$e_{i2} = -2l_{i1} [x + l_{i3} \cos(\varphi_i + \phi) - l_{i4} \cos \alpha_i]$$

$$e_{i3} = [x + l_{i3} \cos(\varphi_i + \phi) - l_{i4} \cos \alpha_i]^2 +$$

$$[y + l_{i3} \sin(\varphi_i + \phi) - l_{i4} \sin \alpha_i]^2 + l_{i1}^2 - l_{i2}^2$$

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (7\pi/6, 11\pi/6, \pi/2)$$

式中 φ_i ——向量 \mathbf{s}_i 在动坐标系中的角度

α_i ——向量 \mathbf{o}_i 在固定坐标系中的角度

2.2.2 正向位置计算

在固定坐标系中,点 B_i 的位置向量为

$$\mathbf{r}_{B_i} = \mathbf{o}_i + \begin{bmatrix} l_{i1} \cos \theta_i \\ l_{i1} \sin \theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{ix} \\ b_{iy} \end{bmatrix} \tag{6}$$

同样,点 C_i 的位置向量为

$$\mathbf{r}_{C_i} = \mathbf{r}_{B_i} + \begin{bmatrix} l_{i2} \cos \beta_i \\ l_{i2} \sin \beta_i \end{bmatrix} = \mathbf{p} - \mathbf{s}_i \tag{7}$$

式(3)展开为

$$\begin{cases} (x_c - b_{1x})^2 + (y_c - b_{1y})^2 = l_{i2}^2 \\ (x_c + h_1 \cos \phi - b_{2x})^2 + (y_c + h_1 \sin \phi - b_{2y})^2 = l_{i2}^2 \\ [x_c + h_3 \cos(\phi + \gamma) - b_{3x}]^2 + [y_c + h_3 \sin(\phi + \gamma) - b_{3y}]^2 = l_{i2}^2 \end{cases} \tag{8}$$

式中 (x_c, y_c) ——点 C_1 的坐标

将上述方程组化简可得

$$\begin{cases} x_C^2 - 2b_{1x}x_C + b_{1x}^2 + y_C^2 - 2b_{1y}y_C + b_{1y}^2 = l_{12}^2 \\ Rx_C + Sy_C + Q = l_{22}^2 - l_{12}^2 \\ Ux_C + Vy_C + W = l_{32}^2 - l_{12}^2 \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$R = 2(h_1 \cos \varphi - b_{2x}) + 2b_{1x}$$

$$S = 2(h_1 \sin \varphi - b_{2y}) + 2b_{1y}$$

$$Q = (h_1 \cos \varphi - b_{2x})^2 - b_{1x}^2 + (h_1 \sin \varphi - b_{2y})^2 - b_{1y}^2$$

$$U = 2[h_3 \cos(\varphi + \gamma) - b_{3x}] + 2b_{1x}$$

$$V = 2[h_3 \sin(\varphi + \gamma) - b_{3y}] + 2b_{1y}$$

$$W = [h_3 \cos(\varphi + \gamma) - b_{3x}]^2 - b_{1x}^2 +$$

$$[h_3 \sin(\varphi + \gamma) - b_{3y}]^2 - b_{1y}^2$$

由式(9),可解得

$$\begin{cases} x_C = (-SA_1 + VA_2)/(RV - SU) \\ y_C = (RA_1 - UA_2)/(RV - SU) \end{cases} \quad (10)$$

其中 $A_1 = l_{22}^2 - l_{12}^2 - Q$ $A_2 = l_{32}^2 - l_{12}^2 - W$

将式(10)代入式(9),简化后得

$$\sum_{i=0}^6 c_i T^i = 0 \quad (11)$$

其中

$$T = \tan \varphi$$

2.3 速度分析

式(4)两边微分,写成向量矩阵形式得

$$\mathbf{J}_{ax} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_{qa} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{J}_{ax} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{qa} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$D_{ii} = -e_{i1} \cos \theta_i + e_{i2} \sin \theta_i$$

$$E_{i1} = -e_{i2}/(2l_{i1}) - l_{i1} \cos \theta_i$$

$$E_{i2} = -e_{i1}/(2l_{i1}) - l_{i1} \sin \theta_i$$

$$E_{i3} = E_{i1} l_{i3} \sin(\phi + \varphi_i) - E_{i2} l_{i3} \cos(\phi + \varphi_i)$$

2.4 加速度分析

式(12)两边微分得

$$\mathbf{J}_{ax} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_{ax} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_{qa} \ddot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\mathbf{J}}_{qa} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (13)$$

另根据式(2)得

$$(o_{ix} + u_{ix} + v_{ix} + w_{ix} - v_{(i+1)x} - u_{(i+1)x} - o_{(i+1)x})^2 +$$

$$(o_{iy} + u_{iy} + v_{iy} + w_{iy} - v_{(i+1)y} - u_{(i+1)y} - o_{(i+1)y})^2 = 0$$

记为

$$f_i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0} \quad (14)$$

其中

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

式中 β_i ——向量 \mathbf{v}_i 在固定坐标系中的角度

对式(14)两边微分,则得

$$\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{J}_{\theta\beta} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{J}_{\beta\theta} \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \quad (15)$$

进而,对式(15)继续微分,则得

$$\mathbf{J}_{\theta\beta} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{J}}_{\theta\beta} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{J}_{\beta\theta} \ddot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\mathbf{J}}_{\beta\theta} \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \quad (16)$$

3 动力学分析

微动平台对宏动机器人主要产生两个作用:一个是宏运动中产生的惯性力,此力将和宏动机器人动平台一起考虑;另一个是微动运动时产生的作用力,将作为外力施加在动平台上。动力学建模方法使用虚功原理^[10]和 Newton-Euler 法。首先选择点 O_i 、 B_i 和 C_i 分别作为连杆 $O_i B_i$ 、 $B_i C_i$ 和动平台的关键点。其次用 Newton-Euler 法计算各个运动部件的惯性力并将其等效至各关键点。再计算各关键点的偏速度和角速度。最后应用虚功原理建立动力学公式。

3.1 点 C_i 速度和加速度

对式(6)两边微分,则得点 B_i 速度

$$\mathbf{v}_{B_i} = \dot{\mathbf{r}}_{B_i} = l_{i1} \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \begin{bmatrix} -l_{i1} \sin \theta_i \\ l_{i1} \cos \theta_i \end{bmatrix} \quad (17)$$

对式(17)再微分,则得点 B_i 加速度

$$\mathbf{a}_{B_i} = l_{i1} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i \begin{bmatrix} -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \end{bmatrix} - l_{i1} \dot{\boldsymbol{\theta}}_i^2 \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

同样,由式(7)得点 C_i 速度

$$\dot{\mathbf{v}}_{C_i} = \dot{\mathbf{r}}_{C_i} = \dot{\mathbf{r}}_{B_i} - l_{i2} \dot{\boldsymbol{\beta}}_i \begin{bmatrix} -\sin \beta_i \\ \cos \beta_i \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{s}}_i = \mathbf{v}_p - \mathbf{E} \mathbf{s}_i \dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

加速度为

$$\mathbf{a}_{C_i} = \dot{\mathbf{v}}_{C_i} = \mathbf{a}_p + \mathbf{s}_i \dot{\boldsymbol{\phi}}^2 - \mathbf{E} \mathbf{s}_i \ddot{\boldsymbol{\phi}} \quad (20)$$

3.2 惯性力和力矩

各个主动杆的惯性力为

$$\mathbf{F}_{i1} = -m_{i1} l_{i1c} \left(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_i \begin{bmatrix} -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \end{bmatrix} - \dot{\boldsymbol{\theta}}_i^2 \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} \right) \quad (21)$$

各个主动杆的惯性力矩为

$$M_{i1} = -m_{i1} l_{i1c} [-\sin \theta_i \quad \cos \theta_i] \mathbf{a}_{O_i} - I_{i1} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (22)$$

式中 \mathbf{a}_{O_i} ——点 O_i 加速度

同样的,各个被动杆的惯性力和力矩为

$$\mathbf{F}_{i2} = -m_{i2} \left(\mathbf{a}_{B_i} + l_{i2c} \ddot{\boldsymbol{\beta}}_i \begin{bmatrix} -\sin \beta_i \\ \cos \beta_i \end{bmatrix} - l_{i2c} \dot{\boldsymbol{\beta}}_i^2 \begin{bmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \end{bmatrix} \right) \quad (23)$$

$$M_{i2} = -m_{i2} l_{i2c} [-\sin \beta_i \quad \cos \beta_i] \mathbf{a}_{B_i} - I_{i2} \ddot{\boldsymbol{\beta}}_i \quad (24)$$

点 C_i 的惯性力和力矩为

$$\mathbf{F}_C = -m_{CE} (\mathbf{a}_p + \mathbf{s}_i \dot{\boldsymbol{\phi}}^2 - \mathbf{E} \mathbf{s}_i \ddot{\boldsymbol{\phi}}) \quad (25)$$

$$M_C = -m_{CE} \mathbf{a}_p^T \mathbf{E} \mathbf{s}_i - I_{CE} \ddot{\boldsymbol{\phi}} \quad (26)$$

其中

$$m_{CE} = m_c + m_e \quad I_{CE} = I_C + I_e$$

式中 m_c ——微动平台质量
 I_c ——微动平台惯性矩

3.3 偏速度和偏角速度

根据式(12),主动杆的偏角速度为

$$\dot{\theta}_i = \mathbf{G}_{i1} \dot{\mathbf{q}} \quad (27)$$

其中

$$\mathbf{G}_{i1} = \begin{bmatrix} E_{i1} & E_{i2} & E_{i3} \\ D_{ii} & D_{ii} & D_{ii} \end{bmatrix}$$

被动杆的偏速度和偏角速度分别为

$$\mathbf{v}_{B_i} = \mathbf{K}_{i2} \dot{\mathbf{q}} \quad (28)$$

其中

$$\mathbf{K}_{i2} = l_{i1} \begin{bmatrix} -\sin\theta_i \mathbf{G}_{i1} \\ \cos\theta_i \mathbf{G}_{i1} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\beta}_i = \mathbf{G}_{i2} \dot{\mathbf{q}} \quad (29)$$

$$\mathbf{G}_{i2} =$$

$$\begin{bmatrix} -\sin\beta_i & \cos\beta_i \\ l_{i2} & l_{i2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} -l_{i1} \sin\theta_i \\ l_{i1} \cos\theta_i \end{bmatrix} \mathbf{G}_{i1} - \mathbf{E} \mathbf{s}_i \mathbf{e}_3^T \right)$$

$$\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T \quad \mathbf{e}_2 = [0 \ 1 \ 0]^T \quad \mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

动平台的偏速度和偏角速度分别为

$$\mathbf{v}_{c1} = \mathbf{K}_c \dot{\mathbf{q}} \quad (30)$$

其中

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_{i3} \cos\phi \\ 0 & 1 & -l_{i3} \sin\phi \end{bmatrix}$$

$$\dot{\gamma}_1 = \mathbf{G}_c \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{e}_3^T \quad (31)$$

3.4 广义力

广义力包括两部分,一个是微动平台作用在宏动机器人上的外力和外力矩,另一个是由电动机施加的驱动力矩。

外力和外力矩可表示为

$$\boldsymbol{\tau}_e = [F_{ex} \ F_{ey} \ M_{ez}]^T$$

式中 F_{ex} 、 F_{ey} ——作用在 O 点沿 X 方向和 Y 方向的力

M_{ez} ——作用在 O 点的 Z 轴方向力矩

驱动力矩可表示为

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$$

式中 τ_i ——电动机施加在第 i 支链的驱动力矩

3.5 动力学公式

基于虚功原理,由前述各关键点的力、力矩和偏速度、偏角速度得到动力学公式

$$\mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{K}_{ij}^T \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \mathbf{G}_{ij}^T \mathbf{M}_{ij} + \mathbf{K}_c^T \mathbf{F}_c + \mathbf{G}_c^T \mathbf{M}_c + \boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{0} \quad (32)$$

把式(12)、(13)、(15)和(16)代入式(32),简化得到

$$\mathbf{H} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & -(\mathbf{J}^T)^{-1} \left(\sum_{i=1}^3 (\mathbf{G}_{i1}^T I_{i1}) - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{G}_{i1}^T m_{i2} l_{i2}^2) + \right. \\ & \sum_{i=1}^3 (\mathbf{G}_{i1}^T m_{i2} l_{i1} l_{i2c} \cos(\beta_i - \theta_i) + \mathbf{G}_{i2}^T I_{i2}) \mathbf{J}_{\beta\theta}^{-1} \mathbf{J}_{\theta\beta} + \\ & \left. \sum_{i=1}^3 (\mathbf{G}_{i2}^T m_{i2} l_{i1} l_{i2c} \cos(\beta_i - \theta_i)) - m_c \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c \mathbf{J}_{ax}^{-1} \mathbf{J}_{qa} \right) \\ \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = & -(\mathbf{J}^T)^{-1} \left(\sum_{i=1}^3 (\mathbf{G}_{i1}^T m_{i2} l_{i1} l_{i2c} \sin(\beta_i - \right. \\ & \theta_i) \dot{\beta}_i) - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{G}_{i1}^T m_{i2} l_{i1} l_{i2c} \cos(\beta_i - \theta_i)) (-\mathbf{J}_{\beta\theta}^{-1} \dot{\mathbf{J}}_{\theta\beta} + \\ & \left. \mathbf{J}_{\beta\theta}^{-1} \mathbf{J}_{\theta\beta} \dot{\mathbf{J}}_{\beta\theta}^{-1} \mathbf{J}_{\theta\beta}) \right) - m_c l_{31} \dot{\phi} (\sin\phi + \cos\phi) - \\ & \left. \sum_{i=1}^3 (\mathbf{G}_{i2}^T m_{i2} l_{i1} l_{i2c} \sin(\beta_i - \theta_i) \dot{\theta}_i) + \boldsymbol{\tau}_e \right) \end{aligned}$$

4 控制及仿真

4.1 控制律公式

使用鲁棒控制策略提高运动精度。首先在系统中引入计算力矩控制

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d + \mathbf{K}_d (\dot{\boldsymbol{\theta}}_d - \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{K}_p (\boldsymbol{\theta}_d - \boldsymbol{\theta}) = \\ & \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} \end{aligned} \quad (34)$$

式中 $\boldsymbol{\theta}_d$ 、 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_d$ 、 $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_d$ ——期望位移、速度和加速度

\mathbf{e} 、 $\dot{\mathbf{e}}$ ——关节空间的轨迹跟踪误差及其速率

\mathbf{K}_d ——微分增益的对角正定矩阵

\mathbf{K}_p ——比例增益的对角正定矩阵

因此,系统的闭环误差等式为

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (35)$$

控制律的完整表达式为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_d + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}) + \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \quad (36)$$

为提高系统对机构参数变化的鲁棒性,增加了鲁棒因子。则新的控制律为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_d + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}) + \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \delta \mathbf{u} \quad (37)$$

从而,闭环系统的新误差等式为

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \hat{\mathbf{H}}^{-1} (\hat{\mathbf{H}} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\mathbf{N}} - \delta \mathbf{u}) \quad (38)$$

其中

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}} \quad \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{N} - \hat{\mathbf{N}}$$

式中 $\hat{\mathbf{H}}$ ——基于动力学参数估计值计算的矩阵

\mathbf{H} ——基于动力学参数实际值计算的矩阵

$\hat{\mathbf{N}}$ ——基于动力学参数估计值计算的矩阵

\mathbf{N} ——基于动力学参数实际值计算的矩阵

式(38)的状态变量形式可写为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{H}}^{-1} (\hat{\mathbf{H}} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\mathbf{N}} - \delta \mathbf{u}) \quad (39)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_p & -\mathbf{K}_d \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

式中 $\mathbf{0}$ —— 3×3 零矩阵

\mathbf{I} —— 3×3 单位矩阵

取滑模曲面为

$$s = \mathbf{C}x \quad (40)$$

其中 $\mathbf{C} = [\mathbf{A} \quad \mathbf{I}]$

式中 \mathbf{A} ——正对角矩阵

根据滑模原理选择

$$\dot{\mathbf{u}} = \kappa \text{signs}$$

式中 κ ——滑模增益

4.2 稳定性分析

为研究稳定性,初选李雅普诺夫函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (41)$$

式中 \mathbf{P} ——满足李雅普诺夫等式的对称正定矩阵

李雅普诺夫等式为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} &= -\mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \mathbf{B} &= \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (42)$$

式中 \mathbf{Q} ——对称正定矩阵

李雅普诺夫函数的导数是

$$\dot{V}(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{s}^T \hat{\mathbf{H}}^{-1} (\tilde{\mathbf{H}} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\mathbf{N}} \ddot{\boldsymbol{\theta}} - \kappa \text{signs}) \quad (43)$$

因此,如果滑模增益满足

$$\kappa \geq \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \|\tilde{\mathbf{H}} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\mathbf{C}} \ddot{\boldsymbol{\theta}}\|$$

则 $\dot{V} \leq 0$ 。

式中 $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ —— $\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ 最大本征值和最小本征值

因此选用新的非负函数用于稳定性分析。

$$\begin{aligned} V_1(t) &= V(t) - \int_0^t \left(\dot{V}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \right) d\tau \\ \dot{V}_1(t) &= -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (44)$$

根据 Barbalat 引理,可以得到 $\dot{V}_1(t) \rightarrow 0$ 。进而, $\mathbf{x} \rightarrow 0$, 导致 $s \rightarrow 0$ 。因此,式(39)的闭环系统渐进稳定。

4.3 仿真结果

为检验推导的动力学公式和控制方法,对前述动力学模型进行仿真,轨迹为圆心在 $(x, y) = (0, 0)$, 直径为 0.1 m , $\phi = 0^\circ$ 的圆。

机构结构参数根据文献[3]确定, $l_{i1} = 0.245 \text{ m}$, $l_{i2} = 0.242 \text{ m}$, $l_{i3} = 0.112 \text{ m}$, $l_{i4} = 0.4 \text{ m}$ 。被动杆质心位置 $l_{i2c} = 0.121 \text{ m}$ 。主动连杆质量 $m_{i1} = 0.412 \text{ kg}$, 被动连杆质量 $m_{i2} = 0.276 \text{ kg}$, 动平台质量 $m_c = 1.292 \text{ kg}$, 微动平台质量 $m_e = 3.853 \text{ kg}$ 。主动连杆惯

性矩 $I_{i1} = 9.119 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 被动连杆惯性矩 $I_{i2} = 5.809 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 动平台和微动平台的惯性矩 $I_{cE} = 0.037683 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。控制增益 \mathbf{K}_d 和 \mathbf{K}_p 根据系统的最大超调量和超调时间调节确定。

图 4~6 分别表明关节空间的角位移 θ_1, θ_2 和 θ_3 的变化。当任务空间的轨迹为直径 0.1 m 的圆时,机构的驱动角的变化范围分别是 $\theta_1(1.1, 1.7)$ 、 $\theta_2(3.33, 3.77)$ 和 $\theta_3(-0.87, -0.43)$ 。图中期望值是机构要执行的任务。虚线为机构仿真输出值,两者比较接近,这说明动力学模型和控制方法能较好地模拟机构的动态变化。

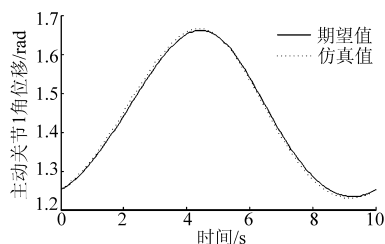


图 4 主动关节 1 角位移

Fig. 4 Angular displacement of active joint 1

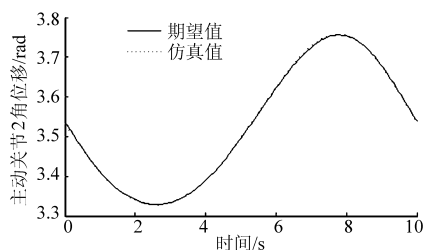


图 5 主动关节 2 角位移

Fig. 5 Angular displacement of active joint 2

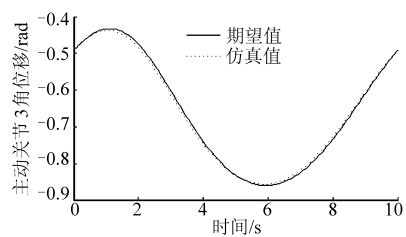


图 6 主动关节 3 角位移

Fig. 6 Angular displacement of active joint 3

5 结束语

根据虚功原理,考虑了微动平台和宏动并联机器人的耦合作用,利用 Newton-Euler 公式建立了机构动力学模型,使用动力学补偿策略,建立机器人的滑模控制律公式,仿真结果表明模型能较好地模拟机构的动态变化,为实现系统的精密定位奠定基础。

(下转第 214 页)

- equivalent beam methodology[J]. Precision Engineering, 2005, 29(2): 237 ~ 245.
- 6 Yao Q, Dong J C, Ferreira P M. A novel parallel-kinematics mechanism for integrated, multi-axis nanopositioning part 1: kinematics and design for fabrication[J]. Precision Engineering, 2008, 32(1): 7 ~ 19.
 - 7 荣伟彬, 王乐锋, 孙立宁. 3-PPSR 并联微动机器人静刚度分析[J]. 机械工程学报, 2008, 44(1): 13 ~ 18.
Rong Weibin, Wang Lefeng, Sun Lining. Static stiffness analysis of 3-PPSR parallel micromanipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(1): 13 ~ 18. (in Chinese)
 - 8 Dong W, Sun L N, Du Z J. Design of a precision compliant parallel positioner driven by dual piezoelectric actuators[J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2007, 135(1): 250 ~ 256.
 - 9 范细秋, 张鸿海, 胡晓峰, 等. 宽范围高对准精度纳米压印样机的研制[J]. 中国机械工程, 2005, 16(增刊): 64 ~ 66.
Fan Xiqiu, Zhang Honghai, Hu Xiaofeng, et al. A nanoimprint lithography prototype with wide working range and high precision alignment[J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16(Supp.): 64 ~ 66. (in Chinese)
 - 10 Lan H B, Ding Y C, Liu H Z, et al. Review of the wafer stage for nanoimprint lithography [J]. Microelectronic Engineering, 2007, 84(4): 684 ~ 688.
 - 11 Li Yangmin, Xu Qingsong. Dynamics analysis of a modified 3-PRC compliant parallel micromanipulator[C]//Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Nanotechnology, 2007: 432 ~ 437.
 - 12 Dong J C, Yao Q, Ferreira P M. A novel parallel-kinematics mechanism for integrated, multi-axis nanopositioning part 2: dynamics, control and performance analysis[J]. Precision Engineering, 2008, 32(1): 20 ~ 33.
 - 13 Tsai L W, Walsh G C, Stamper R E. Kinematics of a novel three-DOF translational platform[C]//Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1996, 4: 3 446 ~ 3 451.
 - 14 Staicu S. Inverse dynamics of the 3-PRR planar parallel robot[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2009, 57(5): 556 ~ 563.

(上接第 209 页)

参 考 文 献

- 1 Marc A, Roger B. Synthesis of planar parallel mechanism while considering workspace, dexterity, stiffness and singularity avoidance[J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 69 ~ 78.
- 2 Dou Runliang. Optimum design of 3-RRR planar parallel manipulators[J]. Proc. I. Mech. E. Part C: Mechanical Engineering Science, 2010, 224(2): 411 ~ 418.
- 3 Gao Mingwang, Zhang Xianmin, Wu Zhiwei. Optimum design of a 3-RRR planar parallel manipulator with a singularity-free workspace[J]. Applied Mechanics and Materials, 2011, 86: 606 ~ 610.
- 4 Octomo D, Hwee C L, Alici G. Direct kinematics and analytical solution to 3RRR parallel planar mechanisms[C]//2006 9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV'06, 2006: 1 ~ 6.
- 5 Waseem A, Khan V, Krovi N. Recursive kinematics and inverse dynamics for a planar 3R parallel manipulator[J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2005, 127(4): 529 ~ 536.
- 6 Asier Z, Itziar C, Marga M. Dynamic modeling of planar parallel robots considering passive joint sensor data[J]. Robotica, 2010, 28(5): 649 ~ 661.
- 7 Yu Yueqing, Du Zhaocai, Yang Jianxin. An experimental study on the dynamics of a 3-RRR flexible parallel robot[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2011, 27(5): 992 ~ 997.
- 8 鲁开讲, 师俊平, 高秀兰. 平面柔性并联机构弹性动力学研究[J]. 农业机械学报, 2010, 41(6): 208 ~ 215.
Lu Kaijiang, Shi Junping, Gao Xiulan. Elastic-dynamics of planar flexile parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(6): 208 ~ 215. (in Chinese)
- 9 胡俊峰, 张宪民, 朱大昌. 柔性并联机器人动力学建模[J]. 农业机械学报, 2011, 42(11): 208 ~ 213.
Hu Junfeng, Zhang Xianmin, Zhu Dachang. Dynamic modeling of flexible parallel robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(11): 208 ~ 213. (in Chinese)
- 10 Zhang Changde, Song Shinmin. An efficient method for inverse dynamics of manipulators based on the virtual work principle [J]. Journal of Robotics Systems, 1993, 10(5): 605 ~ 627.